Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 1, с. 25 – 35

Эффекты штарковского взаимодействия в динамике атомной системы в широкополосном сжатом электромагнитном поле

А. И. Трубилко[+1)], *А. М. Башаров*[*1)]

[+]*Санкт-Петербургский университет государственной противопожарной службы МЧС России, 196105 С.-Петербург, Россия*

[*]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 29 апреля 2025 г.
После переработки 20 мая 2025 г.
Принята к публикации 22 мая 2025 г.

Рассмотрены эффекты проявления штарковского взаимодействия в коллективном излучении ансамбля атомов в поле широкополосного электромагнитного поля в квантовом сжатом состоянии. Показано, что при учете условий формирования сжатого поля, описание динамики атомов удается дать в терминах квантовых случайных процессов – порождающего, уничтожающего и считающего. Последний и представляет штарковское взаимодействие атомов и поля и проявляется в форме импульса триггерного сверхизлучения, порожденном ансамблем одинаковых возбужденных атомов квантованным резонансным сжатым электромагнитным полем. Описание проведено на основе полученного кинетического уравнения для открытой локализованной квантовой системы в широкополосном сжатом квантованном электромагнитном поле. Полученное уравнение отличается от известных, но согласуется с ними в частных и предельных случаях.

DOI: 10.31857/S0370274X25070049, EDN: VLEDPD

1. Введение. Высокочастотный динамический штарк-эффект – эффект второго порядка по взаимодействию квантовой системы с внешней электромагнитной волной – состоит в сдвиге энергетических уровней квантовой частицы на величину, пропорциональную интенсивности поля. Эффект проявляется как при резонансном взаимодействии квантовой частицы с электромагнитным полем, так и при нерезонансном взаимодействии. В нелинейной физике эффекты второго порядка определяют такие явления, как автомодуляция света, самофокусировка, влияют на формирование когерентных процессов. В квантовой физике штарковское взаимодействие с квантованным вакуумным электромагнитным полем в определенных условиях подавляет сверхизлучение и определяет невинеровскую динамику открытых квантовых систем. С общетеоретической точки зрения учет штарковского взаимодействия квантовых частиц с квантованным вакуумным широкополосным электромагнитным полем вводит в теорию открытых систем там называемый квантовый считающий случайный процесс [1]. Однако квантовый считающий случайный процесс невозможно ввести для описания штарковского взаимодействия открытой системы с квантованным вакуумным широкополосным полем, отвечающим ненулевой температуре (с ненулевой плотностью фотонов) [1, 2].

В работе [3] исследовано сверхизлучение в сжатом квантованном электромагнитном поле. Авторы здесь говорят о триггерном сверхизлучении, поскольку в сжатом поле – ненулевая плотность фотонов. Были описаны особенности излучательного импульса, в теории которого авторам удалось учесть пространственную протяженность открытой системы. При этом эффектами второго порядка во взаимодействии со сжатым полем пренебрегалось. Поэтому эффектов подавления сверхизлучения штарковским взаимодействием не обнаружено и не исследовано. С точки зрения теории открытых систем во взаимодействие открытой системы с сжатым термостатом невозможно напрямую ввести квантовый считающий случайный процесс в силу ненулевой плотности фотонов такого термостата

В данной статье в задаче о триггерном сверхизлучении мы учли этап формирования сжатого широкополосного фотонного поля как результат параметрического взаимодействия вакуумного поля с нулевой плотностью фотонов в квадратично нелинейной среде. В результате удалось учесть штарковское взаимодействие ансамбля одинаковых атомов со сжатым падающем полем и ввести квантовый считающий случайный процесс. Как следствие, обнаружен

[1)]e-mail: trubilko.andrey@gmail.com; basharov@gmail.com

эффект подавления триггерного сверхизлучения ансамблями из достаточного числа атомов, но от учета пространственной протяженности открытой системы пришлось отказаться. Установлено, что в зависимости от параметров сжатия меняются как картина временной динамики триггерного сверхизлучения, так и условия подавления триггерного сверхизлучения штарковским взаимодействием.

В статье мы используем стандартные общие невинеровские кинетические уравнения в форме Линдблада [2–6], которые записываем применительно к описанию динамики локализованного ансамбля одинаковых возбужденных квантовых частиц в резонансном сжатом широкополосном поле, порожденным параметрическим генератором. Если пренебречь штарковским взаимодействием, то рассматриваемая задача сводится к задаче, представленной в работе [3] в случае локализованного атомного ансамбля. Учет штарковского взаимодействия не только меняет временной профиль импульса триггерного сверхизлучения, но и выделяет нетривиальную роль общего числа возбужденных одинаковых атомов в изменении временной динамики. Показано наличие критического числа возбужденных атомов – для ансамблей атомов с близкими значениями общего числа атомов интенсивность триггерного сверхизлучения и стационарная населенность резонансных уровней заметно отличаются от результатов [3].

2. Постановка задачи. Состав открытой системы и ее геометрия. Пусть протяженная вдоль оси Z среда имеет нелинейность второго порядка и к ее торцу в точке $Z = 0$ примыкает ансамбль из N неподвижных одинаковых атомов, локализованный в области пространства вокруг этой точки, геометрические размеры которого много меньше длин волн электромагнитных полей. Эти объекты погружены в вакуумное электромагнитное поле с нулевой плотностью фотонов.

В протяженной среде распространяется мощная когерентная волна частоты Ω_p, вызывающая процесс параметрического рассеяния, при котором рождаются коррелированные фотоны с частотами $(\omega - \Delta\omega)$ и $(\omega + \Delta\omega)$, так что $\Omega_p = 2\omega$. В этом случае говорят о параметрическом источнике, который генерирует коррелированные фотоны [7, 8]. Эти фотоны из источника попадают в ансамбль одинаковых атомов, причем считаем, что центральная частота поля коррелированных фотонов $\Omega_p/2$ резонансна некоторому оптически разрешенному атомному переходу между энергетическими невырожденными уровнями энергии E_1 и E_2. В результате имеем стационарное резонансное взаимодействие коррелированных фотонов с ансамблем одинаковых атомов. Полагаем, что спектральная ширина $2\Delta\omega$ поля коррелированных фотонов много больше всех характерных скоростей распада изолированных атомов рассматриваемого ансамбля, определяемых термостатом с нулевой плотностью фотонов. Поэтому поле коррелированных фотонов может рассматриваться как широкополосное поле и считаться термостатом по отношению к атомному ансамблю, а слабым "боковым" вакуумным полем можно пренебречь.

Свободный гамильтониан всей атомной системы (N – число атомов) имеет вид

$$H_a = \sum_{i=1}^{N} H_a^{(i)}, \tag{1}$$

где свободный гамильтониан отдельного атома выражается через проекторы

$$H_a^{(i)} = \sum_j E_j |E_j^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}|, \tag{2}$$

которые обладают свойствами полноты $\sum_j |E_j^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}| = 1$ и ортогональности $\langle E_j^{(i)}|E_k^{(l)}\rangle = \delta_{jk}\delta_{il}$.

Квантованное электромагнитное поле, участвующее в процессе параметрической генерации коррелированных фотонов, обладает свободной энергией

$$H_B = \int d\omega \hbar\omega a^{\dagger}(\omega)a(\omega). \tag{3}$$

Световое поле параметрического источника описывается квадратичным гамильтонианом

$$H = i\hbar k \int d\Delta\omega (b^{\dagger}(\omega + \Delta\omega)b^{\dagger}(\omega - \Delta\omega) - \mathrm{h.c}),$$

где k – константа связи, пропорциональная квадратичной восприимчивости нелинейной среды и интенсивности волны накачки, которая в рамках используемой модели считается независящей от частоты. Операторы $b^{\dagger}(\omega), b(\omega)$ являются операторами рождения и уничтожения фотонов моды на частоте ω. Тогда для операторов поля на выходе имеют место следующие выражения

$$b(\omega + \Delta\omega) = \\ = a(\omega + \Delta\omega)\,\mathrm{ch}\,r + a^{\dagger}(\omega - \Delta\omega)\,\mathrm{sh}\,r \exp(i\phi), \tag{4}$$

где $a(\omega)$ – операторы на передней границы кристалла, отвечающие вакуумному состоянию, ϕ – фаза классической волны накачки, $r = k\theta$ – параметр сжатия, θ – время прохождения и взаимодействия волн в кристалле. Обратим внимание, что генерируемые источником поля являются свободными, с теми же коммутационными соотношениями $\left[b(\omega), b^\dagger(\omega')\right] = \delta(\omega-\omega')$, что и исходные вакуумные $\left[a(\omega), a^\dagger(\omega')\right] = \delta(\omega-\omega')$. В рамках представленной модели имеют место следующие выражения, определяющие средние от операторов поля на выходе кристалла

$$\langle b(\omega)\rangle = 0, \langle b^\dagger(\omega) b(\omega')\rangle = \operatorname{sh}^2 r \delta(\omega-\omega'),$$
$$\langle b(\omega) b(\omega')\rangle = \operatorname{ch} r \operatorname{sh} r \exp(i\phi)\delta(\omega+\omega'-2\Omega_p),$$

которые и описывают состояние сжатого термостата.

Для описания сжатого света используется квадратурный оператор

$$X(\omega,\Theta) = \frac{1}{2}\left(b^\dagger(\omega)\exp(i\Theta) + h.c.\right) =$$
$$= x(\omega)\cos\Theta + p(\omega)\sin\Theta,$$

где $b(\omega) = x(\omega) + ip(\omega)$ – фотонный оператор уничтожения на частоте ω. Свойства света могут быть получены из набора его корреляционных функций, например, из дисперсий квадратурного оператора $\langle(\Delta X)^2\rangle = \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2$, измерение которых известно. Так, для когерентного состояния, минимизирующего соотношение неопределенностей, $\langle(\Delta X)^2\rangle = 1/4$. Если $\langle(\Delta X(\Theta))^2\rangle < 1/4$, то свет называют сжатым по координате или амплитуде, если $\Theta = 0$, и сжатым по импульсу или фазе, если $\Theta = \pi/2$. Предельному сжатию отвечает случай $\langle(\Delta X(\Theta))^2\rangle = 0$. Здесь термины амплитуда и фаза употребляются в связи с рассмотрением свойств света в фазовом пространстве. Одним из известных основных свойств сжатого света является подавление, вплоть до полного, дробового шума фоторегистрации. Для рассматриваемой модели параметрического источника, порождающего сжатое состояние светового поля окружения атомов, дисперсия квадратурного оператора на данной частоте определяется соотношением

$$\langle X^2(\omega)\rangle = \frac{1}{4}(2n_r + 1 + 2m_r\cos(\phi)),$$

где параметр $n_r = \operatorname{sh}^2 r$ является средним числом фотонов на данной частоте и оптическая когерентность $m_r = \operatorname{ch} r \operatorname{sh} r$ заданы значением параметра сжатия r источника. Классическая волна накачки кристалла играет роль гетеродина, так, выбирая $\phi = \pi$ при $r \to \infty$ дисперсия импульса практически равна нулю, и мы имеем сжатый по импульсу свет. Именно такое состояние светового поля окружения мы и будем использовать в дальнейших расчетах.

Считаем, что внешнее поле взаимодействует с атомами электродипольно

$$V = -\int d\omega(b^\dagger(\omega) + b(\omega))\Gamma(\omega)\sum_{i,k,j} d_{kj}|E_k^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}|, \quad (5)$$

где d_{kj} – матричные элементы дипольного момента $d = \sum_{k,j}|E_k^{(i)}\rangle\langle E_j^{(i)}|$, а константой $\Gamma(\omega)$ обозначен параметр связи атома и широкополосного поля. При записи этих выражений мы пренебрегаем эффектами вырождения, поляризационными особенностями и отдачи, кроме того, предполагается, что уровни энергии атома обладают определенной четностью $\langle E_k^{(i)}|d|E_k^{(i)}\rangle = 0$. Заметим, что в атомной системе существует выделенный резонансный переход $|E_1^{(i)}\rangle \to |E_2^{(i)}\rangle$ между двумя рабочими уровнями, частоту которого обозначим

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}.$$

В условиях, когда квантовая система взаимодействует с широкополосным электромагнитным полем, наличие в ней выделенного перехода приводит к его разбиению на независимые источники, согласно теории Лакса [9].

Следует отдельно упомянуть о приготовлении различного начального состояния атомной системы для исследования ее нестационарной динамики. Во-первых, можно говорить о формировании начального резонансного условия для атомов посредством включения или выключения постоянного штарковского поля, которое формирует условия резонансного взаимодействия с сжатым полем. Во-вторых, начальное состояние атомной системы может быть приготовлено дополнительными когерентными импульсами, которые мы здесь не рассмотриваем, но которые могут формировать разные начальные состояния в атомной системе. Наконец, можно просто рассматривать стационарные состояния этой системы в поле сжатого термостата, поскольку новым по сравнению с другими исследованиями является учет штарковского взаимодействия с сжатым полем.

Основной задачей в указанной постановке является получение кинетического уравнения для открытой, в данном случае атомной, системы. На его основе можно дать дальнейший расчет разного рода эффектов. Считая широкополосное поле окружения в сжатом состоянии как термостат, состояние которого не изменяется в процессе эволюции, такое уравнение для уединенного двухуровневого атома впервые было представлено в работе [10], а для коллективной атомной системы в [11]. Оно получено в первом неисчезающем порядке по взаимодействию атома с внешним квантованным полем, с помощью стохастических уравнений, описываемых алгеброй только для порождающего и уничтожающего процессов.

Уравнение, описывающее динамику коллектива атомов с учетом их пространственного распределения, для исследования эффекта триггерного сверхизлучения представлено в работе [3]. В идейном плане это уравнение отличается от уравнения для уединенного атома заменой операторов уединенного атома на коллективные операторы с учетом их пространственного расположения. Вместе с тем активное исследование динамики систем различной природы при взаимодействии с широкополосным вакуумным окружением [6, 9–14], при описании в рамках стохастических дифференциальных уравнений, основано на известной алгебре Хадсона–Патрасарати [1], образующими которой совместно с порождающим и уничтожающим процессами, является и считывающий процесс. Он появляется в следующем, втором порядке по взаимодействию системы с окружением, который, отметим, является тем же ведущим порядком в кинетическом уравнении открытой системы. Учет этого процесса приводит к ряду новых наблюдаемых эффектов, в ряду которых наиболее значимую роль играет возможность замораживания состояния исследуемой системы [4, 6]. При определенных значениях числа агентов системы и некоторых значениях параметров системы может наблюдаться эффективное обнуление константы релаксации системы, поскольку эффекты второго порядка приводят к эффективному встраиванию в константу релаксации модулированных операторозначных функций, которые и приводят к означенному эффекту. Совместный учет всех трех стохастических процессов, однако, применим исключительно к вакуумному состоянию окружения.

3. Кинетическое уравнение. Для получения кинетического уравнения открытой системы мы использовали известный метод алгебраической резонансной теории возмущений [15], согласно которому необходимо получить эффективный гамильтониан задачи. Его вывод основан на унитарной симметрии квантовой механики, неоднократно изложен для применения в разных физических ситуациях, и сводится к получению эффективного гамильтониана такого вида, который не должен содержать в представлении взаимодействия любых быстроменяющихся слагаемых. Здесь мы не будем подробно останавливаться на его выводе, приведем лишь окончательный вид полученных слагаемых. Следует отметить, что выделение из многоуровневой системы только двух рабочих уровней, резонансно связанных с широкополосным полем окружения, позволяет ввести для многоатомной системы двухуровневое приближение, посредством коллективных атомных операторов

$$R_3 = \frac{1}{2}\sum_i \Big(|E_2^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}| - |E_1^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|\Big),$$
$$R^+ = \sum_i |E_2^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|, R^- = \sum_i |E_1^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}|.$$

Эти операторы отвечают коммутационным соотношениям $\Big[R_3; R^\pm\Big] = \pm R^\pm$, $\Big[R^+; R^-\Big] = 2R_3$ и вместе с единичным оператором двухуровневой системы $\hat{\mathbb{1}} = \sum_i |E_2^{(i)}\rangle\langle E_2^{(i)}| + |E_1^{(i)}\rangle\langle E_1^{(i)}|$ являются образующими алгебры su(2). Указанное обстоятельство позволяет определить эффективный гамильтониан задачи, описывая взаимодействия посредством коллективных операторов атомной системы и операторов рождения и уничтожения вакуумного состояния на входе параметрического источника сжатого света. В итоге выражения для эффективного гамильтониана в представлении взаимодействия запишем в виде

$$\hat{H}^{\rm Eff}(t) = \hat{H}^{TL}(t) + \hat{V}^{TL}(t),$$

где оператор

$$\hat{V}^{TL}(t) = -\int d\omega \frac{\Gamma^2(\omega)|d_{21}|^2}{\hbar(\omega+\omega_0)}\Big(R^-R^+ + R^+R^- - N\Big) \quad (6)$$

отвечает диполь-дипольному взаимодействию атомов, N – оператор полного числа атомов системы.

Слагаемое

$$\hat{H}^{TL}(t) = \hat{H}^{TL-B}(t) + \hat{H}^{St}(t)$$

определено суммой операторов, отвечающих как резонансному характеру взаимодействия атомной системы и окружения, что описывается первым порядком по константе взаимодействия

$$\hat{H}^{TL-B}(t) = \quad (7)$$
$$= \int d\omega\Gamma(\omega)\Big(a^\dagger(\omega)\,\mathrm{ch}\, r + a(\omega)\,\mathrm{sh}\, r\exp(-i\phi)\Big) \times$$
$$\times\, e^{i(\omega-\omega_0)t} d_{12}R^- +$$
$$+ \int d\omega\Gamma(\omega)\Big(a(\omega)\,\mathrm{ch}\, r + a^\dagger(\omega)\,\mathrm{sh}\, r\exp(i\phi)\Big) \times$$
$$\times\, e^{-i(\omega-\omega_0)t} d_{21}R^+,$$

так и штарковскому взаимодействию, описывающему процессы виртуального излучения и последующее поглощение фотона атомной системой, которое определяется вторым порядком по константе взаимодействия

$$\hat{H}^{St}(t) = \int d\omega \int d\omega' \Gamma(\omega)\Gamma(\omega') \times$$
$$\times \Big((2n_r+1)a^\dagger(\omega)a(\omega') + \mathrm{sh}^2 r\,\delta(\omega'-\omega)\Big) \quad (8)$$
$$e^{-i(\omega'-\omega)t}\Big(\Pi_+(\omega,\omega')\frac{N}{2} + \Pi_-(\omega,\omega')R_3\Big).$$

В представленных выражениях параметры штарковского взаимодействия атомов с широкополосным полем равны

$$\Pi_{\pm}(\omega,\omega') = \frac{1}{2}\Big[(\Pi_2(\omega)+\Pi_2(\omega'))\pm(\Pi_1(\omega)+\Pi_1(\omega')\Big],$$

$$\Pi_k(\omega) = \sum_j \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar}\Big(\frac{1}{\omega_{kj}+\omega}+\frac{1}{\omega_{kj}-\omega}\Big), k=1,2.$$

В частности, усреднение выражения (8) по вакуумному состоянию позволяет учесть энергетические сдвиги рабочих уровней в широкополосном сжатом вакууме, которые приводят к следующему изменению частоты перехода между выделенными резонансными уровнями атомной системы

$$\omega_0 = \omega_{21} + \int d\omega\Gamma^2(\omega)\Big(n_r\Pi_2(\omega)+\sum_j\frac{|d_{2j}|^2}{\hbar^2(\omega_{2j}-\omega)}\Big) -$$

$$-\int d\omega\Gamma^2(\omega)\Big(n_r\Pi_1(\omega)+\sum_j\frac{|d_{1j}|^2}{\hbar^2(\omega_{1j}-\omega)}\Big).$$

При записи этого выражения учтен также и лэмбовский сдвиг рабочих уровней, который при использовании приводимой методики вывода получается автоматически. Штарковский сдвиг уровней в сжатом термостате так же, как в случае классического поля [16], определяется средним числом фотонов $n_r = \langle b^\dagger(\omega)b(\omega)\rangle = \operatorname{sh}^2 r$ на данной частоте широкополосного термостата.

Полученный эффективный гамильтониан позволяет получить известным методом кинетическое уравнение для коллективной динамики открытой атомной системы. При этом операторы вакуумных полей на входе параметрического источника, входящие в приведенные выражения (7) и (8), определяют порождающий, уничтожающий и считывающий стохастические процессы для стохастического дифференциального уравнения открытой системы

$$\mathcal{B}^+(\tau) = \int_0^\tau d\tau' a^\dagger(\tau'), \mathcal{B}^-(\tau) = \int_0^\tau d\tau' a(\tau'), \Lambda(\tau) =$$

$$= \int_0^\tau d\tau' a^\dagger(\tau')a(\tau').$$

Здесь операторы вакуумных полей

$$a(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp\big(-i(\nu-1)\tau\big)a(\nu), a^\dagger(\tau) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp\big(i(\nu-1)\tau\big)a^\dagger(\nu),$$

уже определены нормированными частотами $\nu = \omega/\omega_0$ и переходом к безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$, а также соотношением $a(\nu) = \sqrt{\omega_0}a(\omega)$. Для вакуумного широкополосного состояния поля приведенные инкременты подчиняются алгебре Хадсона–Партасарати [1] со следующими соотношениями

$$d\Lambda d\Lambda = d\Lambda, d\Lambda d\mathcal{B}^+ = d\mathcal{B}^+,$$
$$d\mathcal{B}^- d\Lambda = d\mathcal{B}^-,\ d\mathcal{B}^- d\mathcal{B}^+ = d\tau,$$
$$d\Lambda d\tau = d\Lambda d\mathcal{B}^- = d\mathcal{B}^+ d\Lambda = d\Lambda d\Lambda =$$
$$= d\mathcal{B}^+ d\mathcal{B}^+ = d\mathcal{B}^+ d\tau = d\mathcal{B}^- d\tau = d\tau d\tau = 0.$$

Любые разные шумовые источники являются (считаются) независимыми, и произведение их инкрементов равно нулю.

В итоге кинетическое уравнение для невинеровской динамики атомного ансамбля, взаимодействующего с широкополосным вакуумным сжатым термостатом, имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho^A}{\partial\tau} &= -i\Big[\mathcal{V}^{TL},\rho^A\Big] + \\ &+\Big(\chi^* R^- \operatorname{sh} r e^{-i\phi} + \chi R^+ \operatorname{ch} r\Big)\frac{\mathcal{Y}+i\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2}\times \\ &\times\Big(\chi^* R^- \operatorname{ch} r + \chi R^+ \operatorname{sh} r e^{i\phi}\Big)\rho^A + \\ &+\rho^A\Big(\chi R^+ \operatorname{ch} r + \chi^* R^- \operatorname{sh} r e^{-i\phi}\Big)\times \\ &\times\frac{\mathcal{Y}^+ - i\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2}\Big(\chi R^+ \operatorname{sh} r e^{i\phi} + \chi^* R^- \operatorname{ch} r\Big) + \\ &+\frac{\mathcal{Y}}{\mathcal{R}}\Big(\chi^* R^- \operatorname{ch} r + \chi R^+ \operatorname{sh} r e^{i\phi}\Big)\times \\ &\times\rho^A\Big(\chi^* R^- \operatorname{sh} r e^{-i\phi} + \chi R^+ \operatorname{ch} r\Big)\frac{\mathcal{Y}^+}{\mathcal{R}}.\end{aligned} \quad (9)$$

Здесь введены операторозначные функции

$$\mathcal{Y} = \Big(\exp\big(-i\mathcal{R}\big)-1\Big),$$
$$\mathcal{R} = \Big(2n_r+1\Big)\big(\eta_+\frac{N}{2}+\eta_- R_3\big), n_r = \operatorname{sh}^2 r, \quad (10)$$

которые понимаются как их разложения в ряд по оператору $\mathcal{R}$. Кроме того, определены следующие безразмерные константы

$$\chi = \frac{\sqrt{2\pi}\Gamma(\Omega)d_{21}}{\hbar\sqrt{\omega_0}}, \eta_\pm = \frac{2\pi}{\hbar}\Gamma^2(\Omega)\Big[\Pi_2(\Omega)\pm\Pi_1(\Omega)\Big].$$

Полученное кинетическое управляющее уравнение для открытой системы (9) представляет собой уравнение релаксации, где диссипатор имеет лимбладовский вид [17]. Представленное уравнение сводится к известному уравнению релаксации атомной системы с учетом невинеровского характера взаимодействия в широкополосном вакуумном окружении [4], что следует из (9) в условиях, когда параметр сжатия r положен равным нулю. Как известно, невинеровская динамика системы, учитывающая считывающий случайный процесс, может быть корректно сведена к винеровской динамике, которая описывается только порождающим и уничтожающим случайными процессами [18] в условиях, когда штарковское взаимодействие отсутствует, что отождествляется в нашем рассмотрении занулением констант $\eta_- = \eta_+ = 0$. В этом случае уравнение (9) сводится к уравнению релаксации коллективной атомной системы в поле сжатого термостата, и в случае одиночного двухуровневого атома переходит в уравнение, впервые полученное в работе Гардинера [10]. Существенно отметить, что невинеровская динамика в случае широкополосного поля в сжатом состоянии приводит не только к стабилизации релаксации атомной системы и эффекту замораживания ее состояния, что известно по аналогии с такого же типа замораживанием состояния в вакуумном окружении, но и еще к нескольким важным особенностям. Наличие отличной от нуля интенсивности сжатого света приводит к значительному эффекту штарковского смещения энергетических уровней атомной системы, ровно такой же величины как и в соответствующем классическом поле аналогичной амплитуды. Эффекты виртуального (из-за учета наличия других нерезонансных уровней в атомной системе) излучения и последующего поглощения фотонов приводят к квантовым интерференционным эффектам альтернатив указанных процессов, что и обуславливает здесь невозможность игнорирования штарковским взаимодействием. Это взаимодействие приводит к изменению в описании релаксации атомной системы. Как видно из приведенного решения, сжатое поле усиливает константу взаимодействия, добавляя в константы присущий штарковскому взаимодействию масштабный множитель $(2n_r + 1)$. Кроме того, оптическая когерентность сжатого состояния (отличные средние $\langle b(\omega)b(\omega^{'})\rangle, \langle b^\dagger(\omega)b^\dagger(\omega^{'})\rangle$) со встроенными в операторные соотношения операторозначных выражений от проявления штарковского характера взаимодействия, приводит, наряду со слагаемыми, ответственными за линейное поглощение и усиление атомной среды, к появлению новых слагаемых, описывающих возникающую в среде атомную коллективную когерентность.

4. Динамика атомного ансамбля в поле сжатого термостата. Рассмотрим типичный пример коллективной динамики атомного ансамбля в поле широкополосного сжатого термостата. Такая ситуация в режиме триггерного сверхизлучения при обычной динамике атомов, но с учетом пространственного распределения атомов, в поле сжатого света рассмотрена в [3]. Как хорошо известно, для описания атомной динамики в этом случае традиционно применяется известный базис Дике. Его базисные функции $|j,m\rangle$ образуют (2j+1)-мерное представление алгебры момента с генераторами R_3 и $R^{\pm}$, $R^{\pm}|j,m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle$, являясь собственными векторами операторов Казимира $R^2 = \frac{1}{2}(R^+R^- + R^-R^+) + R_3^2$ и инверсии R_3: $R^2|j,m\rangle = j(j+1)|r,m\rangle$, $R_3|j,m\rangle = m|j,m\rangle$. Основное состояние полностью симметризованного ансамбля из $N_a = 2j$ атомов в этом базисе задано вектором $|N_a/2, -N_a/2\rangle$, а полностью возбужденное состояние отвечает вектору $|N_a/2, N_a/2\rangle$. При таком описании динамика атомной системы воспринимается как движение псевдовектора, описывающего атомное состояние на сфере Блоха. Сам такой вектор не изменяет своей длины в процессе движения, и полностью возбужденное состояние ансамбля отвечает точке на этой сфере, ассоциированной с северным полюсом, а вакуумное состояние атомного ансамбля, соответственно, – с южным.

В результате взаимодействия с широкополосным светом в состоянии сжатого вакуума, помимо традиционного перехода атомной системы из симметризованного возбужденного состояния к основному через целый ряд промежуточных состояний $|j,m\rangle$ "лестницы" Дике, определяемые процессами излучения фотонов возбужденной атомной системой, осуществляется и обратный процесс поглощения атомной системой фотонов исходного сжатого термостата. Конкуренция названных процессов приводит к стационарному, далеко не вакуумному, состоянию атомной системы.

Обратим внимание на важный эффект, заключающийся в возможном замораживании состояний атомной системы. Действительно, при определенных значениях чисел атомов ансамбля, параметров атомной системы и параметра сжатия поля окружения, скорость распада атомной системы становится в точности равной нулю. Это обусловлено фактом возникновения периодических нелинейных функций

$$\mathcal{C}_m = \frac{1 - \cos\Big(\big(2n_r + 1\big)\big(\eta_+ \frac{N_a}{2} + \eta_- m\big)\Big)}{\Big(\big(2n_r + 1\big)\big(\eta_+ \frac{N_a}{2} + \eta_- m\big)\Big)^2},$$

которые встраиваются в операторозначные выражения в уравнении (9). В случае, когда выполняются следующие соотношения

$$\big(2n_r + 1\big)\big(\eta_+ \frac{N_a}{2} + \eta_- m\big) = 2\pi k, k = 1, 2, 3..., \quad (11)$$

состояния атомной системы имеют нулевую скорость коллективной релаксации и стабилизированы по отношению к кооперативному распаду в режиме триггерного сверхизлучения. Приведенные формулы отвечают и коллективному распаду атомной системы с учетом невинеровской динамики в вакуумном окружении, при $n_r = 0$. Отметим также, что квантовое состояние сжатого термостата позволяет улучшить условия такой заморозки, благодаря масштабному коэффициенту, пропорциональному отличным от нуля средним числам фотонов в модах сжатого света. Физической причиной этого эффекта является учет нерезонансных взаимодействий атомной системы и квантованного электромагнитного поля. Именно это взаимодействие и порождает периодические функции $\mathcal{C}_m$ как сомножители скоростных коэффициентов в кинетическом уравнении для матричных элементов атомной системы, а условие (11) удовлетворяет их нулевым значениям.

Первое слагаемое правой части уравнения (9) описывает естественным образом возникающее, без применения каких-либо приближений в используемом методе, диполь-дипольное взаимодействие между атомами ансамбля. Наряду с описанным выше штарковским взамодействием внешнего широкополосного поля на отдельный атом (8), приводящее к изменению частоты резонансного перехода, возникает еще одно слагаемое, отвечающее дополнительному сдвигу энергетических уровней атомов. Оно обусловлено появлением в анализируемом уравнении слагаемого, ассоциированного с оператором

$$H^{St-TL} = -i\Big(\chi^* R^- \operatorname{sh} r e^{-i\phi} + \chi R^+ \operatorname{ch} r\Big) \times \times \frac{\sin\mathcal{R} - \mathcal{R}}{\mathcal{R}^2}\Big(\chi^* R^- \operatorname{ch} r + \chi R^+ \operatorname{sh} r e^{i\phi}\Big), \qquad (12)$$

где $\mathcal{R}$ по-прежнему определено выражением (10), в котором $N = N_a$. Это возникающее взаимодействие продуцировано учетом штарковского взаимодействия между рабочими уровнями атомов, а также и наличием возникающей атомной когерентности в ансамбле. В данном случае, в отличие от невинеровской динамики для вакуумного состояния, это взаимодействие зависит от масштабного коэффициента, определяемого сжатым состоянием окружения, встроенного в операторозначные выражения от атомных операторов системы. Указанные сдвиги при дальнейшем анализе динамики атомной системы могут быть сняты последовательным применением соответствующих унитарных преобразований, и мы их учитывать далее не будем.

Вывод основного кинетического уравнения (9), определяющего кинетику атомного ансамбля, осуществляется при следующих соотношениях между константами взаимодействия $\eta_\pm \ll \chi \ll 1$. Поэтому эффекты штарковского взаимодействия, проистекающие от нерезонансного взаимодействием атомной системы и окружения, определяются малым значением величин $\eta_\pm$ и начинают проявляться, когда число атомов в ансамбле порядка $N_a \approx 100$. Будем интересоваться динамикой атомного ансамбля в наиболее простой ситуации, а именно в условиях равенства величин параметров штарковского взаимодействия рабочих уровней, $\eta_- = 0$. Периодическая функция $\mathcal{C}_m$ при этом не зависит от квантового числа m, поэтому полное подавление коллективной релаксации определяется только критическим значением числа атомов в ансамбле N_*, которое находится в этом случае из следующего условия $\big(2n_r + 1\big)\eta_+(N_*/2) = 2\pi k, k = 1, 2, 3....$

Исследуем далее режим триггерного сверхизлучения в условиях, когда число атомов ансамбля отлично от критического значения. Динамика такого ансамбля атомов в этом случае описывается следующей системой уравнений для атомных средних, в которых опустим слагаемые, описывающие диполь-дипольное взаимодействие между атомами

$$\partial_\tau\langle R_3\rangle = -\gamma_{\mathcal{R}}\Big(\langle R^2\rangle + \big(2n_r+1\big)\langle R_3\rangle - \langle R_3^2\rangle\Big), \qquad (13)$$

$$\partial_\tau\langle R_3^2\rangle = -\gamma_{\mathcal{R}}\Big(2\langle R_3\rangle\langle R^+R^-\rangle + 4n\langle R_3^2\rangle + 2n_r\langle R_3\rangle - - (2n_r+1)\langle R^+R^-\rangle + m_r e^{-i\phi}\langle R^-R^-\rangle + m_r e^{i\phi}\langle R^+R^+\rangle\Big),$$

$$\partial_\tau\langle R^+R^-\rangle = -\gamma_{\mathcal{R}}\Big(- 2\langle R_3\rangle\langle R^+R^-\rangle - - 4n_r\langle R_3^2\rangle + (2n_r+1)\langle R^+R^-\rangle - -m_r e^{-i\phi}\langle R^-R^-\rangle - m_r e^{i\phi}\langle R^+R^+\rangle\Big),$$

$$\partial_\tau\langle R^-R^-\rangle = -\gamma_{\mathcal{R}}\Big(- 2\langle R_3\rangle\langle R^-R^-\rangle + +(2n_r+3)\langle R^-R^-\rangle + m_r e^{i\phi}\big(4\langle R_3^2\rangle + 2\langle R_3\rangle - 2\langle R^+R^-\rangle\big)\Big),$$

$$\partial_\tau\langle R^+R^+\rangle = -\gamma_{\mathcal{R}}\Big(- 2\langle R_3\rangle\langle R^+R^+\rangle + (2n_r+3)\langle R^+R^+\rangle + +m_r e^{-i\phi}\big(4\langle R_3^2\rangle + 2\langle R_3\rangle - 2\langle R^+R^-\rangle\big)\Big).$$

Здесь параметр

$$\gamma_{\mathcal{R}} = |\chi|^2\frac{1-\cos\mathcal{R}}{\mathcal{R}^2}$$

определяет эффективную скорость коллективной релаксации атомного ансамбля, промодулированную слагаемым учета эффективного штарковского взаимодействия в системе. Заметим, что динамика атомного ансамбля в поле сжатого термостата определяется не только слагаемыми, отвечающими за традиционное поглощение и усиление, описываемое нормальным и антинормальным порядком атомных операторов, соответственно, но и слагаемыми, отвечающими появлению в системе атомной когерентности. Их появление диктуется наличием когерентности исходного широкополосного поля сжатого термостата. Обратим особое внимание, что при записи этих уравнений мы не пользуемся традиционным расцеплением атомных операторов, а учитываем динамику среднего от квадрата оператора инверсии $\langle R_3^2 \rangle$, что отвечает учету флуктуации в атомной системе и в области максимального значения интенсивности в импульсе излучения. Кроме того, мы проводим, согласно работе [19], расцепление атомных операторов с учетом коммутационных соотношений в атомной системе, расцепляя, например, $\langle R^+ R_3 R^- \rangle = \langle R_3 \rangle \langle R^+ R^- \rangle - \langle R^+ R^- \rangle$. Корректность такой процедуры следует закону сохранения среднего от оператора R^2, являющегося интегралом движения, что определено первыми тремя уравнениями приведенной системы (13). Считая начальным состоянием атомной системы полностью возбужденное состояние ансамбля $|N_a/2, N_a/2\rangle$, имеем следующие начальные условия для решения системы

$$\begin{gathered}\langle R_3 \rangle_0 = N_a/2, \quad \langle R_3^2 \rangle_0 = N_a^2/4, \quad \langle R^+ R^- \rangle_0 = N_a, \\ \langle R^- R^- \rangle_0 = 0, \quad \langle R^+ R^+ \rangle_0 = 0, \end{gathered} \tag{14}$$

продиктованные усреднением в базисе Дике.

Для описания зависимости интенсивности импульса триггерного излучения воспользуемся известной output-input теорией [10]. Согласно последней, операторы выходных полей $c(t)$ связаны с атомными операторами R^- и операторами поля источника $b(t)$ соотношением

$$c(t) = \sqrt{\gamma} R^-(t) + b(t).$$

Поскольку регистрируемые детектором поля являются свободными, их коммутационные соотношения должны быть такими же, как и для операторов источника. Возбуждение атомной системы сжатым светом приводит в регистрации средних от наблюдаемых к нетривиальному вкладу, связанному с интерференцией атомных операторов и операторов исходного источника сжатого света.

Определим, например, среднее от корреляционной функции

$$\begin{gathered}\langle c^\dagger(0) c(\tau) \rangle = \gamma \langle R^+(0) R^-(\tau) \rangle + \sqrt{\gamma} \langle R^+(0) b(\tau) \rangle + \\ + \sqrt{\gamma} \langle b^\dagger(0) R^-(\tau) \rangle + \langle b^\dagger(0) b(\tau) \rangle. \end{gathered} \tag{15}$$

Как показано в [10], вклад от интерференционных слагаемых сводится к виду

$$\begin{gathered}\sqrt{\gamma} \langle R^+(0) b(\tau) \rangle + \sqrt{\gamma} \langle b^\dagger(0) R^-(\tau) \rangle = \\ = \gamma \theta(\tau) \langle [R^+(\tau), R^-(0)] \rangle + \gamma \theta(-\tau) \langle [R^-(\tau), R^+(0)] \rangle, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\theta(\tau)$ – обычная тета-функция: $\theta(\tau > 0) = 1, \theta(\tau < 0) = 0, \theta(0) = (1/2)$, отвечающая принципу причинности. Согласно последнего, средние вида $\langle a(t_1) b(t_2) \rangle$ при $t_2 > t_1$ равны нулю, поскольку поле источника не влияет на атомы в более ранний момент времени. Указанные обстоятельства приводят к следующему определению интенсивности в триггерном режиме сверхизлучения для невырожденной динамики атомного ансамбля в поле сжатого термостата

$$I(\tau) = \langle c^\dagger(\tau)) c(\tau) \rangle = n_r + \gamma \langle R^+ R^- \rangle_\tau,$$

анализ которой осуществлялся на основе численного решения системы (13) с учетом начальных условий (14).

Для всех дальнейших приведенных расчетов, в соответствии с условиями используемыми при выводе кинетического уравнения, мы положили значение $|\chi|^2 = 10^{-3}$, а величину $\eta_- = 10^{-4}$. На рисунке 1 представлено характерное поведение импульса свер-

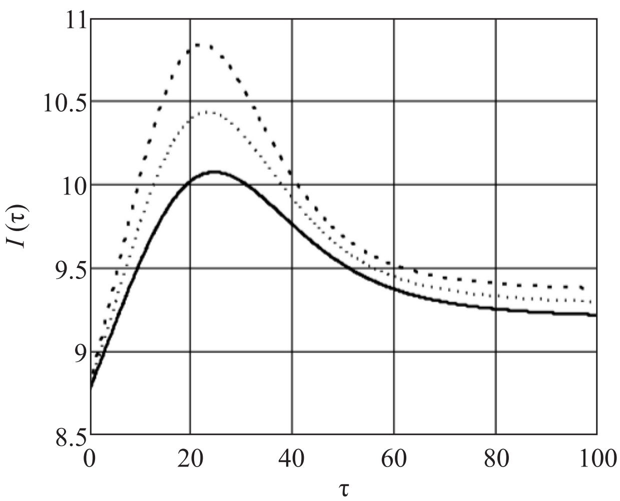

Рис. 1. Невинеровская динамика импульса триггерного сверхизлучения в поле сжатого термостата (параметр сжатия $r = 1.8$) в зависимости от числа атомов в ансамбле $N_a = 90$ (сплошная кривая), $N_a = 100$ (точки), $N_a = 110$ (пунктир)

хизлучения, полученного в триггерном режиме воздействия на атомный ансамбль сжатого света, параметр сжатия которого $r = 1.8$, что отвечает величине экспериментально реализованных источников сжатого света. В этом случае с ростом числа атомов в ансамбле растет и величина интенсивности пика импульса, при этом уменьшается время задержки его высвечивания. Обратим внимание на очевидный факт – сам импульс имеет отличную от нуля величину в стационарном режиме, что отличает рассматриваемую ситуацию от испускания света непосредственно в вакуум. Это связано с наличием фотонов широкополосного сжатого вакуумного состояния окружения. Атомная система, стремясь к своему вакуумному состоянию в процессе эволюции, выходит на стационарное, далеко не вакуумное состояние, продуцируемое процессами поглощения и излучения фотонов атомной средой и возникновением в ней коллективной когерентности. Это явление является характерным признаком воздействия широкополосного сжатого вакуумного поля на атомную среду.

На рисунке 2 продемонстрирована зависимость высвечивания импульса сверхизлучения от параметра сжатия термостата окружения. Число атомов в ансамбле неизменно и равно $N_a = 90$. Продемонстрирован факт увеличения величины интенсивности в пике импульса с ростом параметра сжатия окружения. Кроме того, наблюдается и уменьшение времени задержки импульса с ростом параметра сжатия окружения.

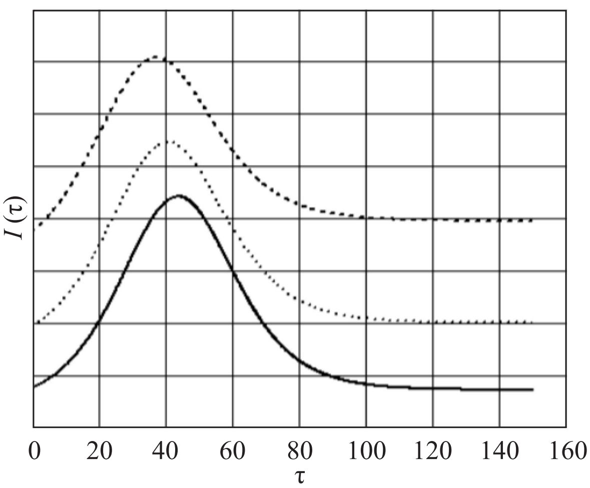

Рис. 2. Невинеровская динамика импульса триггерного сверхизлучения в поле сжатого термостата в зависимости праметра сжатия широкополосного поля окружения $r = 0.8$ (сплошная кривая), $r = 1.0$ (точки), $r = 1.2$ (пунктир)

Качественное сравнение импульсов сверхизлучения при невинеровской динамике атомного ансамбля в условиях сжатого вакуумного термостата (сплошная кривая), невинеровской динамике ансамбля в вакуумном окружении (точечная линия) и винеровской динамике в вакуумном окружении (пунктирная линия) приведены на рис. 3. Обратим внимание на изменение времени задержки импульса сверхизлучения от характера взаимодействия. Невинеровская динамика, наряду с изменением значения величины интенсивности в максимуме, приводит и к изменению времени задержки, что может являться одним из основных факторов регистрации невинеровского характера взаимодействия, при котором эффекты второго порядка играют существенную роль.

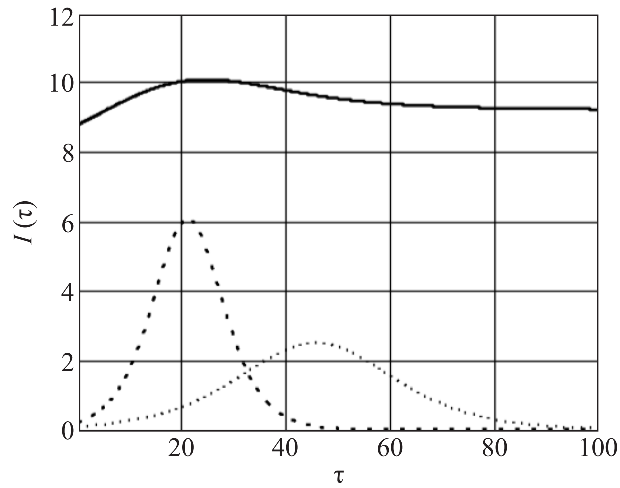

Рис. 3. Импульсы сверхизлучения для полностью возбужденного атомного ансамбля в начальный момент времени. Сплошная кривая отвечает случаю невинеровской динамики в поле сжатого термостата с праметром сжатия $r = 1.8$, точки – невинеровской динамики в поле вакуумного окружения, пунктирная кривая – винеровская динамика атомного ансамбля в вакуумном окружении

В этой работе мы продемонстрировали лишь явные эффекты обнаружения штарковского взаимодействия коллективной системы, не касаясь корреляционных эффектов в атомной динамики и их проявления в излучении. Эти эффекты в общем случае не могут быть проигнорированы при описании диссипации коллективных атомных систем, поскольку имеют тот же порядок в величине исходного взаимодействия, что и ведущий порядок в релаксационном уравнении.

5. Заключение. С общетеоретической точки зрения, для описания штарковского взаимодействия ансамбля одинаковых атомов и квантованного поля в сжатом состоянии, в статье впервые удалось ввести квантовый случайный считающий процесс для случая отличного от нуля эффективной плотности числа фотонов широкополосного квантованного поля.

Для этого взаимодействие атомов со сжатым полем рассмотрено совместно с процессом генерации сжатого поля вырожденным параметрическим генератором, а слабым "боковым" вакуумным полем пренебрежено. Это отличает продемонстрированный подход от модели [20], в которой широкополосное сжатое поле представлено в виде суммы классического сжатого поля и квантованного поля нулевой плотности фотонов. При этом в [20] квантовый случайный считающий процесс был сформулирован для квантованного поля нулевой плотности фотонов.

В результате нам удалось исследовать влияние параметра сжатия на временную динамику триггерного сверхизлучения и процессы подавления коллективного излучения атомов. Представленный подход позволит проанализировать и другие задачи квантовой динамики в сжатом поле, но в приближении локализованного атомного ансамбля. Для протяженных открытых систем результаты данной работы делают принципиальным необходимость описания состояния открытой системы и динамики коллективных излучательных процессов в области критических значений плотностей резонансных атомов.

Для наблюдения представленных здесь эффектов можно предложить исследование триггерного сверхизлучения на известном переходе $5S_{1/2} \rightarrow 5P_{3/2}$ атомов рубидия, с временем жизни порядка в десятки нс. Переход соответствует длине волны $\lambda = 780$ нм. Состояние Дике возбужденного атомного ансамбля в этом случае может быть приготовлено титан-сапфировым лазером, либо по схеме ступенчатого возбуждения [21]. Широкополосные яркие источники сжатого света также реализуемы. Например, в работах [22, 23] реализован источник яркого сжатого света с длиной волны $\lambda = 800$ нм с полосой подавления шума в несколько терагерц. Поэтому необходимые в обсуждаемой ситуации условия к настоящему времени могут быть реализованы. Другим возможным приложением полученного уравнения, может служить его применение для описания экспериментально продемонстрированного [24] явления сверхизлучательного фазового перехода. Он реализуется в условиях сильной связи двухуровневых систем с внешним полем [25], например в микрорезонаторах, отвечающих гигагерцевому и терагерцовому диапазону на ионах эрбия, европия и др. Здесь также интерес представляют эффекты, связанные с реализуемой топологией [26] в микроструктурах с комплексной архитектурой сетей. При описании этих явлений исследователи предполагают, что фотонные (фононные) моды окружения, как правило находятся в когерентном состоянии. Однако источник сжатого широкополосного света в области длин волн $\lambda = 1550$ нм [27] для целей телекоммуникационной связи уже экспериментально существует.

Авторы выражают благодарность Калачеву А.А. и Сазонову С.В. за полезные обсуждения работы на ее ранних этапах.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Национального исследовательского центра "Курчатовский институт" и Санкт-Петербургского университета государственной противопожарной службы МЧС России. Никаких дополнительных грантов на проведение данного конкретного исследования получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. R. L. Hudson and K. R. Parthasarathy, Comm. Math. Phys. **109**, 301 (1984); DOI:10.1007/BF01210951.
2. А. С. Холево, *Статистическая структура квантовой теории*, Институт компьютерных исследований, М., Ижевск (2003).
3. А. А. Калачев, В. В.Самарцев, Квантовая электроника **32**, 707 (2002).
4. A. M. Basharov, Phys. Rev. A. **84**, 013801 (2011); DOI: 10.1103/PhysRevA.84.013801.
5. А. М. Башаров, ЖЭТФ **142**, 419 (2012).
6. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **107**, 151 (2018); DOI: 10.7868/S0370274X18030025.
7. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, М. (2000).
8. L.-A. Wu, J. Kimble, J. L. Hall, and H. Wu, Phys. Rev. Lett. **57**, 2520 (1986); DOI: 10.1103/PhysRevLett.57.2520.
9. M. Lax, Phys. Rev. **145**, 110 (1966); DOI: 10.1103/PhysRev.145.110.
10. C. W. Gardiner, Phys. Rev. Lett. **56**, 1917 (1986); DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.1917.
11. G. S.Agarwal and R. R. Puri, Phys. Rev. A. **41**, 3782 (1990); DOI: 10.1103/PhysRevA.41.3782.
12. А. И.Трубилко, А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **107**, 555 (2018); DOI:10.7868/S0370274X18090035.
13. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **109**, 75 (2019); DOI: 10.1134/S0370274X19020012.
14. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **111**, 798 (2020); DOI: 10.31857/S1234567820120022.
15. А. М.Башаров, А. И. Маймистов, Э. А. Маныкин, ЖЭТФ. **84**, 487 (1983).
16. M. Takatsuji, Physica **84A**, 68 (1976); DOI: 10.1016/0378-4371(76)90064-9.
17. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **48**, 119 (1976); DOI: 10.1007/BF01608499.

18. C. W.Gardiner and M. J.Collett, Phys. Rev. A **31**, 3761 (1985); DOI: 10.1103/PhysRevA.31.3761.
19. А. В. Андреев, Н. А. Енаки, Ю. А. Ильинский, ЖЭТФ **87**, 400 (1984).
20. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **155**, 425 (2019); DOI: 10.1134/S0044451019030052.
21. И. И. Бетеров, Е. А. Якшина, Д. Б. Третьяков, Н. В. Альянова, Д. А. Скворцов, Г. Сулиман, Т. Р. Загиров, В. М. Энтин, И. И. Рябцев, ЖЭТФ **164**, 282 (2023); DOI: 10.31857/S0044451023080151.
22. T. Ishakov, M. V. Chekhova, and G. Leuchs, Phys. Rev. Lett. **102**, 183602 (2009); DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.183602.
23. K. Hashimoto, D. B. Horoshko, and M. V. Chekhova, Adv. Quant. Technol. **8**, 2300299 (2025); DOI: 10.1002/qute.202300299.
24. D. Kim, S. Dasgupta, X. Ma et al. (Collaboration), Sci. Adv. **11**, 1691 (2025); DOI: 10.1126/sciadv.adt1691.
25. D. Barberena and A. M. Rey, Phys. Rev. A **109**, 013709 (2024); DOI: 10.1103/PhysRevA.109.013709.
26. А. Ю. Баженов, М. М. Никитина, А. П. Алоджанц, Письма в ЖЭТФ **115**, 685 (2022); DOI: 10.31857/S1234567822110027.
27. E. Zaiser, A. Trenti, D. Milovancev, N. Vokic, B. Schrenk, and H. Hübel, IEEE Photonic Society Summer topic Meeting Ser. July 2024; DOI: 10.1109/SUM60964.2024.10614551.