Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 2, с. 79 – 86

Взрывной рост крупномасштабных магнитных флуктуаций вследствие рассеяния частиц на развитой мелкомасштабной вейбелевской турбулентности в магнитоактивной плазме

Н. А. Емельянов[1)], *Вл. В. Кочаровский*[1)]

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А. В. Гапонова-Грехова РАН, 603950 Н. Новгород, Россия

Поступила в редакцию 23 мая 2025 г.
После переработки 23 мая 2025 г.
Принята к публикации 8 июня 2025 г.

Построена аналитическая теория нелинейной генерации крупномасштабной магнитной турбулентности в анизотропной магнитоактивной плазме в квазилинейном приближении без учета непосредственного нелинейного взаимодействия отдельных гармоник. Показано, что аномальные столкновения частиц, обусловленные рассеянием на мелкомасштабных флуктуациях развитой вейбелевской турбулентности, приводят к неустойчивости длинноволновых гармоник, устойчивых в линейном приближении. Нелинейный рост таких гармоник при заданной анизотропии распределения частиц по скоростям, согласованной с коротковолновой турбулентностью на стадии насыщения и возможной анизотропной инжекцией частиц, происходит в сверхэкспоненциальном режиме и соответствует неустойчивости взрывного типа. Найден закон нарастания крупномасштабного поля и определено критическое время взрывной неустойчивости.

DOI: 10.31857/S0370274X25070117, EDN: XVWXAI

1. Введение. Апериодическая неустойчивость бесстолкновительной плазмы, имеющей анизотропное распределение заряженных частиц по скоростям и помещенной в магнитное поле, продолжает привлекать большое внимание [1–13]. И в космической, и в лабораторной (лазерной) плазме переход этой неустойчивости в нелинейный режим сопровождается развитием турбулентности, которая существенно изменяет кинетику частиц и свойства среды. Так, может возникать сильное рассеяние частиц, играющее роль межчастичных столкновений, и появляться аномальные вязкость, диффузия, электро- и теплопроводность плазмы. В частности, в астрофизической плазме неустойчивости вейбелевского типа формируют магнитную турбулентность и в значительной мере определяют характеристики бесстолкновительных ударных волн, различных структур в звездном ветре и джетах, переходных процессов в аккреционных колонках и дисках, и т.д. [14–23].

Во многих случаях важным является выяснение свойств магнитной турбулентности в наиболее длинноволновой части спектра, включая наличие ее границы и нелинейную эволюцию энергосодержания. Изучению линейной стадии неустойчивостей вейбелевского типа для различных функций распределения частиц по скоростям с учетом межчастичных столкновений и внешнего магнитного поля посвящено большое число работ [8, 12, 24–34]. Известно, в частности, что внешнее поле в бесстолкновительной плазме стабилизирует вейбелевскую неустойчивость крупномасштабных гармоник с волновыми числами меньше определенной величины $k_{\min}$ и по существу допускает рост только мелкомасштабных возмущений в ограниченном диапазоне волновых чисел $k_{\min} < k < k_{\max}$ [6, 7, 11, 12]. В работе [34] показано, что при учете столкновений частиц данное ограничение в длинноволновой части спектра отсутствует.

Однако для нелинейной стадии неустойчивости вейбелевского типа вопрос о росте длинноволновых флуктуаций оставался открытым. Его исследование, как правило, ограничивалось численным моделированием, не позволявшим корректно проследить долговременную динамику турбулентности, особенно при наличии столкновений частиц [19–21, 35–41]. В настоящей работе проведено аналитическое исследование нелинейной стадии этой неустойчивости в бесстолкновительной магнитоактивной плазме с учетом того обстоятельства, что рассеяние частиц на магнитной турбулентности играет роль аномальных столкновений и ведет к неустойчивости длинноволновых гармоник. При этом свободная энергия анизотропного распределения частиц по скоростям, определяемого насыщением мелкомасштабной турбулентности и возможной анизотропной инжекцией

[1)]e-mail: n.emelyanov@ipfran.ru; kochar@ipfran.ru

частиц, будет перекачиваться в крупномасштабную турбулентность, ранее обычно игнорировавшуюся.

В разделе 2 выводятся и решаются упрощенные уравнения для плотности энергии крупно- и мелкомасштабных магнитных полей. В разделе 3 оценивается время нарастания длинноволновой турбулентности и обсуждаются особенности ее квазилинейной эволюции. Раздел 4 составляет Заключение.

2. Эволюция крупно- и мелкомасштабной турбулентности. Ввиду сложности эволюции турбулентных полей сосредоточимся на простейшей задаче о нерелятивистской вейбелевской неустойчивости в плазме с неподвижными ионами и бимаксвелловским распределением электронов с концентрацией n и параметром анизотропии $A = u_{||}^2/u_{\perp}^2 - 1 \lesssim 1$, определяемым отношением средних тепловых скоростей вдоль, $u_{||}$, и поперек, $u_{\perp}$ (где $u_{\perp} < u_{||}$), внешнего однородного магнитного поля $\mathbf{B}_0$. При этом его плотность магнитной энергии $B_0^2/8\pi$ будем полагать значительно меньшей плотности тепловой энергии электронов $nm(u_{\perp}^2 + u_{||}^2/2)$, т.е. считать плазму незамагниченной. Более того, пусть внешнее поле по порядку величины не превышает максимальное среднеквадратичное поле $\bar{B}_s$ ожидаемой турбулентности [12, 26].

В данном случае наибольшие инкременты имеют пространственные гармоники с волновыми векторами $\mathbf{k}$, направленными поперек внешнего магнитного поля (и оси анизотропии) и лежащими в диапазоне между значениями (см., например, [7, 12])

$$k_{\min} \approx \frac{1 + 1/A}{\sqrt{2\pi} r_H} \ll k_{\max} \approx \frac{\omega_p}{c} A^{1/2} - \frac{1 + 1/A}{2\sqrt{2\pi} r_H}. \quad (1)$$

Здесь $r_H = u_{\perp}/\omega_{B0}$ и $\omega_{B0} = eB_0/mc$ – гирорадиус и гирочастота теплового электрона с массой m и зарядом $-e$ в поле B_0, c – скорость света в вакууме, $\omega_p = (4\pi e^2 n/m)^{1/2}$ – плазменная частота. Вне этого интервала апериодическая генерация магнитного поля без учета столкновений частиц фактически отсутствует, генерации нет и для гармоник с наклонными волновыми векторами, отвечающих квазипродольной моде с ненулевой действительной частотой и большой проекцией электрического поля $\mathbf{E}$ на $\mathbf{k}$.

В указанных условиях для решения исходных уравнений Власова–Максвелла (см., например, [10, 42]) можно воспользоваться известным квазилинейным приближением [33, 43–47]. Согласно ему, в любой момент времени, как и на начальной линейной стадии неустойчивости, рост амплитуды магнитного поля (и плотности тока) в каждой пространственной гармонике происходит с инкрементом γ_k, определяемым из дисперсионного соотношения со значением параметра анизотропии A, которое задается согласованным действием всех гармоник на плазму.

Для простоты демонстрации эффекта аномальных столкновений, обусловленных рассеянием частиц на магнитной турбулентности, будем полагать, что при переходе к стадии насыщения гармоник с инкрементами порядка максимального [12]

$$\gamma_m^{(0)} = \frac{\omega_p}{\pi} \frac{u_{\perp}}{c} \frac{{A_0}^{3/2}}{A_0 + 1} \quad (2)$$

параметр анизотропии быстро (в течение нескольких характерных времен $1/\gamma_m^{(0)}$) уменьшается от начального значения A_0 до определенной величины A и далее не меняется сколько-нибудь существенно.

Допустимость этого упрощения подтверждают многочисленные расчеты методом частиц в ячейках (см., например, [19, 39, 47]), свидетельствующие о слабом изменении параметра анизотропии и медленном затухании вейбелевской турбулентности после указанного насыщения. Кроме того, примерное постоянство параметра анизотропии может быть обеспечено как за счет инжекции электронов сторонними источниками новых частиц, так и в результате их нагрева какими-либо волновыми полями или иной (не вейбелевской) турбулентностью, незначительно рассеивающей интересующие нас частицы.

Вместе с тем будем учитывать, что из-за появления аномальных столкновений, вызванных турбулентным магнитным полем, неустойчивыми становятся также длинноволновые гармоники с малыми волновыми числами $k < k_{\min}$. Подобная модель квазилинейного описания расширяющегося спектра турбулентности строится аналогично и для других (не бимаксвелловских) функций распределения частиц, в том числе с учетом эволюции функции распределения и переменности параметра $A(t)$. Однако тогда усложняется анализ используемых приближений, в частности, вследствие недоступности аналитического решения дисперсионного уравнения с учетом магнитного поля и аномальных столкновений.

Введем спектральную плотность энергии турбулентного магнитного поля $W_k = |B_k|^2/8\pi$, которая согласно сказанному удовлетворяет уравнению

$$\frac{dW_k}{dt} = 2\gamma_k W_k. \quad (3)$$

Поскольку во внешнем поле в линейном приближении без учета столкновений растут лишь коротковолновые гармоники ($k_{\min} < k < k_{\max}$), а длинноволновые ($0 < k < k_{\min}$) устойчивы, то спектр естественным образом делится на два диапазона.

Анализ динамики турбулентности будем проводить в приближении взаимодействия определяемых таким способом спектральных зон, которое обусловлено интегральным действием всех гармоник каждого диапазона, пренебрегая резонансным нелинейным взаимодействием отдельных мод. При этом изменение точного положения границы $k_{\min}$, разделяющей спектральные области, не меняет качественно результат анализа и может быть учтено явно.

Уравнение (3) для каждой из двух зон дает

$$\begin{cases} \dfrac{dW_1}{dt} = 2\bar{\gamma}_1 W_1, \\ \dfrac{dW_2}{dt} = 2\bar{\gamma}_2 W_2, \end{cases} \tag{4}$$

где введены следующие обозначения для интегральной плотности магнитной энергии и интегральных инкрементов соответствующих спектральных зон:

$$W_1 = \int_0^{k_{\min}} W_k k^2 dk, \quad W_2 = \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} W_k k^2 dk, \tag{5}$$

$$\bar{\gamma}_1 = \frac{\int_0^{k_{\min}} \gamma_k W_k k^2 dk}{\int_0^{k_{\min}} W_k k^2 dk}, \quad \bar{\gamma}_2 = \frac{\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} \gamma_k W_k k^2 dk}{\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} W_k k^2 dk}. \tag{6}$$

Согласно линейной теории неустойчивости вейбелевского типа для столкновительной магнитоактивной плазмы [34], инкремент роста длинноволновых гармоник пропорционален частоте столкновений электронов $\bar{\nu}$, т.е. $\gamma_k \approx \bar{\nu}\Phi(k)$ при $k < k_{\min}$. Аналогично, в этой области инкремент появляется и в отсутствии столкновений, но при наличии рассеяния электронов: $\gamma_k = \nu_{\text{eff}}\Phi(k)$, где ν_{eff} – эффективная частота аномальных столкновений в турбулентной плазме, а $\Phi(k)$ – тот же форм-фактор, известный из линейной теории [34] и дающий квадратичное спадание инкремента в области малых волновых чисел.

В результате для нелинейного интегрального инкремента длинноволновых флуктуаций имеем

$$\bar{\gamma}_1 = \nu_{\text{eff}}\bar{\phi}(t), \tag{7}$$

$$\bar{\phi}(t) = \frac{\int_0^{k_{\min}} \Phi(k) W_k(t) k^2 dk}{\int_0^{k_{\min}} W_k(t) k^2 dk}. \tag{8}$$

При этом, разумеется, учитывается только интегральное действие всех коротковолновых флуктуаций на развитие длинноволновых и не рассматривается резонансное взаимодействие отдельных гармоник, которое также могло бы привести к появлению нелинейного инкремента. Однако такое взаимодействие наиболее существенно для самых быстро растущих, т.е. мелкомасштабных, возмущений, но не для крупномасштабных. Для простоты мы полагаем также неизменными границу $k_{\min}$ между ними и границу всей области неустойчивости $k_{\max}$, считая параметр анизотропии и вид функции распределения частиц по скоростям фиксированными.

Для определения эффективной частоты столкновений ν_{eff} в рассматриваемой задаче будем полагать магнитную турбулентность изотропной, а характерный масштаб неоднородности магнитного поля – много меньшим гирорадиуса частиц во внешнем магнитном поле: $\lambda_{\text{cor}} \ll r_H$. Тогда, следуя [15, 46, 48], по порядку величины имеем

$$\nu_{\text{eff}} = \alpha \frac{e^2 \bar{B}^2}{m^2 c^2} \frac{\lambda_{cor}}{u_{th}} = \alpha \omega_T^2 \frac{\lambda_{\text{cor}}}{u_{th}}. \tag{9}$$

Здесь ω_T – гирочастота в среднеквадратичном магнитном поле $\bar{B}$, u_{th} – средняя тепловая скорость частиц, α – численный множитель порядка единицы, зависящий от модельных предположений о свойствах турбулентности (в частности, ее изотропии), λ_{cor} – корреляционная длина магнитных возмущений, которая с точностью до числового коэффициента дается выражением (см., например, [46])

$$\lambda_{cor}(t) = \frac{\int_0^{\infty} W_k(t) k dk}{\int_0^{\infty} W_k(t) k^2 dk}. \tag{10}$$

В случае $\lambda_{\text{cor}} \gtrsim r_H$, возможном, в частности, из-за зависимости корреляционной длины $\lambda_{\text{cor}}(t)$ от времени, неизбежны корректировки некоторых из приведенных формул и численных факторов, но основные выводы данной работы не меняются.

Используя определения (5) и (9), имеем

$$\nu_{\text{eff}}(t) = \nu_{\text{eff}}^{(s)}(t)\Big(\frac{W_1(t)}{W_s} + \frac{W_2(t)}{W_s}\Big), \tag{11}$$

где $\nu_{\text{eff}}^{(s)}(t)$ – эффективная частота столкновений, вычисляемая при плотности энергии насыщения магнитной турбулентности W_s и учитывающая зависимость от времени корреляционной длины (10). Изменением тепловых скоростей пренебрежем.

Как ясно из формул (7) и (11), инкремент неустойчивости крупномасштабных гармоник существенным образом зависит от энергии всего магнитного поля, причем величина инкремента увеличивается вместе с ростом турбулентных флуктуаций.

На нелинейной стадии неустойчивости мелкомасштабных гармоник в диапазоне $k_{\min} < k < k_{\max}$ их инкремент также зависит от уровня турбулентности. На начальном этапе ее насыщения такая зависимость определяется, прежде всего, быстрым падением параметра анизотропии $A(t)$, и мы не рассматриваем этот этап, поскольку на нем интересующие нас длинноволновые возмущения не имеют возможности или не успевают нарасти. Будем анализировать указанную двухзонную модель турбулентности (4)–(6), начиная с этапа появления заметного инкремента длинноволновых флуктуаций (7), когда уровень коротковолновых уже близок к насыщению, т.е. величина W_2 приближается к значению W_s. Используя теорию возмущений, разложим интегральный инкремент $\bar{\gamma}_2$ в ряд по плотности энергии W_2:

$$\bar{\gamma}_2 \approx \bar{\gamma}_0 - \beta W_2 + ..., \tag{12}$$

где средний инкремент $\bar{\gamma}_0$, задаваемый формулой (6) в спектральном интервале $(k_{\min}, k_{\max})$, определен в отсутствие турбулентности ($W_k = \text{const} \to 0$) для бимаксвелловской магнитоактивной плазмы с той же величиной параметра анизотропии A.

Введенный параметр β, согласно второму уравнению системы (4), связан с плотностью энергии насыщения мелкомасштабной турбулентности $W_s = \bar{\gamma}_0/\beta$. Ее легко оценить из условия равенства максимального линейного инкремента (2) и гирочастоты в турбулентном поле [10, 36, 49]: $\omega_T \approx \gamma_m^{(0)}$. Для вейбелевской неустойчивости с начальным параметром анизотропии бимаксвелловского распределения A_0 имеем следующую приближенную величину плотности энергии среднеквадратичного поля насыщения $\bar{B}_s$ [12]:

$$\frac{\bar{B}_s^2}{8\pi} \approx \frac{\omega_p^2 m^2 c^2}{8\pi^3 e^2}\Big(\frac{u_\perp}{c}\Big)^2 \frac{{A_0}^3}{(A_0+1)^2}. \tag{13}$$

Полагая далее $A \approx \text{const} < A_0$ и ограничиваясь разложением (12) для описания медленного роста и насыщения мелкомасштабной турбулентности, мы предполагаем либо ее поддержание сторонним источником, либо распад, идущий медленно в масштабе характерного времени неустойчивости крупномасштабных возмущений (см. ниже раздел 3).

Вводя безразмерные величины $\tau = 2\bar{\gamma}_0 t$, $w_1 = W_1/W_s$, $w_2 = W_2/W_s$, $\nu = \nu_{\text{eff}}^{(s)}/\bar{\gamma}_0$, запишем систему уравнений (4) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dw_1}{d\tau} = \nu\bar{\phi}(\tau)(w_1+w_2)w_1, \\ \dfrac{dw_2}{d\tau} = w_2 - w_2^2. \end{cases} \tag{14}$$

Ее последовательное интегрирование дает нелинейные законы насыщения и роста плотности энергии магнитного поля коротковолновой и длинноволновой вейбелевской турбулентности соответственно:

$$w_2(\tau) = \frac{\eta\exp(\tau)}{1+\eta\exp(\tau)} \approx \frac{w_2^{(0)}\exp(\tau)}{1+w_2^{(0)}\exp(\tau)}, \tag{15}$$

$$w_1(\tau) = \\ = \frac{w_1^{(0)}\exp\Big(\int_0^\tau \nu\bar{\phi}(\tau')w_2(\tau')d\tau'\Big)}{1 - w_1^{(0)}\int_0^\tau \nu\bar{\phi}(\tau')\exp\Big(\int_0^{\tau'}\nu\bar{\phi}(\tau'')w_2(\tau'')d\tau''\Big)d\tau'}, \tag{16}$$

где $w_1^{(0)}, w_2^{(0)}$ – начальные значения данных функций $w_1(\tau)$ и $w_2(\tau)$, а параметр $\eta = w_2^{(0)}/(1-w_2^{(0)}) \approx w_2^{(0)}$.

Согласно (16), рост среднеквадратичного магнитного поля крупномасштабных гармоник происходит в сверхэкспоненциальном режиме и имеет характер взрывной неустойчивости (см., например, [50–54]), так как выражение для w_1 стремится к бесконечности за конечное время из-за обращения в ноль знаменателя. В действительности рост крупномасштабных гармоник ограничен более сильными нелинейными эффектами, не учитываемыми в двухзонной модели и не позволяющими использовать ее при достижении сильного неравенства $w_1 \gg w_2$.

Предварительный численный расчет долговременной динамики длинноволновых флуктуаций методом частиц в ячейках в случае $w_1 \lesssim w_2$ качественно подтверждает указанный характер нарастания крупномасштабной магнитной турбулентности, а также показывает ее влияние на деформацию функции распределения по скоростям и неизбежное изменение параметра его анизотропии A, ограничивающие применимость описанной модели. Такой расчет с технической стороны является сложным, требуя расчетной области в сотни и тысячи гирорадиусов частиц во внешнем магнитном поле, что соответствует гидродинамическим масштабам, и поэтому выходит за рамки настоящей работы.

Время развития и особенности взрывной неустойчивости. Проанализируем найденное решение (16) подробнее и оценим, в частности, критическое время взрывной неустойчивости τ_c, определяемое условием равенства нулю знаменателя выражения (16):

$$w_1^{(0)}\int_0^{\tau_c}\nu\bar{\phi}(\tau')\exp\Big(\int_0^{\tau'}\nu\bar{\phi}(\tau'')w_2(\tau'')d\tau''\Big)d\tau' = 1. \tag{17}$$

Вычислим величины в уравнениях (16) и (17), используя определения (5)–(8) и один шаг метода последовательных приближений, взяв исходную спектральную зависимость $w_k \approx w_{0k}$ с разным видом функций $w_{0k}(\tau)$ в двух зонах волновых чисел:

$$w_{0k}(\tau) = w_{0k}^{(0)} \exp\Big(\int_0^\tau \nu_0(\tau')\Phi(k)d\tau'\Big) =$$

$$= w_{0k}^{(0)} \exp\big(\mu(\tau)\ \Phi(k)\big), \quad 0 < k < k_{\min},$$

$$w_{0k}(\tau) = w_{0k}^{(0)} \exp\big(\frac{\gamma_k}{\bar{\gamma}_0}\tau\big), \quad k_{\min} < k < k_{\max}. \quad (18)$$

Здесь введена величина $\mu(\tau) = \int_0^\tau \nu_0(\tau')d\tau'$, где функция $\nu_0(\tau)$ равна эффективной частоте столкновений $\nu_{\rm eff}^{(s)}(\tau)$, для которой корреляционная длина λ_{cor} определяется насыщенной мелкомасштабной турбулентностью (18) без учета крупномасштабной.

В этом приближении функция (8) есть

$$\bar{\phi}(\tau) \approx \frac{\int_0^{k_{min}} \Phi(k)\exp\big(\mu(\tau)\Phi(k)\big)k^2dk}{\int_0^{k_{\min}} \exp\big(\mu(\tau)\Phi(k)\big)k^2dk} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\mu} ln\Big(\int_0^{k_{min}} \exp\big(\mu\Phi(k)\big)k^2dk\Big). \quad (19)$$

Из линейной теории для вейбелевской неустойчивости в столкновительной магнитоактивной плазме [34] следует, что в длинноволновом диапазоне ($k \lesssim k_{\min}$) при не слишком большом параметре анизотропии ($A \lesssim 1$) справедливо приближенное выражение $\Phi(k) \approx k^2l^2$, где l – некоторая характерная длина, равная по порядку величины гирорадиусу r_H электрона с тепловой скоростью во внешнем магнитном поле. Тогда, вводя безразмерный параметр $\sigma(\tau) = \mu k_{\min}^2 l^2$, формулу (21) запишем в виде

$$\bar{\phi}(\sigma) \approx k_{\min}^2 l^2 \frac{\partial}{\partial\sigma} ln\Big(\int_0^1 x^2 \exp\big(\sigma x^2\big)dx\Big), \quad (20)$$

где $x = k/k_{\min}$ и интеграл под логарифмом равен

$$\int_0^1 x^2 \exp\big(\sigma x^2\big)dx = \quad (21)$$

$$= \frac{\exp(\sigma)}{2\sigma}\Big[1 - i\sqrt{\frac{\pi}{4\sigma}}\exp(-\sigma)\Big(1 - \exp(\sigma)Z(\sqrt{\sigma})\Big)\Big].$$

Здесь $Z(x)$ – функция Фаддеевой (или Крампа).

Выражение, стоящее в квадратных скобках, является медленной (на масштабе времени $\Delta\tau \sim 1$, т.е. $\Delta t \sim 1/(2\bar{\gamma}_0)$) функцией, меняющейся в интервале от нуля до единицы. Поэтому величина $\bar{\phi}$ мало отличается от постоянного значения, примерно равного $k_{\min}^2 l^2$. Аналогично, средняя частота столкновений $\nu_0(\tau)$ тоже меняется медленно, оставаясь почти постоянной, и это справедливо также для произведения указанных двух величин, определяющего нормированный нелинейный инкремент возмущений:

$$\Gamma(\tau) = \nu_0(\tau)\bar{\phi}(\tau) \approx \gamma_k(k_{\min})/\bar{\gamma}_0, \quad (22)$$

где γ_k – линейный инкремент в магнитоактивной столкновительной плазме с параметром анизотропии A и частотой столкновений $\nu_{\rm eff}^{(s)}(\tau_1)$, вычисленной в момент времени $\tau_1 = ln(1/w_2^{(0)})$, отвечающий выходу на насыщение функции (15) (см. рис. 1).

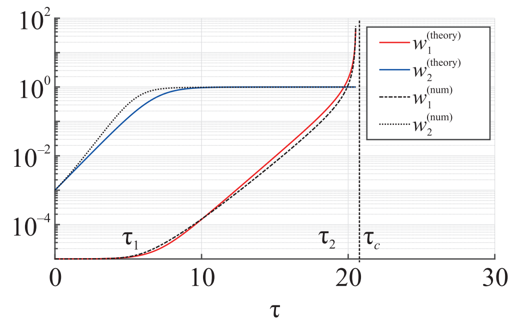

Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость нормированной плотности энергии среднеквадратичного магнитного поля от времени

В результате выражение (16) для плотности энергии длинноволновых гармоник магнитного поля можно с хорошей точностью записать в виде

$$w_1(\tau) \approx w_1^{(0)}\Big(\frac{1+\eta\exp(\tau)}{1+\eta}\Big)^\Gamma \Big\{1 - w_1^{(0)}\big|{}_2F_1(1+\eta)\big| \times$$

$$\times\Big[1 + \Big(\frac{1+\eta\exp(\tau)}{1+\eta}\Big)^\Gamma \frac{{}_2F_1\big(1+\eta\exp(\tau)\big)}{\big|{}_2F_1(1+\eta)\big|}\Big]\Big\}^{-1}. \quad (23)$$

Здесь $\eta \approx w_2^{(0)}$ и введено сокращенное обозначение для гипергеометрической функции (функции Гаусса) ${}_2F_1(y) = {}_2F_1(-\Gamma, 1; 1-\Gamma; 1/y)$, причем ${}_2F_1(y) \approx \approx 1 - [\Gamma/(1-\Gamma)](1/y)$ в области аргументов $y \gg 1$ на интересующих нас логарифмически больших временах $\tau > \tau_1$, когда рост коротковолновой турбулентности близок к насыщению, т.е. $w_2(\tau) \approx 1$.

В таком приближении уравнение (17) для критического времени взрыва τ_c принимает вид:

$$w_1^{(0)}\big|{}_2F_1(1+\eta)\big|\Big\{1 +$$

$$+\Big(\frac{1+\eta\exp(\tau_c)}{1+\eta}\Big)^\Gamma \frac{{}_2F_1(1+\eta\exp(\tau_c))}{\big|{}_2F_1(1+\eta)\big|}\Big\} = 1. \quad (24)$$

Поскольку процесс взрыва идет только при развитой мелкомасштабной турбулентности, то для критического времени τ_c имеем $w_2^{(0)}\exp(\tau_c) \gg 1$ и, следовательно, из уравнения (24) находим

$$w_1^{(0)}\Big(\frac{w_2^{(0)}\exp(\tau_c)}{1+w_2^{(0)}}\Big)^\Gamma \approx 1. \quad (25)$$

Полученное соотношение (25) приводит к оценке

$$\tau_c \approx \frac{1}{\Gamma} \ln\Big(\frac{1}{w_1^{(0)} w_2^{(0)\Gamma}}\Big), \qquad (26)$$

т.е. $t_c \propto 1/\nu_{\rm eff}^{(s)}$, и в грубом приближении критическое время примерно равно нескольким временам свободного пробега частиц в турбулентной плазме.

На рисунке 1 пунктирной и штрих-пунктирной кривыми (величины w_2 и w_1 соответственно) показаны результаты численного решения исходного уравнения (3), где значения инкремента γ_k взяты в квазилинейном приближении, т.е. зависимость $\gamma(k)$ от волнового вектора задана согласно линейной теории вейбелевской неустойчивости в магнитоактивной столкновительной плазме [34], а текущие частота столкновений, определяемая соотношениями (9)–(11), и среднее магнитное поле $\bar{B}$ вычисляются согласованно с решением для энергии гармоник W_k. В расчете использованы значения параметра анизотропии распределения $A = 1$, плазменного параметра $4\pi n m u_{||}^2/B_0^2 = 20$ и внешнего поля $B_0 = 40$ Гс.

Для сравнения на этом же рисунке показаны аналитические решения (15) и (23) (синяя и красная сплошные линии), описывающие рост плотности энергии турбулентного магнитного поля внутри интервала волновых чисел $(k_{\rm min}, k_{\rm max})$ и в длинноволновой области $k \lesssim k_{\rm min} \approx 0.4 k_{\rm max}$ для начальных значений $w_2^{(0)} = 10^{-3}$ и $w_1^{(0)} = 10^{-5}$, соответственно. При этом частота аномальных столкновений для насыщенной турбулентности $\nu_{\rm eff}^{(s)}(\tau_1)/\omega_p \approx 3 \cdot 10^{-3}$, а отвечающее ей значение инкремента $\Gamma \approx 0.84$. Вертикальная пунктирная прямая обозначает критическое время взрывной неустойчивости.

Ко времени τ_1 плотность энергии длинноволновой турбулентности w_1 успевает превзойти начальный уровень шумов $w_1^{(0)}$ примерно лишь вдвое. При бо́льших временах наступает сверхэкспоненциальный режим роста, когда в числителе и знаменателе формулы (23) превалирует экспоненциальный фактор $\exp(\tau)$. Наконец, при $\tau > \tau_2$, когда энергия коротковолновой турбулентности становится меньше энергии длинноволновой (по определению, $w_1(\tau_2) = w_2(\tau_2) \approx 1$), взрывной рост последней может преобладать над экспоненциальным.

Найденные аналитические выражения хорошо описывают нелинейную динамику турбулентности, формально даже вблизи критического времени τ_c. При этом, согласно оценке (26), $\tau_c \approx 21$, тогда как $\tau_2 \approx 3\tau_1 \approx 19$ и $\bar{B}(\tau_2) \approx 2\bar{B}(\tau_1) \approx B_0$, что близко к более точным результатам, получаемым из аналитического выражения (24) и численного расчета.

Таким образом, мелкомасштабная магнитная турбулентность играет существенную роль в динамике крупномасштабных квазимагнитостатических флуктуаций в анизотропной бесстолкновительной магнитоактивной плазме и позволяет им перейти к взрывному росту. Эта динамика практически не зависит от наличия слабых межчастичных столкновений, если их частота значительно меньше частоты аномальных столкновений, обусловленных рассматриваемой магнитной турбулентностью. Однако выяснение возможности взрывного накопления очень большой плотности энергии $w_1 \gg w_2$ в области волновых чисел $k \lesssim k_{\rm min}$ требует выхода за рамки предложенной двухзонной модели, в частности из-за необходимости наличия мощных сторонних источников, поддерживающих заданное значение параметра анизотропии A.

4. Заключение. Сформулированная модель динамики крупномасштабной турбулентности, полученные аналитические решения и сделанные качественные выводы могут быть распространены и на более общие случаи развития неустойчивости вейбелевского типа в многокомпонентной релятивистской слабостолкновительной магнитоактивной плазме с широким классом функций распределения частиц по скоростям (ср. [10, 27, 33]). При этом главными условиями являются i) применимость квазилинейного приближения, т.е. отсутствие сильно локализованных нелинейных токовых структур и эффективного нелинейного взаимодействия отдельных гармоник турбулентности, и ii) корректность выделения в спектре результирующей турбулентности длинноволновой и коротковолновой зон, в которых соответственно отсутствует и имеется значимый инкремент неустойчивости до возбуждения турбулентности.

В подобных условиях, согласно изложенному, при долговременном сохранении и значительной величине анизотропии распределения частиц по скоростям после насыщения мелкомасштабной турбулентности или при наличии эффективной анизотропной инжекции частиц (например, благодаря их какому-либо волновому нагреву или вследствие притока стороннего вещества) следует ожидать:

а) нелинейную неустойчивость крупномасштабных флуктуаций магнитного поля с волновыми числами, меньшими минимального значения для вейбелевской неустойчивости в заданном магнитном поле, возникающую из-за рассеяния частиц на формирующейся мелкомасштабной турбулентности;

б) рост инкремента этой неустойчивости из-за усиления аномальных столкновений за счет дополнительного рассеяния на возникающей крупномасштабной турбулентности и сверхэкспоненциальное (взрывное) нарастание ее магнитной энергии до уровня порядка или даже больше энергии насыщенной мелкомасштабной турбулентности;

в) остановку указанного взрывного процесса через время порядка нескольких времен свободного пробега незамагниченных заряженных частиц в плазме с насыщенной магнитной турбулентностью.

Предложенные простая модель и сценарий нелинейного развития крупномасштабной магнитной турбулентности требуют уточнения и детального обоснования для каждой конкретной ситуации в бесстолкновительной магнитоактивной плазме.

Строго говоря, несмотря на хорошее согласие выводов модели с численными расчетами для простейшей задачи, рассмотренной в разделе 2 настоящей работы, открытыми остаются, например, вопросы о

(1) роли неизотропности турбулентного спектра и резонансного взаимодействия его гармоник;

(2) воздействии анизотропного волнового нагрева или инжекции, например пучковой;

(3) изменении корреляционной длины случайного магнитного поля и перестройке спектра крупномасштабной турбулентности в ходе ее развития;

(4) влиянии согласованного изменения анизотропии распределения частиц по скоростям под действием меняющегося турбулентного поля в процессе неизбежного насыщения взрывной неустойчивости.

Тем не менее раздельное описание эволюции турбулентности в двух зонах волновых чисел и разработанный механизм нелинейного формирования крупномасштабного магнитного поля представляются полезными для решения ряда задач и интерпретации наблюдений в астрофизической и лабораторной неравновесной слабостолкновительной плазме [55–59]. Примерами могут служить разномасштабные квазимагнитостатические токовые структуры в солнечной короне, особенно в ее активных областях и на стадиях развития солнечных вспышек и корональных выбросов массы.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках гранта Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" # 24-1-1-97-5.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

---

1. E. S. Weibel, Phys. Rev. Lett. **2**, 85 (1959).
2. S. Hamasaki, Phys. Fluids **11**, 2724 (1959).
3. L. O. Silva, R. A. Fonseca, J. W. Tonge, W. B. Mori, and J. M. Dawson, Phys. Plasmas **9**, 2458 (2002).
4. T. N. Kato, Phys. Plasmas **12**, 080705 (2005).
5. R. C. Tautz and R. Schlickeiser, Phys. Plasmas **13**, 062901 (2006).
6. M. Lasar, R. Schlickeiser, and S. Poedts, Phys. Plasmas **16**, 012106 (2009).
7. D. Ibscher, M. Lasar, and R. Schlickeiser, Phys. Plasmas **19**, 072116 (2012).
8. O. A. Pokhotelov and M. A. Balikhin, Ann. Geophys. **30**, 1051 (2012).
9. H. S. Park, C. M. Huntington, F. Fiusa et al. (Collaboration), Phys. Plasmas **22**, 056311 (2015).
10. В. В. Кочаровский, Вл. В. Кочаровский, В. Ю. Мартьянов, С. В. Тарасов, УФН **186**, 1267 (2016).
11. A. Grassi, M. Crech, F. Amiranoff, F. Pegoraro, A. Macchi, and C. Riconda, Phys. Rev. E **95**, 023203 (2017).
12. Н. А. Емельянов, Вл. В. Кочаровский, Изв. Вузов. Радиофизика **66**, 664 (2024).
13. Z. Zhao, S. He, H. An et al. (Collaboration), Sci. Adv. **10**, eadk5229 (2024).
14. M. V. Medvedev and A. Loeb, Astrophys. J. **526**, 697 (1999).
15. B. D. Keen and M. V. Medvedev, Phys. Rev. E **88**, 013103 (2013).
16. F. V. Coroniti, Astrophys. J. **780**, 146 (2014).
17. K. I. Nishikawa, Y. Mizuno, J. L. Gomes, I. Dutan, A. Meli, J. Niemiec, O. Kobzar, M. Pohl, H. Sol, N. MacDonald, and D. H. Hartmann, Galaxies **7**, 7010029 (2019).
18. A. Peer, Galaxies **7**, 7010033 (2019).
19. K. I. Nishikawa, I. Dutan, C. Cohn, and Y. Mizuno, Living Rev. Comput. Astrophys **7**, 1 (2021).
20. M. Zhou, V. Zhdankin, M. W. Kunz, N. F. Loureiro, and D. A. Uzdensky, PNAS **119**, e2119831119 (2022).
21. H. Takabe, Phys. Plasmas **30**, 030901 (2023).
22. M. Zhou, V. Zhdankin, M. W. Kunz, N. F. Loureiro, and D. A. Uzdensky, Astrophys. J. **960**, 157 (2024).
23. T. Jikei, T. Amano, and Y. Matsumoto, Astrophys. J. **961**, 157 (2024).
24. J. W. Wallace, J. U. Brackbill, C. W. Cranfill, D. W. Forslund, and R. J. Mason, Phys. Fluids **30**, 1085 (1987).
25. A. Bret, M. C. Firpo, and C. Deutsch, Phys. Rev. Lett. **94**, 115002 (2005).
26. L. Ji-Wei and P. Wen-Bing, Chin. Phys. Lett. **22**, 1976 (2005).
27. U. Schaefer-Roffls, I. Lerche, and R. Schlickeiser, Phys. Plasmas **13**, 12107 (2006).
28. A. Stockem, I. Lerche, and R. Schlickeiser, Astrophys. J. **659**, 419 (2007).
29. M. Mahdavi and H. Khanzadeh, Phys. Plasmas **20**, 052114 (2013).
30. D. D. Ryutov, F. Fiuza, C. M. Huntington, J. S. Ross, and H. S. Park, Phys. Plasmas **21**, 032701 (2014).

31. Aman-ur-Rehman, S. Ali Shan, and T. Majeed, Phys. Plasmas **24**, 22113 (2017).
32. K. M. Schoeffler and O. Silva, Phys. Rev. Research **2**, 033233 (2020).
33. A. A. Kuznetsov, V. V. Kocharovsky, Vl. V. Kocharovsky, A. A. Nechaev, and M. A. Garasev, Plasma Phys. Rep. **48**, 973 (2022).
34. N. A. Emelyanov and Vl. V. Kocharovsky, Plasma Phys. Rep. **50**, 199 (2024).
35. R. L. Morse and C. W. Nielson, Phys. Fluids **14**, 830 (1971).
36. R. C. Davidson, D. A. Hammer, I. Haber, and C. E. Wagner, Phys. Fluids **15**, 317 (1972).
37. T. Y. Yang, J. Arons, and A. B. Langdon, Phys. Plasmas **1**, 3059 (1994).
38. A. Karmakar, N. Kumar, G. Shvets, O. Polomarov, and A. Pukhov, Phys. Rev. Lett **101**, 255001 (2008).
39. Л. В. Бородачев, М. А. Гарасев, Д. О. Коломиец, Вл. В. Кочаровский, В. Ю. Мартьянов, А. А. Нечаев, Изв. Вузов. Радиофизика **59**, 991 (2017).
40. H. Takabe and Y. Kuramitsu, High Power Laser Science and Engineering **9**, 49 (2021).
41. L. Sironi, L. Comisso, and R. Golant, Phys. Rev. Lett. **131**, 055201 (2023).
42. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, *Электродинамика плазмы*, Наука, М. (1974).
43. A. Achterberg, J. Wiersman, and C. A. Norman, A&A **475**, 19 (2007).
44. O. A. Pokhotelov and O. A. Amariutei, Ann. Geophys. **29**, 1997 (2011).
45. C. Ruyer, L. Gremillet, A. Debayle, and G. Bonnaud, Phys. Plasmas **22**, 032102 (2015).
46. M. V. Medvedev, arXiv:1705.03169, (2017).
47. А. А. Кузнецов, А. А. Нечаев, М. А. Гарасев, Вл. В. Кочаровский, ЖЭТФ **137**, 966 (2023).
48. В. В Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Современная электродинамика*, Институт компьютерных исследований, М. (2005).
49. R. L. Berger and R. C. Davidson, Phys. Fluids. **15**, 2327 (1972).
50. В. Дикасов, Л. Рудаков, Д. Рютов, ЖЭТФ **21**, 913 (1965).
51. R. C. Davidson, *Methods in nonlinear plasma theory*, Academic Press, N.Y. (1972).
52. М. И. Рабинович, В. В. Реутов, Изв. Вузов. Радиофизика **16**, 815 (1973).
53. A. D. D. Craik, *Wave interactions and fluid flows*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).
54. B. R. Safdi and H. Segur, Phys. Rev. Lett **99**, 245004 (2007).
55. S. C. Cowley, B. Cowley, S. A. Henneberg, and H.R. Wilson, Proc. R. Soc. A **471**, 20140913 (2015).
56. H. R. Wilson and S. C. Cowley, Phys. Rev. Lett **97**, 175006 (2004).
57. V. V. Fomichev, S. M. Fainshtein, and G. P. Chernov, Plasma Phys. Rep. **44**, 905 (2018).
58. M. Lasar, R. Lopez, S. Shaaban, S. Poedts, P. H. Yoon, and H. Fichtner, Front. Astron. Space Sci. **8**, 777559 (2022).
59. D. B. Graham, G. Cozzani, Y. V. Khotyaintsev et al. (Collaboration), Space Sci. Rev. **221**, 20 (2025).