Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 10, с. 822 – 827

Течение разбавленных растворов полимеров через канал с большим препятствием при малых числах Рейнольдса

И. Ю. Кардаш[1], *С. В. Филатов*, *А. А. Левченко*

Институт физики твердого тела РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 18 марта 2025 г.
После переработки 11 апреля 2025 г.
Принята к публикации 11 апреля 2025 г.

Добавление даже малого количества полимеров с высокой степенью полимеризации существенно меняет реологические свойства жидкости. Полимеры, находясь в потоке жидкости, растягиваются, из-за чего у такого раствора появляются упругие свойства. При малых числах Рейнольдса упругость может стать существеннее сил инерции. В работе измерялась разница давления между двумя точками в канале и средний массовый поток жидкости (со средней скоростью $\langle v \rangle$) через канал шириной 2.5 мм, высотой 1 мм и вертикально ориентированным цилиндрическим препятствием диаметром $d = 1$ мм по центру канала. При числе Вайсенберга $\mathrm{Wi} = \lambda \langle v \rangle / d$ (где λ – наибольшее время релаксации полимера) выше критического значение сопротивления потока жидкости (вычисленное из разности давления и среднего потока) в канале превышает ламинарное значение и, одновременно с этим, впервые наблюдался рост флуктуаций разности давления между двумя точками в канале с большим препятствием. Также были получены спектры флуктуаций разности давления. Полученные результаты указывают на то, что полимеры переходят в существенно растянутое состояние, что проявляется в вязкоупругих свойствах растворов.

DOI: 10.31857/S0370274X25050175, EDN: BKCMMW

Введение. Предметом нашего экспериментального исследования являются разбавленные растворы полимеров. В таких растворах полимерные клубки расположены на большом расстоянии друг от друга. Разбавленные растворы полимеров относятся к неньютоновским жидкостям. Неньютоновские жидкости характеризуются вязкостью, которая в сдвиговом течении зависит от скорости сдвига.

Из-за растяжения полимеров градиентом скорости в потоке возникает упругое поле напряжений в жидкости. Поэтому разбавленные растворы полимеров относятся к вязкоупругим жидкостям.

Есть значительные отличия течения вязкоупругих и ньютоновских жидкостей при больших числах Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{\rho V d}{\eta}$. При добавлении полимеров в жидкость и при $\mathrm{Re} \gg 1$ сопротивление жидкости оказывалось существенно меньшим, чем в случае турбулентного потока ньютоновской жидкости [1]. Это явление называется турбулентным уменьшением сопротивления (*Turbulent Drag Reduction*, TDR). С другой стороны, при определенных условиях эффекты, возникающие при малых числах Рейнольдса, определяются в основном упругими напряжениями в потоке.

Основные свойства разбавленных растворов полимеров могут быть поняты на основании динамики одиночного полимера в жидкости. В равновесии длинная молекула полимера под действием теплового шума сворачивается в клубок, размер R_g, называемый радиусом гирации, этого клубка зависит от молекулярной массы полимера M_w. Если на полимер действуют неоднородные внешние силы (в случае течений растворов полимеров – это силы Стокса), клубок полимера под действием этих сил начинает растягиваться, а после прекращения действия растягивающих сил клубок будет релаксировать к своему равновесному размеру. Безразмерный параметр, характеризующий упругие свойства полимера, выражается как произведение наибольшего времени релаксации λ и характерного градиента скорости $\gamma = \langle v \rangle / d$, и называется числом Вайсенберга $\mathrm{Wi} = \lambda\gamma$.

Заметим, что в определение числа Рейнольдса входит скорость, в то время как в число Вайсенберга – градиент скорости. В экспериментах с узкими каналами, когда характерный размер d мал, число Рейнольдса обычно мало, а значит, в них не возника-

[1]e-mail: ivankardash@issp.ac.ru

ет гидродинамической турбулентности. В то же время число Вайсенберга может быть больше 1, что приводит к значимости упругих эффектов. Когда число Вайсенберга превышает определенное значение, наиболее вероятная конформация молекулы меняется с клубка на сильно растянутое состояние (*Coil-stretch transition*) [2]. В результате существенного растяжения полимеров в потоке развиваются неустойчивости. Подробное рассмотрение этих эффектов можно увидеть в работах [3, 4]. Каскад таких неустойчивостей приводит к развитию хаотического режима, называемого эластической турбулентностью [5–7].

Некоторые свойства эластической турбулентности похожи на свойства гидродинамической турбулентности. Эластическая турбулентность характеризуется следующими особенностями [8]: 1) бо́льшим сопротивлением потока жидкости по сравнению с ламинарным потоком, 2) степенным спектром скорости, 3) существенно более эффективным перемешиванием разного рода примесей в сравнении с молекулярной диффузией.

Существуют перспективы использования эластической турбулентности для создания новых устройств, требующих эффективного перемешивания жидкостей при $\mathrm{Re} \ll 1$ [9]. То же явление можно использовать и для усиления теплопередачи в микроканалах. Данное явление подробно исследовано в работах [10–13].

Как было показано в работах [14–16] эластическая турбулентность достаточно просто возбуждается в каналах с разным количеством препятствий. Размещение одного или нескольких цилиндров в канале в качестве источника возмущений для изучения вязкоэластических неустойчивостей использовалось в экспериментах [14, 17].

В работах [14–16] использовался канал шириной $w = 2.5$ мм и с одним или двумя препятствиями диаметром $d = 0.3$ мм. При таком малом размере препятствия (малом коэффициенте перекрытия $BR = d/w$) можно считать, что стенки канала находятся достаточно далеко от препятствия. Это позволяет считать жидкость неограниченной [8]. Для изучения потоков около препятствия использовался метод μPIV. Он заключается в съемке на камеру декорирующих частиц в потоке жидкости. Дальнейшая обработка полученного видео позволяет измерить поле скоростей. Однако малый размер препятствия налагает высокие требования к разрешению камеры, которая используется для съемки.

Больший размер препятствия, с одной стороны, позволит обойти это ограничение, а с другой стороны, позволит исследовать другие эффекты в потоке вязкоупругой жидкости, обусловленные влиянием стенок канала на поток и неустойчивостями, возникающими перед препятствием, так как большой коэффициент перекрытия BR может являться одним из условий возникновения неустойчивости перед препятствием [18].

Экспериментальная методика. В случае водных растворов полиакриламида (PAAm) эмпирически установлено, что $R_g = 0.075 \cdot M_w^{0.64}$, где M_w выражена в г/моль, а радиус гирации R_g выражается в ангстремах [19]. Для использовавшегося в экспериментах PAAm с молекулярной массой $M_w = 6 \cdot 10^6$ г/моль радиус гирации составляет $R_g = 0.16$ мкм.

Концентрация, при которой происходит перекрытие молекул полимера (концентрация перекрытия c^*), выражается как $c^* = \frac{3M_w}{4\pi N_a R_g^3}$, где N_a – число Авогадро. Для использовавшегося PAAm $M_w = 6 \cdot 10^6$ г/моль концентрация перекрытия составляет $c^* = 5.5 \cdot 10^{-4}$ г/мл. В экспериментах использовались растворы с концентрацией PAAm $c = 3 \cdot 10^{-4}$ г/мл. Растворы с концентрацией полимеров $c < c^*$ принято считать разбавленными.

В эксперименте жидкость выдавливается из стеклянного шприца (*1* на рис. 1) и протекает через специально изготовленный канал (*2* на рис. 1). После прохождения через канал жидкость собирается на весах (*3* на рис. 1).

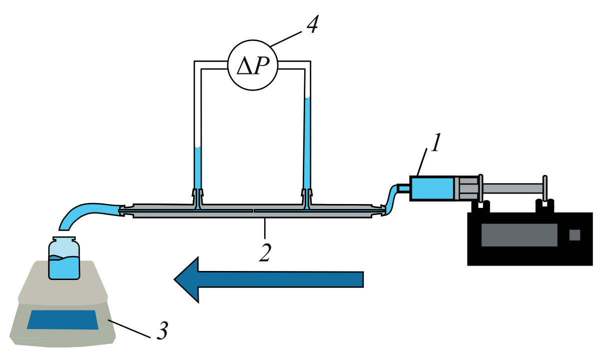

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема экспериментальной установки. Жидкость, выдавливаемая шприцевым насосом из стеклянного шприца *1*, проходит через канал *2*. Разность давлений измеряется между двумя точками канала (дифференциальным датчиком давления *4*). Весы *3* измеряют массу жидкости прошедшей через канал. Стрелкой показано направление потока жидкости

Шприцевой насос (Shenchen SPLab02) равномерно двигает поршень шприца, тем самым создавая поток с постоянным массовым расходом. Протекая через канал, жидкость создает разность давлений. Для измерения разности давлений ΔP к двум точкам канала был подключен дифференциальный датчик давления (*4* на рис. 1).

Каналы представляют собой параллелепипеды высотой $h = 1$ мм, шириной $w = 2.5$ мм и длиной $l = 120$ мм со специальными выводами для подключения датчиков давления, а также трубками, предназначенными для ввода и вывода жидкости. Вертикальный и горизонтальный разрез канала представлены на рис. 2. В качестве препятствия, по центру канала расположен вертикально ориентированный цилиндр диаметром 1 мм. Канал изгтовлен методом фотополимерной 3D-печати с разрешением 34.4 мкм.

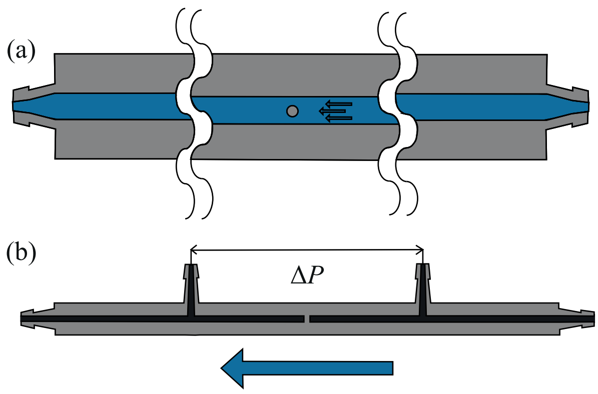

Рис. 2. (Цветной онлайн) Канал в двух разрезах: в горизонтальной (a) и вертикальной (b) плоскости. Длина канала $L_{ch} = 120$ мм, ширина $w = 2.5$ мм, высота $h = 1$ мм, диаметр цилиндрического препятствия по центру канала $d = 1$ мм. Расстояние L между трубками для измерения разности давления ΔP составляет 55 мм. Стрелка показывает направление потока жидкости

Разность давления между двумя точками канала измеряется с помощью дифференциального датчика давления (HoneyWell серия HSC). Расстояние между выводами для подключения дифференциального датчика давления $L = 55$ мм. Использовалось четыре разных датчика: один с диапазоном 5inH20, или около 1.2 кПа, второй – 10inH20, или около 3 кПа, третий – 1psi, или около 7 кПа, четвертый 5psi, или около 34.5 кПа. Датчики были подключены к компьютеру с помощью 14-битного АЦП (LCard e14-140m).

Жидкость, выходящая из канала, взвешивается с помощью весов (Госметр ВЛЭ1023-TI), подключенных к компьютеру, с частотой 1 Гц и разрешением 1 мг. Производная по времени от измеренной зависимости $m(t)$ дает значение массового потока.

Приготовление растворов. Приготовление воспроизводимых по своим реологическим свойствам растворителей и растворов полимеров является важной частью экспериментальной работы. Ниже будут описаны основные этапы приготовления ньютоновской жидкости, выступающей в качестве растворителя для полимеров, концентрированного раствора полимеров, а также процесс получения разбавленных растворов полимеров с контролируемой концентрацией молекул полимеров.

Приготовление растворителей. Растворитель готовился путем смешивания 64 % (здесь и далее все проценты указаны по массовой доле) химически чистой сахарозы (AR/ACS Sucrose производства CDH), 35 % деионизированной воды, а также с небольшим количеством соли (примерно 1 %). Добавление соли обусловлено наличием небольшого количества кислотных остатков в гранулах полиакриламида (использовался PAAm $M_w = 6 \cdot 10^6$ г/моль от Polysciences, Inc). Ионы соли экранируют электростатическое поле, создаваемое кислотными остатками, что уменьшает электростатические взаимодействия в растворе и тем самым обеспечивает его стабильность. Плотность получаемого растворителя составляла $\rho = 1.38$ г/мл, а вязкость – $\eta_s = 7$ сПа · с.

Приготовление растворов полимеров. В использованных разбавленных растворах полимеров концентрация полимеров достаточно мала (в эксперименте концентрация составляла 300 мг/кг). При добавлении столь малой массы полимеров в раствор, разрешение весов в 1 мг может дать значительную погрешность. Кроме того, широкое распределение полимеров по молекулярной массе может привести к плохой воспроизводимости реологических свойств растворов. В силу этого, приготовление раствора состоит из двух стадий. Сначала готовится концентрированный раствор полимеров (концентрация PAAm в нем 3000 мг/кг), а затем он разбавляется растворителем для получения нужной концентрации.

Концентрированный раствор полиакриламида приготавливается путем добавления в воду 0.3 % массы готового раствора гранул полиакриламида. Далее раствор перемешивается специально изготовленной четырехлистной мешалкой (диаметром 3 см) в течение 3 ч при скорости 250 об./мин. При таком перемешивании молекулы полимера разрушаются, причем самые длинные молекулы разрушаются с большей вероятностью. Таким образом, функция распределения полимеров по длинам сужается и, как следствие, раствор становится более стабильным по своим реологическим свойствам.

Также в раствор добавляется небольшое количество азида натрия NaN_3, который служит для предотвращения роста микроорганизмов.

Перед измерениями небольшое количество концентрированного раствора полимера разбавляется растворителем, а затем в специальной мешалке медленно перемешивается (в отсутствии больших градиентов скорости, чтобы далее не разрушать молекулы полимера) в течении двух суток для получения однородного раствора.

Оценка времени релаксации. Время релаксации λ полимерного клубка является ключевым микропараметром, определяющим характер макроскопического движения вязкоэластической жидкости. Для оценки времени релаксации в разбавленных растворах обычно используют модель Зимма [20]. Наибольшее время релаксации полимера λ выражается через молекулярную массу M_w, характеристическую вязкость $[\eta]$ и вязкость растворителя η_s в соответствии с формулой.

$$\lambda \sim \frac{\eta_s[\eta]M_w}{RT}, \tag{1}$$

где R – универсальная газовая постоянная, а T – температура.

Характеристическая вязкость подсоленных растворов полиакриламида в зависимости от молекулярной массы M_w выражается следующей эмпирической формулой [21]

$$[\eta] = 0.007 \cdot M_w^{0.77}. \tag{2}$$

Для полиакриламида $M_w = 6 \cdot 10^6$ значение $[\eta] = 1200$ мл/г.

В работе [22] приведено эмпирическое выражение для определения времени релаксации полиакриламида (при исчезающе малой концентрации полимеров) молекулярной массы $M_w = 18 \cdot 10^6$ г/моль в зависимости от вязкости растворителя η_s. Преобразовав это выражение с помощью формул (1) и (2) можно получить оценку для времени релаксации полиакриламида произвольной молекулярной массы M_w в растворителе вязкости η_s.

$$\lambda = \eta_s \left(\frac{M_w}{18 \cdot 10^6}\right)^{1.77}, \tag{3}$$

где M_w выражается в г/моль, а η_s – в сПа · с.

В случае использования полиакриламида $M_w = 6 \cdot 10^6$ г/моль в растворителе вязкости $\eta_s = 7$ сПа · с, время релаксации можно оценить, как $\lambda \simeq 1$ с.

Экспериментальные результаты. В качестве параметра, характеризующего поток жидкости через канал, был выбран коэффициент сопротивления потока f_D. Сопротивление потока f_D определяется из формулы Дарси–Вейсбаха (4).

$$\frac{\langle \Delta P \rangle}{L} = f_D \frac{\rho \langle v \rangle^2}{2D_h}, \tag{4}$$

где $\langle \Delta P \rangle$ – усредненная по времени эксперимента разность давления между двумя точками канала, расстояние между двумя точками $L = 55$ мм, $\rho = 1.38$ г/мл – плотность жидкости, $\langle v \rangle$ – средняя скорость жидкости в канале, D_h – гидравлический диаметр, определяемый как $D_h = 4S/P = 1.4$ мм, S – площадь сечения канала, а P – периметр этого сечения.

На графике 3 показана зависимость f_D от числа Рейнольдса. Зависимость $f_D(\mathrm{Re})$ для ньютоновского растворителя (квадраты на графике), с экспериментальной точностью, аппроксимируется зависимостью $f_{\mathrm{solvent}} \propto \mathrm{Re}^{-1}$ на всем диапазоне чисел Рейнольдса. Эксперимент с растворителем проводился для калибровки экспериментальной установки. Поток растворителя при таких малых числах Рейнольдса является ламинарным, что объясняет экспериментально найденную зависимость $f_D \propto \mathrm{Re}^{-1}$. В случае же течения полимерного раствора эта зависимость становится значительно сложнее. Зависимость $f_D(\mathrm{Re})$ для раствора полимеров при малых значениях числа Рейнольдса (пока градиенты скорости в канале достаточно малы) такая же, как и в случае ньютоновского растворителя. Однако при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} > 0.4$ зависимость становится существенно отличной от случая ньютоновского растворителя.

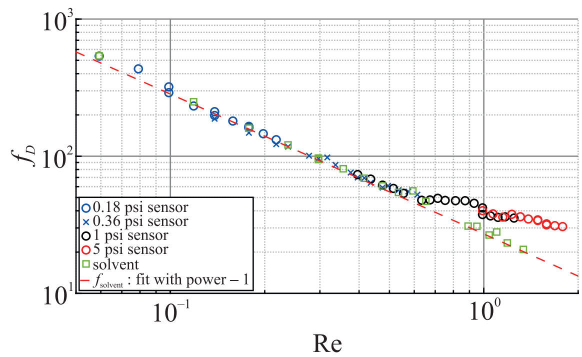

Рис. 3. (Цветной онлайн) Экспериментально измеренная зависимость коэффициента сопротивления потока f_D от числа Рейнольдса Re. Круги разного цвета получены разными датчиками дифференциального давления (см. легенду), квадраты относятся к эксперименту с ньютоновским растворителем. Штриховая линия показывает аппроксимацию f_{solvent} экспериментальной зависимости f_D для растворителя степенью, равной -1

На графике 4 приведен относительный коэффициент потерь в зависимости от числа Вайсенберга $\mathrm{Wi} = \lambda\frac{\langle v \rangle}{d}$, где $\langle v \rangle = \frac{dm}{dt}\frac{1}{\rho}\frac{1}{w \cdot h}$ – средняя скорость течения в канале, d – диаметр препятствия. Относительный коэффициент сопротивления в канале – это отношение экспериментально найденного

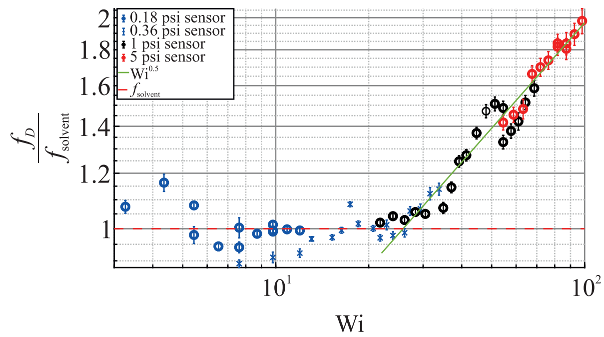

Рис. 4. (Цветной онлайн) Скомпенсированный график зависимости коэффициента сопротивления потока от числа Вайсенберга Wi. Штриховая линия показывает аппроксимацию f_{solvent} экспериментальной зависимости f_D для растворителя

f_D к аппроксимации f_{solvent}, найденной для течения растворителя.

При некотором критическом значении числа Вайсенберга $\mathrm{Wi}_c \simeq 13$ коэффициент сопротивления в канале начинает превышать ламинарное значение. Эмпирически найденная зависимость относительного коэффициента сопротивления от числа Вайсенберга при $\mathrm{Wi} > \mathrm{Wi}_c$ $f_D/f_{\mathrm{solvent}} \propto \mathrm{Wi}^{0.5}$ согласуется с ранее проведенными экспериментами [14]. Одновременно с отклонением поведения потока от ламинарного режима в канале начинают расти флуктуации давления.

На графике 5 приведены среднеквадратичные флуктуации разности давления (для полимерного раствора) в зависимости от числа Вайсенберга. При ламинарном течении жидкости через канал главным источником флуктуаций давления в канале является шприцевой насос.

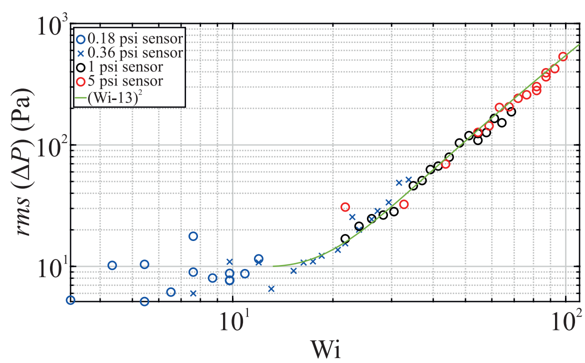

Рис. 5. (Цветной онлайн) Зависимость среднеквадратичных флуктуаций разности давления ΔP от числа Вайсенберга Wi

На графике 6а приведен сигнал (с вычетом средней разницы давления $\langle \Delta P \rangle = 4.6$ кПа для раствора полимеров и $\langle \Delta P \rangle_{\mathrm{solvent}} = 2.7$ кПа для растворителя) дифференциального датчика давления в случае

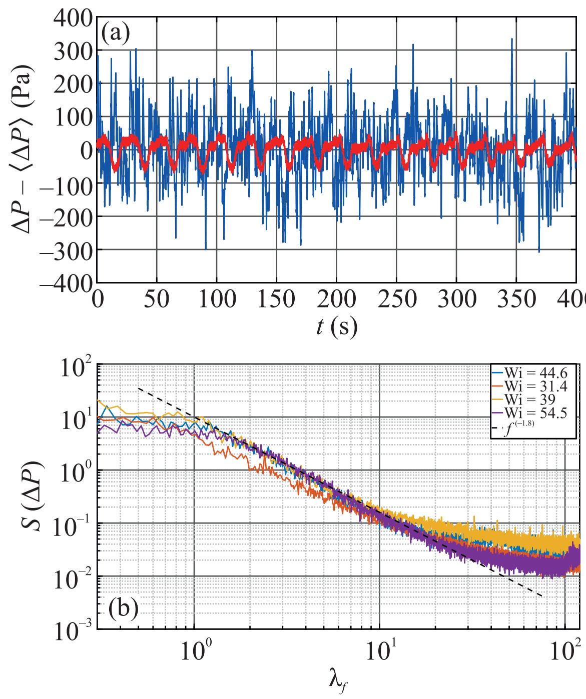

Рис. 6. (Цветной онлайн) (a) – Сигнал с датчика дифференциального давления для ньютоновского растворителя (красным) и течения раствора полимеров (синим) для $\mathrm{Re} \approx 0.9$. (b) – Спектральная плотность мощности $S(\Delta P)$ разницы давления в двух точках канала для различных чисел Вайсенберга больше Wi_c, штриховая линия – степенная зависимость от частоты со степенью -1.8

течения ньютоновского растворителя (красная кривая) и в случае течения раствора полимеров при одном и том же числе Рейнольдса (но при $\mathrm{Wi} > \mathrm{Wi}_c$). Периодическое поведение красной линии связано с работой системы подачи жидкости (шприцевой насос и гибкие силиконовые соединительные трубки). Видно, что при $\mathrm{Wi} > \mathrm{Wi}_c$ величина флуктуаций давления в течении вязкоэластической жидкости значительно превышает флуктуации давления и амплитуду периодических колебаний давления, вызванных действием системы подачи жидкости.

На графике 5 приведена зависимость среднеквадратичных флуктуаций разности давления в зависимости от числа Вайсенберга. При числах $\mathrm{Wi} < \mathrm{Wi}_c$ флуктуации давления находятся на постоянном уровне. А при $\mathrm{Wi} > \mathrm{Wi}_c$ наблюдается рост флуктуаций давления, который хорошо ложится на зависимость $rms(\Delta P) \propto (\mathrm{Wi} - 13)^2$ на этом диапазоне. Это позволяет оценить критическое значение числа Вайсенберга $\mathrm{Wi}_c \simeq 13$. Качественно, рост флуктуаций разности давления при $\mathrm{Wi} > \mathrm{Wi}_c$ согласуется с экспериментом [17]. Однако степенной закон и конкретная степень в канале с большим препятствием были получены впервые.

На графике 6b приведены спектры сигналов с дифференциальных датчиков давления для нескольких экспериментов с вязкоэластической жидкостью при $\mathrm{Wi} > \mathrm{Wi}_c$. Спектры давления представлены как функции нормированной частоты λf. На низких частотах флуктуации давления постоянны, а при частотах $\lambda f > 1$ наблюдается степенной спад (с показателем степени около -1.8), а при частоте $\lambda f \simeq 10$ уровень флуктуаций снова выходит на константу (уровень шумов). Такая форма спектров качественно согласуется с экспериментом [14], где измерялось абсолютное давление в канале.

Заключение. В рамках исследования были определены зависимости коэффициента потерь в канале с большим препятствием от числа Рейнольдса для разбавленного раствора полимеров. Проведено сравнение с коэффициентом потерь для растворителя и приведена зависимость относительного коэффициента потерь от числа Вайсенберга для разбавленного раствора полимеров.

Течения ньютоновской жидкости и разбавленного раствора полимеров через канал с препятствием имеют заметные различия. При числе Вайсенберга больше критического значения зафиксировано увеличение флуктуаций разности давления относительно ламинарного случая. Зависимость $rms(\Delta P) \propto$ $\propto (\mathrm{Wi}-13)^2$ позволяет оценить критическое значение числа Вайсенберга $\mathrm{Wi}_c \simeq 13$, выше которого течение перестает быть ламинарным. Кроме того, были получены спектры флуктуаций разности давления, которые значительно отличаются от случая ламинарного потока.

Степенной рост флуктуаций давления и зависимость $rms(\Delta P) \propto (\mathrm{Wi} - 13)^2$ для течения вязкоэластической жидкости в канале с большим препятствием была получена впервые. Зависимость $f_D/f_{\mathrm{solvent}} \propto \mathrm{Wi}^{0.5}$ в канале с большим препятствием также была получена впервые.

Полученные результаты показывают область параметров, в которой упругие эффекты существеннее сил инерции. Переход полимеров в существенно растянутое состояние вызывает рост флуктуаций давления.

Они, в свою очередь, приводят к появлению хаотической компоненты в поле скоростей. В дальнейшем изучение поля скоростей в канале позволит детально охарактеризовать режимы течения вязкоэластической жидкости, исследовать влияние стенок канала на поток и неустойчивости, возникающие около препятствия.

Авторы благодарны В. В. Лебедеву и И. В. Колоколову за полезные обсуждения.

Финансирование работы. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 23-72-30006.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. B. A. Toms, *Some observations on the flow of linear polymersolutions through straight tubes at large reynolds numbers*, in *Proceedings of the 1st International Congress on Rheology*, North Holland Publ. Co., Amsterdam, The Netherlands, (1949), v. 2, p. 135.
2. R. G. Larson, *Constitutive equations for polymer melts and solutions: Butterworths series in chemical engineering*, Butterworth-Heinemann, London, England (2013).
3. P. E. Arratia, C. C. Thomas, J. Diorio, and J. P. Gollub, Phys. Rev. Lett. **96**(14), 144502 (2006).
4. R. Poole, M. Alves, and P. J. Oliveira, Phys. Rev. Lett. **99**(16), 164503 (2007).
5. E. G. Shaqfeh, Annu. Rev. Fluid Mech. **28**, 129 (1996).
6. R. G. Larson, Nature **405**(6782), 27 (2000).
7. A. Groisman and V. Steinberg, Nature **405**(6782), 53 (2000).
8. V. Steinberg, Annu. Rev. Fluid Mech. **53**(1), 27 (2021).
9. A. Groisman and V. Steinberg, Nature **410**(6831), 905 (2001).
10. B. Traore, C. Castelain, and T. Burghelea, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics **223**, 62 (2015).
11. R. Whalley, W. Abed, D. Dennis, and R. Poole, Theoretical and Applied Mechanics Letters **5**(3), 103 (2015).
12. W.M. Abed, R.D. Whalley, D.J. Dennis, and R.J. Poole, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics **231**, 68 (2016).
13. D.-Y. Li, X.-B. Li, H.-N. Zhang, F.-C. Li, S. Qian, and S. W. Joo, Microfluidics and Nanofluidics **21**, 1 (2017).
14. A. Varshney and V. Steinberg, Phys. Rev. Fluids **3**(10), 103302 (2018).
15. A. Varshney and V. Steinberg, Nat. Commun. **10**(1), 652 (2019).
16. M.V. Kumar, A. Varshney, D. Li, and V. Steinberg, Phys. Rev. Fluids **7**(8), L081301 (2022).
17. B. Qin, P. F. Salipante, S. D. Hudson, and P. E. Arratia, Phys. Rev. Lett. **123**(19), 194501 (2019).
18. S. Peng, T. Tang, J. Li, M. Zhang, and P. Yu, J. Fluid Mech. **959**, A16 (2023).
19. J. Francois, D. Sarazin, T. Schwartz, and G. Weill, Polymer **20**(8), 969 (1979).
20. B. H. Zimm, J. Chem. Phys. **24**(2), 269 (1956).
21. W.M. Kulicke and R. Haas, Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals **23**(3), 308 (1984).
22. Y. Liu, Y. Jun, and V. Steinberg, J. Rheol. **53**(5), 1069 (2009).