Письма в ЖЭТФ, том 121, вып. 12, с. 964 – 969 © 2025 г. 25 июня

Классические интегрируемые спиновые цепочки типа Ландау–Лифшица, полученные из R-матричных тождеств

Д. А. Доманевский[+1)], *А. В. Зотов*[*1)]

[+]*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

[*]*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 119991 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 14 мая 2025 г.
После переработки 21 мая 2025 г.
Принята к публикации 22 мая 2025 г.

В статье описано семейство 1+1-мерных классических интегрируемых пространственно-дискретных моделей типа Ландау–Лифшица, используя анзац для U–V пары (Лакса) со спектральным параметром, удовлетворяющей полудискретному уравнению Захарова–Шабата. Анзац для U–V пары основан на R-матрицах, удовлетворяющих ассоциативному уравнению Янга–Бакстера и некоторым дополнительным свойствам. Уравнения движения получены с использованием набора R-матричных тождеств. В непрерывном пределе воспроизводится полученное ранее семейство уравнений Ландау-Лифшица старшего ранга.

DOI: 10.31857/S0370274X25060173, EDN: HXPMIN

Введение. Интегрируемые волчки Эйлера-Арнольда это интегрируемые модели, которые описываются следующими уравнениями движения:

$$\dot{S} = [S, J(S)], \tag{1}$$

где $S \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})$ – это матрица, чьи элементы S_{ij} являются динамическими переменными, а $J(S)$ – некоторое линейное отображение, заданное как $J(S) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} E_{ij} J_{ij,kl} S_{kl}$ с некоторыми константами $J_{ij,kl}$ и стандартными матричными единицами E_{ij}: $(E_{ij})_{ab} = \delta_{ia}\delta_{jb}$. С точки зрения классической механики $J(S)$ является обратным тензором инерции.

Большое семейство таких моделей было описано в [1–3] с использованием квантовых R-матриц специального класса. По определению, квантовые (нединамические) R-матрицы – решения квантового уравнения Янга–Бакстера:

$$\begin{gathered} R^{\hbar}_{12}(z_1 - z_2) R^{\hbar}_{13}(z_1 - z_3) R^{\hbar}_{23}(z_2 - z_3) = \\ R^{\hbar}_{23}(z_2 - z_3) R^{\hbar}_{13}(z_1 - z_3) R^{\hbar}_{12}(z_1 - z_2)\,, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, а z_1, z_2, z_3 – спектральные параметры. Подразумевается, что $R^{\hbar}_{12}(z)$ есть $\mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})^{\otimes 2}$-значная функция от переменных z и $\hbar$, и $R^{\hbar}_{ij}(z)$ в (2) действует нетривиально только на i-ю и j-ю компоненты тензорного произведения векторных пространств $\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N$. Здесь используются стандартные тензорные обозначения из [4–7]. В настоящей работе рассматривается специальный класс R-матриц, удовлетворяющих не только уравнению (2), но также[2)] и так называемому ассоциативному уравнению Янга–Бакстера [8, 9]:

$$\begin{gathered} R^{\hbar}_{12}(z_{12}) R^{\eta}_{23}(z_{23}) = R^{\eta}_{13}(z_{13}) R^{\hbar-\eta}_{12}(z_{12}) + \\ + R^{\eta-\hbar}_{23}(z_{23}) R^{\hbar}_{13}(z_{13}), \quad z_{ab} = z_a - z_b. \end{gathered} \tag{3}$$

При этом рассматриваются не все решения уравнения (3), а такие, которые удовлетворяют дополнительным условиям, описанным ниже. В частности, предполагается, что R-матрица, удовлетворяющая (3), обладает квазиклассическим разложением вида

$$\begin{gathered} R^{\hbar}_{12}(z) = \frac{1}{\hbar}\, 1_N \otimes 1_N + r_{12}(z) + \hbar\, m_{12}(z) + \\ + O(\hbar^2) \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})^{\otimes 2}, \end{gathered} \tag{4}$$

где 1_N – единичная $N \times N$ матрица, $r_{12}(z)$ – классическая r-матрица, а следующий коэффициент $m_{12}(z)$ задает явное выражение для обратного тензора инерции в отображении $J(S)$ уравнения (1) классической гамильтоновой механики:

$$J(S) = \mathrm{tr}_2(m_{12}(0) S_2), \quad S_2 = 1_N \otimes S, \tag{5}$$

1) e-mail: danildom09@gmail.com; zotov@mi-ras.ru

2) Два уравнения Янга–Бакстера (2) и (3) обладают различными, но пересекающимися множествами решений. В данной работе накладываются дополнительные ограничения на решения уравнения (3), обеспечивающие их принадлежность и множеству решений уравнения (2). Именно поэтому мы говорим о подмножестве решений уравнения (2), удовлетворяющих одновременно и уравнению (3).

где tr_2 обозначает след по второй тензорной компоненте. Волчок с $J(S)$ (5) допускает обобщение на "релятивистский" случай [1, 2, 10] посредством деформированного линейного отображения $J^\eta(S)$. Эта деформация аналогична тому, как модель Руйсенаарса–Шнайдера обобщает систему Калоджеро–Мозера. Параметр деформации η играет роль постоянной Планка в соответствующей R-матрице $R^\eta_{12}(z)$. Обзор интегрируемых систем данного типа, включая возможные обобщения и приложения, можно найти в работах [10–13].

Обобщение интегрируемого волчка (1) на случай 1+1-мерной интегрируемой теории поля может быть выполнено различными способами. В настоящей статье используются два подхода. Первый подход является наиболее фундаментальным и широко известным [4–7, 14]. Он основан на классической квадратичной r-матричной структуре Склянина, порождающей интегрируемые спиновые цепочки. В непрерывном пределе возникает теория поля типа Ландау–Лифшица [15]. Второй подход связан со специальным анзацем для U-V пар в уравнении Захарова–Шабата (уравнении нулевой кривизны)

$$\begin{gathered}\partial_t U(z) - \partial_x V(z) + [U(z), V(z)] = 0,\\ U(z), V(z) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C}).\end{gathered} \tag{6}$$

Этот подход объединяет двумерное обобщение систем Хитчина [16–18] с конструкцией, основанной на ассоциативном уравнении Янга–Бакстера [19, 20]. В частности, в работе [19] было показано, что интегрируемый волчок (1) с отображением $J(S)$ (5) допускает обобщение на 1+1-мерную теорию поля типа Ландау–Лифшица с уравнениями движения

$$\partial_t S = \frac{1}{c}\,[S, \partial_x^2 S] + \frac{2c}{N}\,[S, J(S)] - 2[S, E^0(\partial_x S)], \tag{7}$$

где $S = S(t,x) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ – матрица[3] динамических полевых переменных, c – некоторая константа, а E^0 – еще одно линейное отображение. Его точное определение будет дано ниже. Стоит отметить, что в случае $N = 2$ это отображение обращается в ноль, что приводит к стандартному уравнению Ландау–Лифшица [15, 14] для вектора $\vec{S}(t,x) = (S_1, S_2, S_3)$, компоненты которого есть компоненты бесследовой части матрицы S в базисе матриц Паули. Последние результаты по полевым обобщениям конечномерных интегрируемых систем можно найти в работах [19–23].

Цель работы – заполнить правый нижний угол в следующей таблице:

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\text{Интегрируемый волчок}} & \xleftarrow{\text{Нерелятивистский предел}} & \underline{\text{Релятивистский интегрируемый волчок}}\\
\downarrow \text{Двумерная версия} & & \downarrow \text{Двумерная версия}\\
\underline{\text{Модель Ландау–Лифшица}} & \xleftarrow{\text{Непрерывный предел}} & \underline{\text{Пространственно-дискретная модель Ландау–Лифшица}}
\end{array} \tag{8}$$

Таким образом, описывается дискретная версия уравнения Ландау–Лифшица старшего ранга (7) из работы [19]. С этой целью используется стандартная конструкция классических спиновых цепочек [4–7], объединенная с описанием релятивистского волчка посредством R-матриц [1, 10]. На самом деле этот метод был применен в [21] при описании эллиптической спиновой цепочки указанного типа. В настоящей работе формулируется аналогичный результат для произвольной R-матрицы, удовлетворяющей (3) и некоторым дополнительным условиям. В частности, наша конструкция применима для GL_N-значной эллиптической R-матрицы Бакстера–Белавина и ее всевозможных тригонометрических и рациональных вырождений, включая 7-вершинные тригонометрические и 11-вершинные рациональные R-матрицы. Такие R-матрицы исследовались в [10, 24–26]. Далее показано, что полученные уравнения воспроизводят (7) в непрерывном пределе. Стоит упомянуть работу [27], в которой была описана полностью дискретная версия эллиптической модели Ландау–Лифшица. С точки зрения нашего подхода она скорее отвечает полностью дискретной версии модели Руйсенаарса–Шнайдера, см. [21]. Различные типы дискретизаций солитонных уравнений типа Ландау-Лифшица также рассматривались в [28–30].

[3] Уравнения движения вида (7) возникают в частном случае, когда матрица S имеет ранг один, см. (26) ниже и комментарий после него.

Интегрируемые волчки, полученные из $\boldsymbol{R}$-матричных тождеств. Начнем с краткого описания интегрируемых волчков, основанного на $\boldsymbol{R}$-матричных тождествах [1, 3, 10–13].

Свойства R-матриц. Сначала сформулируем упомянутые выше дополнительные свойства R-матриц. Помимо ассоциативного уравнения Янга–Бакстера (3), рассматриваемые R-матрицы удовлетворяют условию кососимметричности[4)]

$$R_{12}^{\hbar}(z) = -R_{21}^{-\hbar}(-z) = -P_{12}R_{12}^{-\hbar}(-z)P_{12} \qquad (9)$$

и унитарности

$$R_{12}^{\hbar}(z)R_{21}^{\hbar}(-z) = \phi(\hbar,z)\phi(\hbar,-z)\ 1_N \otimes 1_N, \qquad (10)$$

где $\phi(\hbar,z)$ – скалярное решение уравнения (3), заданное функцией Кронекера

$$\phi(\hbar,z) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(\hbar+z)}{\vartheta(\hbar)\vartheta(z)} \overset{\text{trig. limit}}{\longrightarrow} \frac{\sin(\pi(\hbar+z))}{\sin(\pi\hbar)\sin(\pi z)} \overset{\text{rat. limit}}{\longrightarrow} \frac{\hbar+z}{\hbar z} \qquad (11)$$

для эллиптической, тригонометрической или рациональной R-матрицы соответственно. R-матрицы обладают только простыми полюсами при $\hbar = 0$ и $z = 0$ с вычетами

$$\operatorname*{res}_{\hbar=0} R_{12}^{\hbar}(z) = 1_N \otimes 1_N = 1_{N^2}, \quad \operatorname*{res}_{z=0} R_{12}^{\hbar}(z) = P_{12}. \quad (12)$$

Локальное поведение в окрестности $\hbar = 0$ описывается квазиклассическим пределом (4), а в окрестности $z = 0$ имеет место разложение

$$R_{12}^{\hbar}(z) = \frac{1}{z}\,P_{12} + R_{12}^{\hbar,(0)} + zR_{12}^{\hbar,(1)} + O(z^2), \qquad (13)$$

$$R_{12}^{\hbar,(0)} = \frac{1}{\hbar}\,1_N \otimes 1_N + r_{12}^{(0)} + \hbar\, m_{12}(0) + O(\hbar^2),$$
$$r_{12}(z) = \frac{1}{z}\,P_{12} + r_{12}^{(0)} + zr_{12}^{(1)} + O(z^2). \qquad (14)$$

Из условия кососимметричности (9) следует, что

$$r_{12}(z) = -r_{21}(-z), \quad m_{12}(z) = m_{21}(-z),$$
$$R_{12}^{\hbar,(0)} = -R_{21}^{-\hbar,(0)}, \quad r_{12}^{(0)} = -r_{21}^{(0)}. \qquad (15)$$

Если выполняется условие Фурье-симметрии $R_{12}^{\hbar}(z)P_{12} = R_{12}^{z}(\hbar)$, то также справедливо:

$$R_{12}^{z,(0)} = r_{12}(z)P_{12}, \quad R_{12}^{z,(1)} = m_{12}(z)P_{12},$$
$$r_{12}^{(1)} = m_{12}(0)P_{12}, \quad r_{12}^{(0)} = r_{12}^{(0)}P_{12}. \qquad (16)$$

4) P_{12} – оператор матричной перестановки. Для любой пары матриц $A, B \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})$: $(A\otimes B)P_{12} = P_{12}(B\otimes A)$.

Далее используется следующий вырожденный случай соотношения (3), который также применялся в работах [10–13]:

$$R_{13}^{\eta}(z)r_{12}(z) = R_{12}^{\eta}(z)R_{23}^{\eta,(0)} - r_{23}^{(0)}R_{13}^{\eta}(z) - - P_{23}\partial_z R_{13}^{\eta}(z) + \partial_\eta R_{13}^{\eta}(z), \qquad (17)$$

$$r_{12}(z)R_{13}^{\eta}(z) = R_{23}^{\eta,(0)}R_{12}^{\eta}(z) - R_{13}^{\eta}(z)r_{23}^{(0)} - - \partial_z R_{13}^{\eta}(z)P_{23} + \partial_\eta R_{13}^{\eta}(z). \qquad (18)$$

Пары Лакса. В конечномерной механике интегрируемость системы следует из уравнения Лакса

$$\dot{L}(z) = [L(z), M(z)], \quad L(z), M(z) \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C}). \quad (19)$$

Пара Лакса для уравнения (1), описывающего нерелятивистский волчок с отображением $J(S)$ (5), выражается через коэффициенты разложения (4):

$$L(z,S) = \mathrm{tr}_2(r_{12}(z)S_2) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} r_{ij,kl}(z)S_{lk}E_{ij},$$
$$M(z,S) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} m_{ij,kl}(z)S_{lk}E_{ij}, \qquad (20)$$

где явные выражения записываются через классическую r-матрицу $r_{12}(z) = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} r_{ij,kl}(z)E_{ij}\otimes E_{kl}$ и аналогичным образом для $m_{12}(z)$. В случае релятивистского волчка уравнения движения сохраняют форму (1), но содержат η-деформированный обратный тензор инерции $J^{\eta}(S)$:

$$J^{\eta}(S) = \mathrm{tr}_2\Big(\Big(R_{12}^{\eta,(0)} - r_{12}^{(0)}\Big)S_2\Big) \overset{(14)}{=} \overset{(14)}{=} \frac{\mathrm{tr}(S)}{\eta}\,1_N + \eta\,\mathrm{tr}_2\Big(m_{12}(0)S_2\Big) + O(\eta^2). \qquad (21)$$

Это выражение пишется через величины $R_{12}^{\eta,(0)}$ из (13) и $r_{12}^{(0)}$ из (14). Соответствующая пара Лакса в этом случае имеет вид:

$$\mathcal{L}(z,S) = \mathrm{tr}_2(R_{12}^{\eta}(z)S_2),$$
$$\mathcal{M}(z,S) = -\mathrm{tr}_2(r_{12}(z)S_2). \qquad (22)$$

Интересно отметить, что в нерелятивистском пределе роли матриц L и M меняются местами. Действительно, при $\eta \to 0$ получаем: $\mathcal{L}(z,S) = \eta^{-1}\mathrm{tr}(S)1_N + L(z,S) + \eta M(z,S) + O(\eta^2)$, тогда как $\mathcal{M}(z,S) = -L(z,S)$.

Уравнения Ландау–Лифшица старшего ранга, полученные из $\boldsymbol{R}$-матриц. В случае теории поля динамические переменные становятся полями $S = S(t,x)$. Для определенности предположим периодические граничные условия, т.е. пространственная переменная x является координатой на единичной окружности, причем $S(t,x+2\pi) = S(t,x)$. В соответствии с общей схемой построения 1+1-мерных полевых обобщений конечномерных интегрируемых систем [16–18] матрица U в уравнении Захарова–Шабата (6) сохраняет ту же форму, что и в конечномерном случае (это справедливо для рассматриваемых моделей типа волчков):

$$U(z,S) = \mathrm{tr}_2(r_{12}(z)S_2). \tag{23}$$

Матрица V имеет более сложную структуру (подробности см. в [19]). В результате получаем уравнение (7) с отображением $J(S)$ из (5) и линейным отображением E^0, определяемым следующим образом:

$$E^0(B) = \mathrm{tr}_2\Big(r_{12}^{(0)} B_2\Big), \quad \forall B \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C}). \tag{24}$$

Константа c в (7) имеет следующий смысл. В конечномерном случае матрица S в (1) является произвольной. В теории поля построение U-V пар для (6) требует дополнительного ограничения:

$$S^2 = cS, \tag{25}$$

что означает, что собственные значения матрицы S равны либо c, либо 0. Соответствующие уравнения движения были получены в [19]. Эти уравнения упрощаются до (7) в частном случае, когда имеется единственное собственное значение, равное c (а остальные равны нулю). Данный случай отвечает матрице ранга один:

$$S = \xi \otimes \psi, \quad (\psi,\xi) = c, \tag{26}$$

где ξ – N-мерный вектор-столбец, а ψ – N-мерный вектор-строка, и (ψ,ξ) обозначает их скалярное произведение. В действительности, интегрируемость модели (23) сохраняется для произвольной матрицы S, поскольку классическая r-матричная структура не зависит от собственных значений S, а существование r-матричной структуры гарантирует пуассонову коммутативность следов степеней матриц монодромии. Однако для получения явных уравнений движения и явного вида V-матрицы необходимо рассматривать специальные матрицы вида (25) или (26). В дальнейшем будет рассматриваться случай (26), т.е. $S_{ij} = \xi_i\psi_j$.

Пространственно-дискретные уравнения Ландау–Лифшица.

Спиновая цепочка. При построении периодической цепочки мы следуем работам [4–7], используя релятивистский волчок (22) в качестве базового элемента. Как было показано в [10], матрица $\mathcal{L}(z,S)$ удовлетворяет квадратичной классической r-матричной структуре

$$\{\mathcal{L}_1^\eta(z,S), \mathcal{L}_2^\eta(w,S)\} = [\mathcal{L}_1^\eta(z,S)\mathcal{L}_2^\eta(w,S), r_{12}(z-w)], \tag{27}$$

которая порождает скобки Пуассона типа Склянина:

$$\begin{gathered}\{S_1,S_2\} = [S_1S_2, r_{12}^{(0)}] + [E^\eta(S)_1 S_2, P_{12}],\\ E^\eta(S) = \mathrm{tr}_3(R_{13}^{\eta,(0)} S_3).\end{gathered} \tag{28}$$

Рассмотрим систему из n узлов на единичной окружности, где каждому узлу сопоставлена динамическая матрица ранга один (26) вида $S^k = \xi^k \otimes \psi^k$, $k = 1,..,n$. Пусть скобки Пуассона на каждом узле заданы соотношением (28), причем $\{S_1^k, S_2^j\} = 0$ для $k \neq j$. Тогда матрица монодромии $T(z) = \mathcal{L}(z,S^1)\mathcal{L}(z,S^2)...\mathcal{L}(z,S^n)$ также удовлетворяет (27), что обеспечивает интегрируемость системы, так как из (27) записанной на $T(z)$ следует $\{\mathrm{tr}(T(z)), \mathrm{tr}(T(w))\} = 0$. Подробности данной конструкции для эллиптического случая приведены в работе [21].

Основным результатом является следующее утверждение. Введем обозначения

$$\begin{gathered}L^k(z) = \mathcal{L}(z,S^k) = \mathrm{tr}_2\Big(R_{12}^\eta(z)S_2^k\Big),\\ M^k(z) = -\mathrm{tr}_2\Big(r_{12}(z)S_2^{k+1,k}\Big),\\ S^{k+1,k} = \frac{\xi^{k+1}\otimes\psi^k}{(\psi^k,\xi^{k+1})}.\end{gathered} \tag{29}$$

Тогда дискретное уравнение Захарова–Шабата

$$\dot{L}^k(z) - L^k(z)M^k(z) + M^{k-1}(z)L^k(z) = 0 \tag{30}$$

выполняется тождественно по z и приводит к следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned}\dot{S}^k = {}& E^0(S^{k,k-1})S^k - S^kE^0(S^{k+1,k}) +\\ &+ S^{k,k-1}E^\eta(S^k) - E^\eta(S^k)S^{k+1,k},\end{aligned} \tag{31}$$

где сохраняются обозначения E^0 из (24) и E^η из (28). Доказательство проводится непосредственным вычислением. Например, для члена $L^k(z)M^k(z)$ имеем:

$$L^k(z)M^k(z) = \mathrm{tr}_{2,3}\Big(R_{12}^\eta(z)r_{13}(z)S_2^kS_3^{k+1,k}\Big). \tag{32}$$

Далее следует использовать R-матричное тождество (17). Аналогично, $M^{k-1}(z)L^k(z)$ выражается через (18). Важно также учитывать соотношения (25) и (26), из которых следует $S^kS^{k+1,k} = S^{k,k-1}S^k = S^k$ и

$\mathrm{tr}(S^{k+1,k}) = \mathrm{tr}(S^{k,k-1}) = N$. Таким образом получим вышеобозначенное утверждение[5)].

1+1 теория поля. Полевой аналог уравнений (31) получается непосредственным обобщением. В полевом случае матрицы $L^k(z)$, $M^k(z)$ заменяются на $U(z,x)$ и $V(z,x)$, а матрица $M^{k-1}(z)$ переходит в $V(z,x-\eta)$. Тогда уравнение (30) принимает форму полудискретного уравнения Захарова–Шабата:

$$\dot{U}(z,x) - U(z,x)V(z,x) + V(z,x-\eta)U(z,x) = 0. \quad (33)$$

Из приведенного выше утверждения следует, что (33) выполняется тождественно по z для U-V пары (29), которая в полевом случае записывается как:

$$U(z,x) = \mathrm{tr}_2\Big(R^{\eta}_{12}(z)S_2(x)\Big),$$
$$V(z,x) = -\frac{\mathrm{tr}_2\Big(r_{12}(z)\Big(\xi(x+\eta)\otimes\psi(x)\Big)_2\Big)}{(\psi(x),\xi(x+\eta))}, \quad (34)$$

где $S(x) = \xi(x)\otimes\psi(x)$, причем $(\psi(x),\xi(x)) = \mathrm{tr}(S(x)) = c$. Соответствующие уравнения получаются из (31) заменой: $\xi^k \to \xi(x)$, $\psi^k \to \psi(x)$ and $\xi^{k\pm1} \to \xi(x\pm\eta)$, $\psi^{k\pm1} \to \psi(x\pm\eta)$.

Непрерывный предел. Покажем, что определенная выше дискретная модель воспроизводит уравнение Ландау–Лифшица (7) в непрерывном пределе $\eta \to 0$. Используя разложения (4), (13), (14) и ряд Тейлора $\xi(x\pm\eta) = \xi(x) \pm \eta\partial_x\xi(x) + \frac{1}{2}\eta^2\partial_x^2\xi(x) + O(\eta^3)$ для правой части уравнений движения (31), получаем:

$$-S_x + \frac{\eta}{2c}\Big([S,S_{xx}] + 2[S,J(S)] + 2[S,E^0(S_x)]\Big) + O(\eta^2). \quad (35)$$

Например, выражение $[S,E^0(S_x)]$ возникает следующим образом:

$$\begin{aligned}[S,E^0(S_x)] &= (\xi\otimes\psi)\mathrm{tr}_2(r^{(0)}_{12}(\xi_x\otimes\psi)_2) + \\ &+ (\xi\otimes\psi)\mathrm{tr}_2(r^{(0)}_{12}(\xi\otimes\psi_x)_2) - \\ &- \mathrm{tr}_2(r^{(0)}_{12}(\xi_x\otimes\psi)_2)(\xi\otimes\psi) - \mathrm{tr}_2(r^{(0)}_{12}(\xi\otimes\psi_x)_2)(\xi\otimes\psi).\end{aligned} \quad (36)$$

Для доказательства необходимо также использовать (16) и набор тождеств (см. [19, 20])

$$\begin{aligned}&(\xi\otimes\psi)\mathrm{tr}_2(r^{(0)}_{12}(\xi\otimes\psi)_2) = 0 = (\xi\otimes\psi)\mathrm{tr}_2(r^{(0)}_{12}(\xi_x\otimes\psi)_2),\\ &\mathrm{tr}_2(r^{(0)}_{12}(\xi\otimes\psi)_2)(\xi_x\otimes\psi) = \mathrm{tr}_2(r^{(0)}_{12}(\xi_x\otimes\psi)_2)(\xi\otimes\psi),\\ &(\xi\otimes\psi_x)\mathrm{tr}_2(r^{0}_{12}(\xi\otimes\psi)_2) = -(\xi\otimes\psi)\mathrm{tr}_2(r^{(0)}_{12}(\xi\otimes\psi_x)).\end{aligned} \quad (37)$$

[5)] После вычислений получается выражение вида $\mathrm{tr}_2(R^{\eta}_{12}(z)(*)_2) = 0$, где $*$ представляет собой левую часть (31) минус правую часть (31). Чтобы доказать $* = 0$, следует вычислить $\operatorname*{res}_{z=0}\mathrm{tr}_2(R^{\eta}_{12}(z)(*)_2) = \mathrm{tr}_2(P_{12}(*)_2) = * = 0$.

Выражение (35) означает, что получилась линейная комбинация различных потоков в непрерывной модели. Представив $\dot{S}$ в левой части (31) в виде $\partial_{t_1}S + \eta\partial_{t_2}S + O(\eta^2)$, находим $\partial_{t_1}S = -\partial_x S$ и

$$\partial_{t_2}S = \frac{1}{2c}\Big(2[S,J(S)] + [S,S_{xx}] + 2[S,E^0(S_x)]\Big), \quad (38)$$

что с точностью до простых переопределений (а именно, $t_2 \to 2c^2t_2$, $x \to -cx$ и $J(S) \to NJ(S)$) воспроизводит модель Ландау-Лифшица (7) из работы [19].

Финансирование работы. Исследование А. В. Зотова выполнено в Математическом центре мирового уровня “Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук” (МЦМУ МИАН) при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение # 075-15-2025-303). Работа Д. А. Доманевского выполнена при поддержке Фондом развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. Levin, M. Olshanetsky, and A. Zotov, JHEP **07**, 012 (2014); arXiv:1405.7523 [hep-th].
2. A. Levin, M. Olshanetsky, and A. Zotov, Nucl. Phys. B 887, 400 (2014); arXiv:1406.2995 [math-ph].
3. A. Levin, M. Olshanetsky, and A. Zotov, J. Phys. A: Math. Theor. **49**(39), 395202 (2016); arXiv:1603.06101 [math-ph].
4. E. K. Sklyanin, Funct. Anal. Appl. **16**, 263 (1982).
5. E. K. Sklyanin, Funct. Anal. Appl. **17**, 273 (1983).
6. E. K. Sklyanin, Zap. Nauchn. Sem. LOMI **150**, 154 (1986).
7. L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer-Verlag, Berlin, N.Y. (1987).
8. S. Fomin and A.N. Kirillov, in *Advances in Geometry. Progress, in Mathematics*, Springer Science+Business Media, N.Y. (1999), v. 172, p. 147.
9. A. Polishchuk, Adv. Math. **168**(1), 56 (2002).
10. T. Krasnov and A. Zotov, Ann. Henri Poincaré **20**(8), 2671 (2019); arXiv:1812.04209 [math-ph].
11. A. Grekov, I. Sechin, and A. Zotov, JHEP **10**, 081 (2019); arXiv:1905.07820 [math-ph].
12. E. S. Trunina and A. V. Zotov, Theoret. Math. Phys. **209**(1), 1330 (2021); arXiv:2104.08982 [math-ph].
13. E. Trunina and A. Zotov, J. Phys. A **55**(39), 395202 (2022); arXiv:2204.06137 [nlin.SI].
14. E. K. Sklyanin, Preprint LOMI, E-3-79, Leningrad (1979).
15. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Phys. Zs. Sowjet. **8**, 153 (1935).

16. A. Levin, M. Olshanetsky, and A. Zotov, Commun. Math. Phys. **236**, 93 (2003); arXiv:nlin/0110045.
17. A. V. Zotov, SIGMA **7**, 067 (2011); arXiv:1012.1072 [math-ph].
18. A. Levin, M. Olshanetsky, and A. Zotov, Eur. Phys. J. C **82**, 635 (2022); arXiv:2202.10106 [hep-th].
19. K. Atalikov and A. Zotov, JETP Lett. **115**, 757 (2022); arXiv:2204.12576 [math-ph].
20. D. Domanevsky, A. Levin, M. Olshanetsky, and A. Zotov, Izvestiya: Mathematics **1** (2025), to be published; arXiv:2501.08777 [math-ph].
21. A. Zabrodin and A. Zotov, JHEP **07**, 023 (2022); arXiv: 2107.01697 [math-ph].
22. A. Zotov, J. Phys. A **57**, 315201 (2024); arXiv:2404.01898 [hep-th].
23. A. Zotov, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **59**(2), 46 (2025); arXiv:2407.13854 [nlin.SI].
24. I. V. Cherednik, Theoret. Math. Phys. **43**(1), 356 (1980).
25. A. Antonov, K. Hasegawa, and A. Zabrodin, Nucl. Phys. B **503**, 747 (1997); hep-th/9704074.
26. K. R. Atalikov and A. V. Zotov, Theor. Math. Phys. **216**(2), 1083 (2023); arXiv:2303.02391 [math-ph].
27. N. Delice, F. W. Nijhoff, and S. Yoo-Kong, J. Phys. A **48**, 035206 (2015); arXiv:1405.3927 [nlin.SI].
28. V. E. Adler, Theoret. and Math. Phys. **124**(1), 897 (2000).
29. I. Z. Golubchik and V. V. Sokolov, Theor. Math. Phys. **124**(1), 909 (2000).
30. V. G. Marikhin and A. B. Shabat, Theoret. Math. Phys. **118**(2), 173 (1999).