Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 10, с. 846 – 851

Квантовая запутанность добавленных когерентных состояний на светоделителе

Д. Н. Макаров[1)]

Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова, 163002 Архангельск, Россия

Поступила в редакцию 17 марта 2025 г.
После переработки 6 апреля 2025 г.
Принята к публикации 14 апреля 2025 г.

В настоящее время изучение новых квантовых состояний и методов их генерации является важной частью развития квантовых технологий. Одной из важнейших характеристик таких состояний является их квантовая запутанность. Сравнительно недавно были введены добавленные когерентные состояния, определяемые как $|\alpha, n\rangle = \mathcal{N}_n \left(\hat{a}^{\dagger}\right)^n |\alpha\rangle$, где $\mathcal{N}_n$ – нормировочная постоянная, $|\alpha\rangle$ – когерентное состояние, а $\hat{a}^{\dagger}$ – оператор рождения, n – число добавленных фотонов. В данной работе впервые рассматривается квантовая запутанность таких состояний при их прохождении через светоделитель. Найдено простое аналитическое представление волновой функции на выходных портах светоделителя и рассмотрена квантовая запутанность получаемых двухкубитных состояний. Показано, что новые квантовые состояния имеют хорошие перспективы для их использования в квантовых технологиях.

DOI: 10.31857/S0370274X25050215, EDN: DGVENL

1. Введение. В современной квантовой физике, в частности в квантовой оптике и квантовой информации, важное место занимает изучение новых квантовых состояний и их квантовой запутанности [1–6]. Различные квантовые состояния и их возможность к запутыванию находят применение в квантовой метрологии [1], квантовой обработке информации [7], линейных оптических квантовых вычислениях (LOQC) [3–5], а также при моделировании процессов квантового транспорта [2]. Запутанность может быть реализована для различных квантовых состояний, включая те, которые обладают классическими характеристиками, например, когерентные состояния [8]. Примером, иллюстрирующим идею запутанности между классическими и квантовыми системами, является знаменитый мысленный эксперимент с котом Шредингера, где квантовый объект (атом) и классический объект (кот) оказываются взаимосвязаны [9]. Генерация квантовой запутанности и формирование различной статистики фотонов обычно достигаются путем взаимодействия света с веществом, что приводит к изменению статистики фотонов и, как следствие, к их запутыванию. Одним из широко используемых методов для создания и управления запутанными фотонами является применение светоделителей (BS) [10–13]. Способность светоделителя генерировать и управлять запутанностью особенно важна для линейных оптических квантовых вычислений (LOQC) [3–5]. Исследования показывают, что использование светоделителей позволяет достигать высокой степени запутанности различных состояний [5, 10, 14–18], что делает их перспективными для применения в квантовых технологиях. Хорошо известно, что оператор двухмодового светоделителя $\hat{U}_{BS}$, который переводит из начального состояния $|\psi_{\rm in}\rangle$ в конечное состояние $|\psi_{\rm out}\rangle = \hat{U}_{BS}|\psi_{\rm in}\rangle$, в квантовой оптике определяется как [18]

$$\hat{U}_{BS} = e^{\theta\left(e^{i\phi}\hat{a}_1^{\dagger}\hat{a}_2 - e^{-i\phi}\hat{a}_2^{\dagger}\hat{a}_1\right)}, \tag{1}$$

где $\sin^2\theta = R$ (R это коэффициент отражения BS), ϕ – фазовый сдвиг, $\hat{a}_i^{\dagger}$ и $\hat{a}_i$ – операторы рождения и уничтожения фотонов в моде i соответственно. Одними из наименее изученных и перспективных для использования в квантовых технологиях являются добавленные когерентные состояния (добавляются фотоны) (PACS) [8, 9, 19, 20]. Эти состояния были впервые введены в [21] и определяются как

$$|\alpha, n\rangle = \mathcal{N}_n \left(\hat{a}^{\dagger}\right)^n |\alpha\rangle,\ \mathcal{N}_n = \frac{1}{\sqrt{n! L_n(-|\alpha|^2)}}, \tag{2}$$

где $\mathcal{N}_n$ – постоянная нормировки, $|\alpha\rangle = e^{\alpha\hat{a}^{\dagger} - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle$ – когерентное состояние, а $\hat{a}^{\dagger}$ – оператор рождения, $L_n(x)$ – полиномы Лагерра, n – число добавленных фотонов. В этом состоянии фотоны добавляются к той же моде, что и когерентное состояние (классическое), и полученное состояние уже проявляет квантовые свойства. PACS обладают интересными стати-

[1)]e-mail: makarovd0608@yandex.ru

стическими свойствами, которые похожи на классические когерентные состояния (CS) и квантовые состояния Фока. Статистические свойства PACS являются субпуассоновскими по числу фотонов, что связано с более детерминированным поведением при обнаружении фотонов по сравнению с когерентными состояниями, статистика которых является пуассоновской [21, 22]. Функция Вигнера PACS характеризуется отрицательностью, что указывает на неклассические состояния, и это делает их более подходящими для многих приложений в квантовых технологиях [21]. Такие состояния имеют много приложений, например, в квантовом зондировании [23] и в каналах безопасности в квантовом распределении ключей [22]. В целом, процесс добавления или вычитания фотона из когерентного состояния имеет интересные физические последствия [24].

В этой статье мы исследуем квантовую запутанность для состояний, полученных после прохождения PACS через светоделитель, т.е. состояний $|\psi_{\rm out}\rangle = \hat{U}_{BS}\,|\alpha,n\rangle|\beta,m\rangle$. Хорошо известно, что PACS являются неортогональными состояниями (то же самое для $|\psi_{\rm out}\rangle$) и определение квантовой запутанности для двух или более нефакторизуемых состояний является довольно сложной проблемой и в настоящее время активно изучается [8, 19, 25–27]. В результате в этой работе будет найдено аналитическое разложение, позволяющее легко определить состояния после прохождения PACS через светоделитель. Это разложение позволяет вычислить квантовую запутанность в аналитическом виде для двухкубитных состояний, которые интересны не только для теоретического изучения, но и для их использования в квантовых технологиях.

Далее будем использовать атомную систему единиц: $\hbar = 1$; $|e| = 1$; $m_e = 1$, где $\hbar$ – приведенная постоянная Планка, e – заряд электрона, m_e – масса электрона.

2. Квантовые состояния на выходных портах светоделителя. Рассмотрим светоделитель, на который падают две моды электромагнитного поля, где каждая из мод является PACS, см. рис. 1. Далее можно найти $|\psi_{\rm out}\rangle = \hat{U}_{BS}\;|\alpha,n\rangle|\beta,m\rangle$, где $\hat{U}_{BS}$ определяется выражением (1) и выбирается сдвиг фаз в наиболее часто используемой форме, т.е. для $\phi = \pi/2$, тогда

$$|\psi_{\rm out}\rangle = \hat{U}_{BS}|\alpha,n\rangle|\beta,m\rangle,\ \hat{U}_{BS} = e^{i\theta\left(\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2+\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_1\right)}. \quad (3)$$

Добавим, что, как известно, выбор ϕ может быть произвольным и физически измеримый результат на выходных портах BS от него зависеть не будет, см. например [18, 17]. Если же рассматривать более одного BS, т.е. входное состояние на следующем BS является выходным состоянием на предыдущем, то следует учитывать фазу. Здесь мы рассматриваем только один BS.

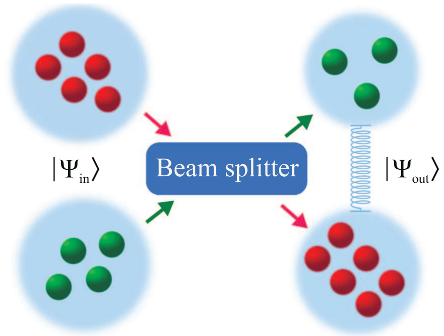

Рис. 1. (Цветной онлайн) Показан светоделитель, на который падают две моды PACS, где первая мода является состоянием $|\alpha,n\rangle$, а вторая – состоянием $|\beta,m\rangle$, т.е. $|\psi_{\rm in}\rangle = |\alpha,n\rangle|\beta,m\rangle$. Добавленные фотоны в когерентных состояниях обозначены кружками. На выходе светоделителя появляется новое состояние $|\psi_{\rm out}\rangle$, которое является квантово запутанным (запутанность выходных состояний, т.е. нефакторизуемость, обозначена связью)

Чтобы найти $|\psi_{\rm out}\rangle$, начальное состояние должно быть представлено как

$$|\alpha,n\rangle|\beta,m\rangle = \frac{e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}e^{\alpha\hat{a}_1^\dagger}}{\sqrt{L_n(-|\alpha|^2)}}\frac{e^{-\frac{|\beta|^2}{2}}e^{\beta\hat{a}_2^\dagger}}{\sqrt{L_m(-|\beta|^2)}}|n\rangle|m\rangle, \quad (4)$$

где $|n\rangle$ и $|m\rangle$ – фоковские состояния с n и m фотонами в модах 1 и 2 соответственно. Далее нам нужно рассмотреть выражение $\hat{U}_{BS}e^{\alpha\hat{a}_1^\dagger}e^{\beta\hat{a}_2^\dagger}$. Для этого нам нужно воспользоваться формулой Baker–Campbell–Hausdorff, а именно известным следствием этой формулы

$$e^{\hat{X}}e^{\hat{Y}} = e^{(\hat{Y}+[\hat{X},\hat{Y}]+\frac{1}{2!}[\hat{X},[\hat{X},\hat{Y}]]+\frac{1}{3!}[\hat{X},[\hat{X},[\hat{X},\hat{Y}]]]+\cdots)}\;e^{\hat{X}}. \quad (5)$$

Используя уравнение (5), можно получить следующее соотношение

$$\hat{U}_{BS}\;e^{\alpha\hat{a}_1^\dagger}e^{\beta\hat{a}_2^\dagger} = e^{\tilde{\alpha}\hat{a}_1^\dagger}e^{\tilde{\beta}\hat{a}_2^\dagger}\;\hat{U}_{BS},$$
$$\tilde{\alpha} = \alpha\cos\theta + i\beta\sin\theta,\ \tilde{\beta} = \beta\cos\theta + i\alpha\sin\theta. \quad (6)$$

Добавим, что закон преобразования в $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ описывается матрицей BS U_{BS} с выбранным ранее фазовым сдвигом $\phi = \pi/2$, т.е.

$$\begin{pmatrix}\tilde{\alpha}\\ \tilde{\beta}\end{pmatrix} = U_{BS}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\quad U_{BS} = \begin{pmatrix}\cos\theta & i\sin\theta\\ i\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}. \quad (7)$$

В результате, используя уравнение (6), получаем

$$|\psi_{\rm out}\rangle = \frac{e^{-\frac{|\tilde\alpha|^2}{2}}e^{\tilde\alpha\hat a_1^\dagger}}{\sqrt{L_n(-|\alpha|^2)}}\frac{e^{-\frac{|\tilde\beta|^2}{2}}e^{\tilde\beta\hat a_2^\dagger}}{\sqrt{L_m(-|\beta|^2)}}\hat U_{BS}|n\rangle|m\rangle. \quad (8)$$

Выражение (8) теперь имеет новое представление, в котором явно выделена часть $\hat U_{BS}|n\rangle|m\rangle$. Эта часть $\psi_{\rm out}(\alpha=0,\beta=0)=\hat U_{BS}|n\rangle|m\rangle$ имеет хорошо известное разложение на моды Шмидта двухпортового светоделителя, где n и m – это число фотонов в состоянии Фока, падающих на первый и второй порты соответственно. Это разложение имеет вид (например, [18, 17]) $\hat U_{BS}|n\rangle|m\rangle=\sum_{l=0}^{n+m}c_{l,n+m-l}|l\rangle|n+m-l\rangle$, где

$$c_{l,n+m-l}=\sum_{k=0}^{n+m}A^{n,m}_{k,n+m-k}A^{*l,n+m-l}_{k,n+m-k}e^{-2ik\theta},$$

$$A^{l,n+m-l}_{k,n+m-k}=$$

$$=\frac{\sqrt{k!(n+m-k)!}P_k^{(-(1+n+m),n+m-k-l)}(-3)}{2^{\frac{n+m}{2}}\sqrt{l!(n+m-l)!}}, \quad (9)$$

где $P_\gamma^{\alpha,\beta}(x)$ – полином Якоби. Из выражения (9) видно, что общее число фотонов в состояниях $|l\rangle|n+m-l\rangle$ всегда сохраняется и равно общему числу добавленных фотонов $n+m$. Далее представим $\hat U_{BS}|n\rangle|m\rangle=\sum_{l=0}^{n+m}c_{l,n+m-l}\frac{(\hat a_1^\dagger)^l}{\sqrt{l!}}\frac{(\hat a_2^\dagger)^{n+m-l}}{\sqrt{(n+m-l)!}}|0\rangle$. В результате можно увидеть, что

$$|\psi_{\rm out}\rangle=\sum_{l=0}^{n+m}c_{l,n+m-l}\frac{\left(\hat a_1^\dagger\right)^l}{\sqrt{l!}}\frac{\left(\hat a_2^\dagger\right)^{n+m-l}}{\sqrt{(n+m-l)!}}\times$$

$$\times\frac{e^{\tilde\alpha\hat a_1^\dagger-\tilde\alpha^*\hat a_1}}{\sqrt{L_n(-|\alpha|^2)}}\frac{e^{\tilde\beta\hat a_2^\dagger-\tilde\beta^*\hat a_2}}{\sqrt{L_m(-|\beta|^2)}}|0\rangle. \quad (10)$$

Выражение (10) можно представить в окончательном виде через PACS

$$|\psi_{\rm out}\rangle=\sum_{l=0}^{n+m}B_l\,|\tilde\alpha,l\rangle|\tilde\beta,n+m-l\rangle,$$

$$B_l=\sqrt{\frac{L_l(-|\tilde\alpha|^2)L_{n+m-l}(-|\tilde\beta|^2)}{L_n(-|\alpha|^2)L_m(-|\beta|^2)}}c_{l,n+m-l}. \quad (11)$$

Из выражения (11) видно, что количество новых PACS будет определяться общим числом добавленных фотонов $n+m$ в $|\psi_{in}\rangle$. Это выражение имеет два известных предельных случая. Первый случай – это когда на светоделитель падают только фотоны в состоянии Фока, т.е. когда $\alpha=\beta=0$, где мы получаем хорошо известный результат [17, 18]. Второй случай – это когда фотоны не добавляются, т.е. $m=n=0$, тогда $|\psi_{\rm out}\rangle=|\tilde\alpha\rangle|\tilde\beta\rangle$, т.е. входят и выходят когерентные состояния. В этом случае когерентные состояния также появляются на выходных портах светоделителя, которые расщепляются в соответствии с классической теорией светоделителей, см. выражение (7). Кроме того, в этом случае нет квантовой запутанности, поскольку $|\psi_{\rm out}\rangle$ факторизуются. Из выражения (11) следует один интересный вывод, указывающий на то, что добавленные фотоны в когерентных состояниях после выхода из светоделителя появляются в новых состояниях $|\tilde\alpha,l\rangle\ |\tilde\beta,n+m-l\rangle$ по закону, аналогичному закону для фоковских состояний. Например, если рассмотреть состояния, в которых число добавленных фотонов в первой и второй модах $m=n$ одинаково, а коэффициент отражения $R=1/2$, то получим состояния, похожие на состояние Holland–Burnett (HB) [28]. В состоянии HB, как известно, на выходных портах светоделителя [28] появляются только четные фотоны. Это означает, что в состоянии $|\tilde\alpha,l\rangle\ |\tilde\beta,n+m-l\rangle$ у нас будут добавлены фотоны с четным числом, т.е. $l,n+m-l$ – четные величины. Действительно, это можно увидеть, если заметить, что в выражение (11) входит коэффициент $c_{l,n+m-l}$, который определяет вероятность обнаружения фотонов, но для падающих фоковских состояний, тогда как в состоянии HB они реализуются на светоделителе для фоковских состояний.

3. Квантовая запутанность двухкубитных систем. Полученное состояние (11) не является ортогональным, поэтому для нахождения квантовой запутанности необходимо сначала определить ортогональный базис. В общем случае это невозможно, но существуют методы нахождения ортогонального базиса для двухкубитных и двухкутритных систем, например [27, 25]. Рассмотрим здесь двухкубитные системы, получаемые на выходных портах светоделителя и соответствующие состоянию (11).

I. Число дабавленных фотонов в первой и второй модах соответсвенно: $n=0,m=1$ или $n=1$, $m=0$. Рассмотрим случай $n=0$, $m=1$, поскольку при $n=1$, $m=0$ нужно в итоговых выраженях $\alpha\to\beta$ и $\beta\to\alpha$. В этом случае

$$|\psi_{\rm out}\rangle=B_0|\tilde\alpha,0\rangle\ |\tilde\beta,1\rangle+B_1|\tilde\alpha,1\rangle\ |\tilde\beta,0\rangle. \quad (12)$$

Выражение (12) можно представить в ортогональной форме, если ввести новые состояния

$$|0\rangle_1=|\tilde\alpha,0\rangle,\ |1\rangle_1=N_1(|\tilde\alpha,1\rangle-\langle\tilde\alpha,0|\tilde\alpha,1\rangle|\tilde\alpha,0\rangle),$$
$$|0\rangle_2=|\tilde\beta,0\rangle,\ |1\rangle_2=N_2(|\tilde\beta,1\rangle-\langle\tilde\beta,0|\tilde\beta,1\rangle|\tilde\beta,0\rangle), \quad (13)$$

где N_1 и N_2 – нормировочные коэфициенты, которые равны $N_1=(1-|\langle\tilde\alpha,0|\tilde\alpha,1\rangle|^2)^{-1}$ и $N_2=(1-|\langle\tilde\beta,0|\tilde\beta,1\rangle|^2)^{-1}$. В результате ортогональная волновая функция будет

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = \{B_0\langle\tilde{\beta},0|\tilde{\beta},1\rangle + B_1\langle\tilde{\alpha},0|\tilde{\alpha},1\rangle\}|0\rangle_1|0\rangle_2 + \\ + \frac{B_0}{N_2}|0\rangle_1|1\rangle_2 + \frac{B_1}{N_1}|1\rangle_1|0\rangle_2. \quad (14)$$

Разложение на моды Шмидта для выражения (14) было сделано в [29]. В результате получаем ортогональные состояния

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = C_+|+\rangle_1|+\rangle_2 + C_-|-\rangle_1|-\rangle_2, \quad (15)$$

где $|C_\pm|^2 = \lambda_\pm$-вероятность обнаружения системы в состояниях $|\pm\rangle$. В результате параметр $\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm$ $\pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4\left|\frac{B_0B_1}{N_1N_2}\right|^2}$. После подстановки всех коэффициентов получаем

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4R(1-R)}{(1+|\beta|^2)^2}}. \quad (16)$$

Хорошо известно, что, зная моды Шмидта, всегда можно вычислить квантовую запутанность, например, используя такие меры запутанности, как энтропия фон Неймана или параметр Шмидта [30]. Результаты представим в виде параметра Шмидта, который в нашем случае равен $K = (\lambda_+^2 + \lambda_-^2)^{-1}$. В итоге получим

$$K = \frac{(1+|\beta^2|)^2}{1+|\beta|^2(2+|\beta|^2) - 2R(1-R)}. \quad (17)$$

Легко увидеть, что максимальная запутанность будет при $\beta = 0, R = 1/2$, где параметр Шмидта $K_{\max} = 2$. Также из выражения (17) видно, что запутанность не зависит от α при $n = 0, m = 1$, а при $n = 1, m = 0$ не будет зависеть от β. Это связано с тем, что запутанность возникает между модами, а именно между добавленными фотонами, поскольку когерентные состояния не могут быть запутаны на светоделителе. Поскольку входящие добавленные когерентные состояния, где число добавленных фотонов ≥ 1, невозможно факторизовать с когерентным состоянием, то в запутанности будут только α или β с числом добавленных фотонов ≥ 1. Добавленные когерентные состояния, где $n = 0$ или $m = 0$, дают входящие когерентные состояния с числами α или β соответственно, одной из которых нет в выражении (17).

II. Число дабавленных фотонов в первой и второй модах: $n = 1$, $m = 1$ при коэффициенте отражения $R = 1/2$. Случай $n = 1$, $m = 1$, где ко второй и первой модам добавляется только по одному фотону, и выполняется условие $R = 1/2$, является интересным для исследования. Если предположить, что $\alpha = \beta = 0$, то это случай Hong–Ou–Mandel (HOM) эффекта, т.е. фотоны покидают BS только парами. Этот случай является уникальным в квантовой оптике и используется во многих областях квантовых технологий [6]. Добавим, что это частный случай состояний НВ при $m = n = 1$. В итоге возникает эффект, аналогичный HOM интерференции, который выглядит как

$$|\psi_{\text{out}}\rangle = B_0|\tilde{\alpha},0\rangle\ |\tilde{\beta},2\rangle + B_2|\tilde{\alpha},2\rangle\ |\tilde{\beta},0\rangle, \quad (18)$$

где $|\tilde{\alpha},0\rangle = |\tilde{\alpha}\rangle$ и $|\tilde{\beta},0\rangle = |\tilde{\beta}\rangle$, т.е. когерентные состояния на выходе. Добавим, что то же самое справедливо и для первого рассмотренного случая. Другими словами, выражение (18) не имеет классической интерпретации, поскольку выходные порты светоделителя не содержат состояний, аналогичных входным, а добавленные фотоны выходят только парами. Далее можно провести вычисления, аналогичные первому случаю, и получить

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{(1+|\beta+i\alpha|^2)(1+|\alpha+i\beta|^2)}{(1+|\alpha|^2)^2(1+|\beta|^2)^2}}. \quad (19)$$

Аналогично предыдущей задаче максимальная запутанность будет при $\frac{(1+|\beta+i\alpha|^2)(1+|\alpha+i\beta|^2)}{(1+|\alpha|^2)^2(1+|\beta|^2)^2} = 1$. При этом возникает интересный случай, когда $\beta = 0$ или $\alpha = 0$, который соответствует максимальному запутыванию, когда в первой или второй моде в состоянии Фока находится 1 фотон, а в другой моде один фотон добавлен к когерентному состоянию. В итое парметр Шмидта при $n = 1, m = 1$ и $R = 1/2$ будет

$$K = \left(1-\frac{(1+|\beta+i\alpha|^2)(1+|\alpha+i\beta|^2)}{2(1+|\alpha|^2)^2(1+|\beta|^2)^2}\right)^{-1}. \quad (20)$$

Ниже представлены результаты расчетов для двухкубитных систем, см. рис. 2. На рисунках 2 параметры α и β выбраны действительные, хотя рисунок будет аналогичный рис. 2a и для любых β, если $\beta \to |\beta| \geq 1$. Из рисунка 2a видно, что квантовая запутанность появляется в ограниченной области $\beta \lesssim 1$ и $R \in (0,1)$. В случае рис. 2b область не ограничена и максимальная при $\beta = 0$ или $\alpha = 0$. Добавим, что в случае $n = 0$, $m = 1$ при $\beta = 0$ параметр Шмидта $K = (1-2R(1-R))^{-1}$ и совпадает с хорошо известным случаем для состояний Фока [31]. Также в этом случае квантовая запутанность достигает своего максимально возможного значения $K_{\max} = 2$ для состояний Фока, которая, как хорошо известно, для таких состояний $K_{\max} = 1 + n + m$. В случае $n = 1, m = 1$ максимально возможная запутанность $K_{\max} = 3$, но, следуя выражению (20), максимальная запутанность $K_{\max} = 2$, т.е. меньше, что

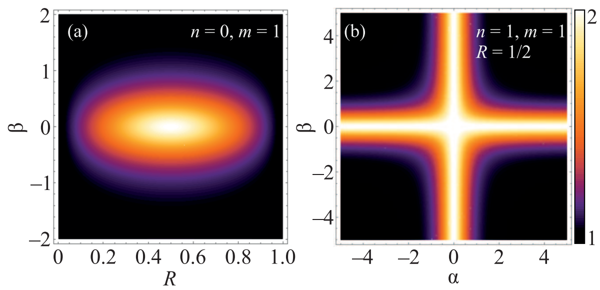

Рис. 2. (Цветной онлайн) Результаты расчетов квантовой запутанности: (a) – в случае $n = 0, m = 1$ в зависимости от двух основных параметров R и β; (b) – в случае $n = 1, m = 1, R = 1/2$ в зависимости от двух основных параметров α и β

говорит о недостижении максимально возможной запутанности при $R = 1/2$. Действительно, максимально возможная запутанность для состояний Фока при $n = 1$, $m = 1$ достигается при $R = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, см., например, [31] и равна $K_{\max} = 3$, а при $R = 1/2$ она совпадает с полученным здесь значением $K = 2$.

4. Заключение. Таким образом, в этой работе была впервые изучена квантовая запутанность добавленных когерентных состояний при их прохождении через светоделитель. Полученные результаты основаны на простом разложении волновой функции $|\psi_{\rm out}\rangle$ на выходных портах, см. выражение (11). Показано, на основании этого разложения, что итоговая волновые функция $|\psi_{out}\rangle$ – это суперпозиция добавленных когерентных состояний, где количество таких состояний определяется числом добавленных фотонов $n + m$. Поскольку на выходе получаемая волновая функция $|\psi_{\rm out}\rangle$ состоит из суперпозиции не ортогональных состояний PACS, то для поиска квантовой запутанности необходимо систему привести к ортогональному базису и разложить на моды Шмидта. В общем случае эта задача не решаемая, но для частных случаев это можно сделать. В этой работе были рассмотрены такие частные случаи для двухбитных систем, получаемых на выходных портах светоделителя. Показано, что квантовая запутанность зависит как от числа добавленных фотонов, так и от характеристик α и β и может достигать своего максимального значения. Добавим, что представленная здесь теория может быть развита и на двухкутриные системы, поскольку методы диагонализации таких неортогональных состояний PACS известны [25].

Финансирование работы. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда # 20-72-10151 и частично госзадания # FSRU-2024-0005.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

---

1. L. Pezze, A. Smerzi, M. K. Oberthaler, R. Schmied, and P. Treutlein, Rev. Mod. Phys. **90**, 035005 (2018).
2. N. C. Harris, G. R. Steinbrecher, M. Prabhu, Y. Lahini, J. Mower, D. Bunandar, C. Chen, Franco N. C. Wong, T. Baehr-Jones, M. Hochberg, S. Lloyd, and D. Englund, Nature Photon. **11**, 447 (2017).
3. E. Knill, R. Laflamme, and G. J. Milburn, Nature **409**, 46 (2001).
4. P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling, and G. J. Milburn, Rev. Mod. Phys. **79**, 135 (2007).
5. S.-H. Tan and P. P. Rohde, Reviews in Physics **4**, 100030 (2019).
6. F. Bouchard, A. Sit, Y. Zhang, R. Fickler, F. M. Miatto, Y. Yao, F. Sciarrino, and E. Karimi, Rep. Prog. Phys. **84**(1), 012402 (2021).
7. C. Weedbrook, S. Pirandola, R. Garcia-Patron, N. J. Cerf, T. C. Ralph, J. H. Shapiro, and S. Lloyd, Rev. Mod. Phys. **84**, 621 (2012).
8. B. C. Sanders, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **45**, 244002 (2012).
9. H. Jeong, A. Zavatta, M. Kang, Seung-Woo Lee, L. S. Costanzo, S. Grandi, T. C. Ralph, and M. Bellini, Nature Photon. **8**, 564 (2014).
10. M. S. Kim, W. Son, V. Buzek, and P. L. Knight, Phys. Rev. A **65**, 032323 (2002).
11. C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel., Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).
12. J. W. Pan, Z. B. Chen, C. Y. Lu, H. Weinfurter, A. Zeilinger, and M. Zukowski, Rev. Mod. Phys. **84**, 777 (2012).
13. N. Sangouard, C. Simon, H. de Riedmatten, and N. Gisin, Rev. Mod. Phys. **83**, 33 (2011).
14. D. N. Makarov, Opt. Lett. **45**, (2020).
15. D. N. Makarov, Sci. Rep. **11**, 5014 (2021).
16. D. N. Makarov, E. S. Gusarevich, A. A. Goshev, K. A. Makarova, S. N. Kapustin, A. A. Kharlamova, and Yu. V. Tsykareva, Sci. Rep. **11**, 10274 (2021).
17. D. N. Makarov, Mathematics **10**, 4794 (2022).
18. R. A. Campos, Bahaa E. A. Saleh, and Malvin C. Teich, Phys. Rev. A **40**, 1371 (1989).
19. J. T. Francis and M. S. Tame, Phys. Rev. A **102**, 043709 (2020).
20. J. Fadrny, M. Neset, M. Bielak, M. Jezek, J. Bilek, and J. Fiurasek, npj Quantum Inf. **10**, 89 (2024).
21. G. S. Agarwal and K. Tara, Phys. Rev. A **43**, 492 (1991).
22. S. M. Barnett, G. Ferenczi, C. R. Gilson, and F. C. Speirits, Phys. Rev. A **98**, 013809 (2018).
23. R. Schnabel, Phys. Rep. **684**, 1 (2017).

24. M. S. Kim, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **41**, 133001 (2008).
25. Y. Maleki and A. M. Zheltikov, Opt. Express **27**, 8291 (2019).
26. F. A. Dominguez-Serna, F. J. Mendieta-Jimenez, and F. Rojas., Quantum Inf. Process, **15**, 3121 (2016).
27. X. Wang, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 165 (2002).
28. M. Holland and K. Burnett, Phys. Rev. Lett. **71**, 1355 (1993).
29. A. Mann, B. C. Sanders, and W. J. Munro, Phys. Rev. A **51**, 989 (1995).
30. A. Ekert and P. L. Knight, Amer. J. Phys. **63**, 415 (1995).
31. D. N. Makarov, Phys. Rev. E **102**(5), 052213 (2020).