Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 4, с. 208 – 213

Принцип виртуального кожуха в моделях с 2D плазмой и 3D стенкой в токамаке

В. Д. Пустовитов[+*], *М. Е. Суховицкая*[+*1)]

[+] *Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123098 Москва, Россия*

[*] *Национальный исследовательский институт МФТИ, 141701 Долгопрудный, Россия*

Поступила в редакцию 19 мая 2025 г.
После переработки 19 мая 2025 г.
Принята к публикации 10 июля 2025 г.

Оценивается ошибка в описании магнитного поля, возникающая при наложении условия, что внешнее трехмерное (3D) возмущение $\mathbf{b}$ не проникает в плазму в токамаке. Такой прием применяется при решении задач эволюции равновесной плазмы в коде CarMa [F. Villone, L. Barbato, S. Mastrostefano, and S. Ventre, Plasma Phys. Control. Fusion **55**, 095008 (2013)], когда плазма рассматривается как двумерный объект (2D), а стенка вакуумной камеры — 3D. Тороидальная поверхность, разделяющая 2D и 3D области, называется coupling surface (CS), она выполняет функцию виртуального кожуха, но с дополнительным условием $\mathbf{b} = 0$ внутри CS. Здесь обращается внимание на тот факт, что в обычной ситуации поле $\mathbf{b}$ между плазмой и стенкой должно зависеть от реакции плазмы, но задание $\mathbf{b} = 0$ внутри тора CS в значительной степени устраняет эту неопределенность. При этом неизбежно возникает скачок тангенциальной компоненты $\mathbf{b}$ на CS, что требует наличия тока на этой поверхности. Оценивается величина этого фиктивного тока и его вклад в магнитное возмущение $\mathbf{b}$. Показано, что он существенно влияет на величину и распределение поля $\mathbf{b}$.

DOI: 10.31857/S0370274X25080151, EDN: ELKBCR

Введение. В идеале токамаки должны быть аксиально симметричными системами (2D), но часто динамические процессы сопровождаются генерацией трехмерных (3D) магнитных возмущений [1], поэтому в общем случае магнитное поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \tag{1}$$

имеет две составляющие: однородную вдоль тора $\mathbf{B}_0$ и трехмерное возмущение $\mathbf{b}$. В реальных токамаках свой вклад в нарушение симметрии вносит и металлическое окружение (далее будем говорить о стенке вакуумной камеры). Магнитные поля, создаваемые токами в стенке при переходных процессах, существенно влияют на равновесие и устойчивость тороидальной плазмы [1–4], поэтому полное описание движения плазмы должно включать в себя и решение внешней задачи для $\mathbf{B}$.

Плазма – легкая газообразная среда, практически мгновенно реагирующая на вариации давления, тока и внешних условий изменением своей формы и положения. Это существенно усложняет нахождение условий равновесия плазмы (локального баланса сил) [1–9], особенно при нарушении 2D симметрии. При этом, если был бы задан источник возмущения, нахождение индуцированных токов в неподвижных внешних проводниках свелось бы к стандартной электродинамической задаче. Можно сказать, что полное рассмотрение равновесия плазмы и ее эволюции требует одновременного решения двух принципиально разных, но тесно связанных задач, в которых взаимодействие подвижной плазмы pl с внешними токами (в неподвижных катушках и в стенке) осуществляется через магнитное поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{pl}} + \mathbf{B}^{\mathrm{w}} + \mathbf{B}^{\mathrm{c}}, \tag{2}$$

где $\mathbf{B}^{\mathrm{w}}$ – вклад от стенки, а $\mathbf{B}^{\mathrm{c}}$ – от управляющих катушек. Необходимое согласование можно осуществить через задание граничных условий для $\mathbf{B}$ на подходящей тороидальной поверхности между плазмой и стенкой (coupling surface, CS). Так делается при соединении кодов, один из которых служит для решения задач равновесия плазмы, а второй – для нахождения входящих в (2) полей от токов во внешних закрепленных проводниках. Последнее требует решения только уравнений Максвелла, дополненных законом Ома для стенки, см. [1–4, 7, 9–12]. Для этого можно воспользоваться хорошо развитыми методами прикладной электродинамики. Их уровень настолько высок, что они позволяют учесть тот факт, что в ре-

1)e-mail: sukhovitskaia.me@phystech.edu

альном эксперименте тороидальная стенка с разрезами, окнами и патрубками неизбежно асимметрична и поэтому генерирует 3D поле $\mathbf{b}$ при $\partial\mathbf{B}_0/\partial t \neq 0$.

Однако полный 3D расчет с учетом такого $\mathbf{b}$ во всем объеме является довольно сложной задачей из-за подвижности плазмы, что вынуждает вносить упрощения при построении моделей. Для токамаков развито множество методов, основанных на уравнении Грэда–Шафранова, в которых плазма считается симметричной (2D), поэтому в качестве первого шага для учета влияния неоднородностей стенки были предложены сочетания 2D + 3D кодов [7, 9–14]. Например, в [13] плазма описывалась с помощью 2D кода DINA, потом заменялась набором кольцевых токов, а элементы бланкета рассматривались как трехмерные. Широко известны результаты расчетов с помощью кода CarMa и его модификации CarMa0NL, в которых плазма моделируется как 2D объект, а стенка как 3D [7, 10–12, 15, 16].

При образовании подобных пар 2D + 2D [5, 7, 18] или 3D + 3D [9, 14, 19–21] наилучшей CS оказывается граница плазмы, хотя по формальным критериям любая замкнутая магнитная поверхность в вакууме, охватывающая плазму, ничуть не хуже [22]. В этих случаях соединение разных кодов производится математически безупречно с помощью так называемого принципа виртуального кожуха [5, 6, 17, 18, 22–25].

В работах [9, 14] принцип виртуального кожуха используется для сшивки 3D кодов JOREK и CARIDDI или STARWALL соответственно, но при этом подразумевается, что CS является аксиально-симметричной. Более того, в так называемой редуцированной МГД модели в коде JOREK магнитные поля также описываются как аксиально-симметричные (см., например, уравнения (1) и (2) в [9] и (7) в [14]).

Подобная сшивка 2D + 3D областей, как в [7, 10–12, 15, 16], потребовала бы выполнения условия

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_0+\mathbf{b})=0 \tag{3}$$

на CS, где $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к CS. Если плазма считается двумерной, то такой же должна быть и CS. Тогда уравнение (3) распадается на две части: $\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{n}=0$ и

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}=0. \tag{4}$$

Если первое естественно вписывается в 2D часть задачи, то второе, очевидно, является модельным приближением. Действительно, в токамаке $\mathbf{b}=\mathbf{b}^{\mathrm{pl}}+\mathbf{b}^{\mathrm{w}}+\mathbf{b}^{\mathrm{c}}$, поэтому (4) требует $\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}^{\mathrm{w}}=0$ при задании $\mathbf{b}^{\mathrm{pl}}=\mathbf{b}^{\mathrm{c}}=0$, что в такой постановке возможно лишь при $\mathbf{b}^{\mathrm{w}}=0$ внутри CS, тогда как подобные алгоритмы создаются для учета $\mathbf{b}^{\mathrm{w}}\neq 0$ за ее пределами. Несовместность этих двух требований вызывает вопрос о величине ошибки в описании $\mathbf{b}$, когда внутри тора CS принудительно задается $\mathbf{b}=0$, а снаружи $\mathbf{b}\neq 0$. Мы покажем, что в стандартной геометрии токамака эта ошибка должна быть неприемлемо большой.

Здесь мы рассматриваем распределение магнитного поля $\mathbf{b}$ между плазмой и проводящей стенкой вакуумной камеры токамака, разделенных поверхностью CS с условием (4). Используется модель токамака с круглыми поперечными сечениями плазмы, тонкой стенки и CS.

Постановка задачи. Стандартным приемом сопряжения (coupling) внутренней и внешней задач равновесия тороидальной плазмы является принцип виртуального кожуха [5, 6, 17, 18, 22–25], который основан на использовании равенства

$$\mu_0 d\mathbf{j}=\mathbf{n}\times\mathbf{B}\big|_{\mathrm{in}}^{\mathrm{out}}, \tag{5}$$

связывающего магнитное поле на внешней (out) и внутренней (in) сторонах произвольного тонкого слоя с толщиной d и плотностью тока $\mathbf{j}$ в этом слое. Это равенство универсально, оно является прямым следствием закона Ампера $\mu_0\mathbf{j}=\nabla\times\mathbf{B}$. Если материал немагнитный (как обычно стенка вакуумной камеры токамака), то μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Из (5), в частности, следует, что при выполнении условия (3) поле $\mathbf{B}^{\mathrm{pl}}$ во внешней области V_{out} (вне плазмы) должно совпадать с полем тока

$$\mathbf{j}_{\mathrm{cs}}=(\mu_0 d)^{-1}\mathbf{n}\times\mathbf{B}\big|_{\mathrm{out}}, \tag{6}$$

"текущего" по поверхности плазмы. Это известное следствие уравнений Максвелла (см., например, уравнения (23) в разделе 4.15 в [26] или (10) в [22]) вошло в теорию равновесия тороидальной плазмы как принцип виртуального кожуха после публикаций [17] и [18].

Геометрия задачи показана на рис. 1 и 2. Между плазмой и стенкой вводится тороидальная поверхность, называемая coupling (control) surface. Она задается как резкая граница, разделяющая области с разным описанием магнитного поля $\mathbf{B}$, см. (1). Следуя [7, 10–12, 15, 16], будем считать, что

$$\mathbf{b}=0 \tag{7}$$

внутри тора CS, а снаружи $\mathbf{b}\neq 0$. Сама поверхность CS считается аксиально-симметричной, поэтому соотношение (6) распадается на два: стандартное для $\mathbf{B}_0$ и $\mathbf{j}_{\mathrm{cs}}^{\mathrm{2D}}$, как в [17, 18, 24], и для $\mathbf{b}$ и $\boldsymbol{i}_{\mathrm{cs}}\equiv\mathbf{j}_{\mathrm{cs}}^{\mathrm{3D}}d$:

$$\mathbf{n}\times\mathbf{b}\big|_{\mathrm{out}}=\mu_0\boldsymbol{i}_{\mathrm{cs}}. \tag{8}$$

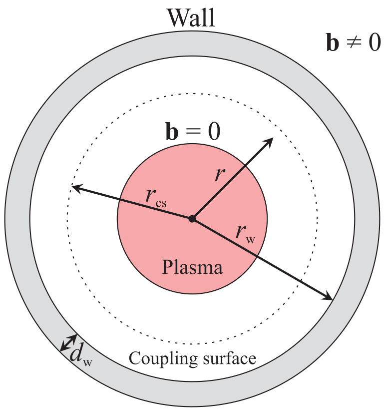

Рис. 1. (Цветной онлайн) Основные элементы задачи в поперечном сечении $\zeta = \text{const}$ – плазма, резистивная стенка и coupling surface (CS) в вакуумном зазоре, обозначенная пунктиром. Здесь $r_{\rm cs}$ – малый радиус CS, $r_{\rm w}$ и $d_{\rm w}$ – внутренний радиус и толщина стенки соответственно. Стенка считается тонкой, т.е. $d_{\rm w}/r_{\rm w} \ll 1$

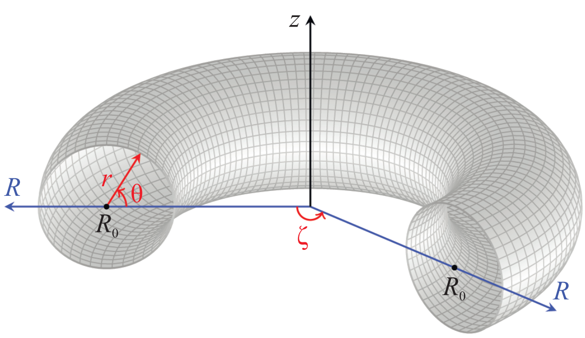

Рис. 2. (Цветной онлайн) Геометрия задачи. Плазма и стенка считаются круглыми в поперечном сечении, R_0 – больший радиус тора, θ – полоидальный угол, ζ – тороидальный угол, (r, θ, ζ) – квазицилиндрические координаты, $R = R_0 - r\cos\theta$

Это равенство явно показывает наличие противоречия в постановке задачи, если на CS имеется скачок тангенциальной компоненты $\mathbf{b}$. Этот скачок возможен лишь при $\boldsymbol{i}_{\rm cs} \neq 0$, но в такой модели ток $\boldsymbol{i}_{\rm cs}$, представляющий интегральный эффект от отсутствующих в 2D плазме 3D токов, должен быть тождественно равен нулю. Остается выяснить, насколько большим окажется фиктивный ток на CS в задачах, для решения которых предназначалось подобное разделение областей с 2D и 3D описанием поля $\mathbf{B}$.

Как разъяснялось выше, поле $\mathbf{b}^{\rm cs}$, создаваемое таким током на CS, должно совпадать с $\mathbf{b}^{\rm pl}$ вне CS. Однако, в задачах с 2D плазмой $\mathbf{b}^{\rm pl} = 0$. В работах [7, 10–12, 15, 16], где такая поверхность вводилась, это противоречие не упоминалось, как и сам факт наличия $\mathbf{b}^{\rm cs} \neq 0$, что оставляет единственную интерпретацию возмущения $\mathbf{b}$ вне тора CS как создаваемого только токами в стенке. Такое сочетание с (7) было бы возможно при одновременном выполнении двух условий: $\mathbf{b}^{\rm cs} = -\mathbf{b}^{\rm w}$ внутри тора CS и $|\mathbf{b}^{\rm cs}| \ll |\mathbf{b}^{\rm w}|$ вне его.

Если бы речь шла о токах, создающих однородное тороидальное поле, то эти условия были бы совместны: собственное поле токов на CS было бы отлично от нуля лишь внутри тора CS. Нас, однако, интересуют винтовые возмущения, у которых нормальная компонента $\mathbf{b}^{\rm w}$ (и соответственно $\mathbf{b}^{\rm cs}$) неизбежно должна быть ненулевой на CS. Разрешение противоречия в первую очередь необходимо для правильной интерпретации данных магнитных измерений при использовании результатов 2D + 3D моделирования. Кроме того, оно нужно для построения алгоритмов вычисления электромагнитных сил, возникающих при срывах из-за асимметрии $\mathbf{b}$ [16, 27].

Здесь будем рассматривать геометрию, как в [27], считая плазму и резистивную тонкую стенку круглыми, и использовать квазицилиндрическую систему координат (r, θ, ζ), как показано на рис. 2. Новым по сравнению с [27] будет введение коаксиальной CS и требование $\mathbf{b} = 0$ внутри CS. Последнее означает, что поле $\mathbf{b}$ вне CS создается только токами, внешними по отношению к плазме. Сама же плазма никакого вклада в $\mathbf{b}$ не дает.

В токамаках наиболее опасны винтовые гармоники с малыми номерами мод m и n по полоидальному и тороидальному обходам соответственно. Для их описания воспользуемся приемом, предложенным в [28]. В тороидальных системах с большим аспектным отношением $R_0/r_{\rm w}$ (отношение большого радиуса к малому) решение уравнения $\nabla^2\Phi = 0$ с учетом поправок, линейных по $r_{\rm w}/R_0$, можно представить в виде

$$\Phi = \sqrt{\frac{R}{R_0}}\varphi, \tag{9}$$

где функция φ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_0^2\varphi = 0 \tag{10}$$

с оператором Лапласа ∇_0^2, не содержащим зависимости от тороидальности. Иначе говоря, φ – решение цилиндрического уравнения Лапласа, а тороидальность системы в линейном приближении учтена в множителе в (9).

Винтовые возмущения b при наличии CS. В цилиндрической модели конфигурацию w + CS можно представить как два соосных цилиндра с радиусами $r_{\rm w}$ и $r_{\rm cs}$. Магнитное поле

$$\mathbf{b} = \nabla\varphi \tag{11}$$

от токов, текущих по поверхностям w и CS, определяется функцией

$$\varphi = \varphi^{\mathrm{w}} + \varphi^{\mathrm{cs}}. \qquad (12)$$

В общем случае нужно учитывать набор гармоник. Их тороидальное зацепление учтено в (9), но в (10) они присутствуют как линейно независимые. Для каждой из гармоник φ^{w} и φ^{cs} можно воспользоваться решением уравнения (10), предложенным в [28]:

$$\varphi^s = A_s \sin(m\theta - n\zeta) \begin{cases} K'_m(u_s) I_m(u), & r < r_s \\ I'_m(u_s) K_m(u), & r \geq r_s, \end{cases} \qquad (13)$$

где $s = \{\mathrm{w}, \mathrm{CS}\}$, $u = n\varepsilon$ с $\varepsilon = r/R_0$, A_s – зависящая от времени амплитуда, штрихом обозначена производная по аргументу u функций Бесселя K_m и I_m.

Граничные условия (5) для каждой из поверхностей

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{b}^{\mathrm{out}} - \mathbf{b}^{\mathrm{in}}) = \mu_0 \boldsymbol{i}^s, \qquad (14)$$

где $\boldsymbol{i}^s$ – линейная плотность тока на поверхности s, дают

$$A_s = \mu_0 i^s_{m,n} r_s \varepsilon_s \frac{n}{m}, \qquad (15)$$

где $\varepsilon_s \equiv \varepsilon(r_s)$, $i^s_{m,n}$ – гармоника (m, n) поверхностного тока $\boldsymbol{i}$ на s.

В нашей задаче присутствуют две поверхности – CS и стенка, а радиальные зависимости φ^{w} и φ^{cs} при $r < r_{\mathrm{cs}}$ одинаковы. Поэтому требование задачи $\mathbf{b} = 0$ внутри тора CS сводится к

$$A_{\mathrm{cs}} K'_m(u_{\mathrm{cs}}) = -A_{\mathrm{w}} K'_m(u_{\mathrm{w}}), \qquad (16)$$

что эквивалентно равенству

$$\frac{i^{\mathrm{cs}}_{m,n}}{i^{\mathrm{w}}_{m,n}} = -x_{\mathrm{cs}}^{-2} \frac{K'_m(u_{\mathrm{w}})}{K'_m(u_{\mathrm{cs}})}. \qquad (17)$$

Здесь введены обозначения

$$x = \frac{r}{r_{\mathrm{w}}} \qquad (18)$$

и $x_{\mathrm{cs}} = x(r_{\mathrm{cs}})$. Для оценок при $n\varepsilon \ll 1$ можно воспользоваться приближенным следствием (17)

$$\frac{i^{\mathrm{cs}}_{m,n}}{i^{\mathrm{w}}_{m,n}} \approx -x_{\mathrm{cs}}^{m-1}. \qquad (19)$$

Оно показывает, что при больших m ток на поверхности пренебрежимо мал по сравнению с током на стенке. Однако при реалистичных $x_{\mathrm{cs}} \geq 0.7$ и малых m величины токов на стенке и CS сопоставимы. Именно этот случай представляет наибольший интерес в задачах с сильным электромагнитным взаимодействием плазма–стенка. В [16, 27, 29], например, основным драйвером боковой силы, была мода с $m = 1$.

Полное магнитное поле является суммой полей, создаваемых током, текущим по CS и стенке. Выразив составляющие b_r^{w} и b_r^{cs} из (13) с учетом (15) и (17), при $n\varepsilon \ll 1$ получим

$$\frac{b_r^{m,n}}{b_r^{m,n}(r_{\mathrm{w}})} = x^{-m-1} \cdot \begin{cases} 0, & x < x_{\mathrm{cs}} \\ \dfrac{x_{\mathrm{cs}}^{2m} - x^{2m}}{x_{\mathrm{cs}}^{2m} - 1}, & x_{\mathrm{cs}} \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \qquad (20)$$

Приближение (20) является достаточно хорошим, его отклонение от более точного решения (13) для разумных значений $x \sim 0 \div 2$ составляет порядка 1–2 %.

Распределение полей (13) показано для гармоник $(m, n) = (1, 1)$ на рис. 3 (сверху) и для $(m, n) = (2, 1)$ на рис. 3 (снизу). Здесь зависимость от n, возникающая из-за присутствия n в аргументе функций Бесселя в (13), слаба.

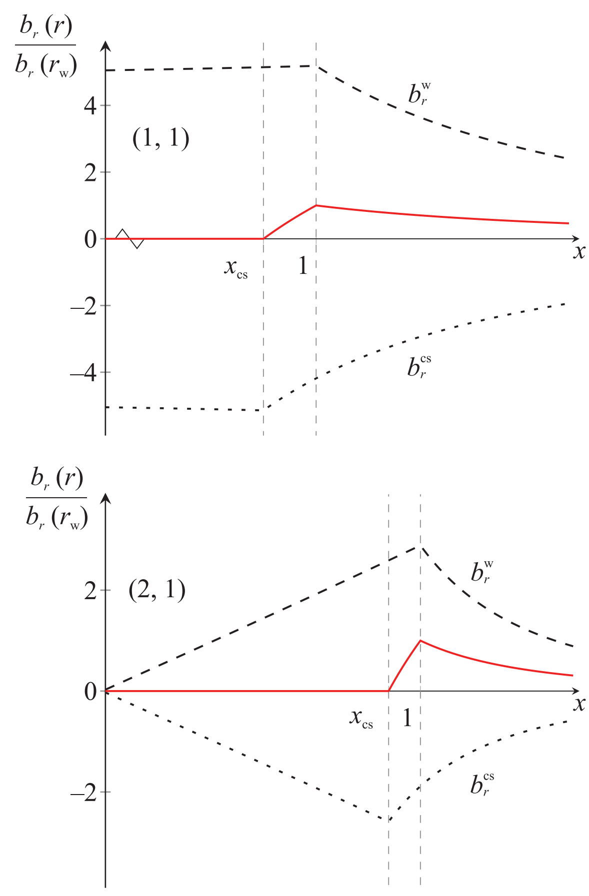

Рис. 3. (Цветной онлайн) Радиальная зависимость b_r для гармоник $(1, 1)$ вверху и $(2, 1)$ внизу. Пунктирная кривая – поле от стенки, штрих-пунктирная – от CS, красная сплошная – суммарное поле. Взяты значения $\varepsilon_{\mathrm{w}} = 1/3$ и $x_{\mathrm{cs}} = 0.9$

В упомянутых работах, использующих CS, включая [16] с вычислением порождаемой $\mathbf{b}$ силы, явно не указывается, но предполагается, что поле $\mathbf{b}$ создается токами в стенке, что было бы верно при $|\mathbf{b}^{\mathrm{cs}}| \ll |\mathbf{b}|$. Однако на рис. 3 отчетливо видно, что $|\mathbf{b}^{\mathrm{cs}}|$ значительно превышает $|\mathbf{b}|$ в диапазоне $0 \le x \le 2$, который включает и стенку, где требуется рассчитывать наведенные токи, и вакуумные области, где могут располагаться магнитные зонды. Из (13) мы получим

$$\frac{|\mathbf{b}^{\mathrm{cs}}|}{|\mathbf{b}|} \sim 4 \div 5 \qquad (21)$$

при $\varepsilon_{\mathrm{w}} = 1/3$. При этом поле, создаваемое токами на CS, сравнимо с полем токов в стенке.

Доказанная необходимость большого винтового тока на CS для подавления $\mathbf{b}^{\mathrm{w}}$ при $x < x_{\mathrm{cs}}$ – следствие слабой радиальной зависимости $\mathbf{b}^{\mathrm{w}}$ для мод с низкими (m, n). Она явно показана на рис. 3. Магнитные зонды в токамаке измеряют полное поле. Именно полное $\mathbf{b}$ фигурирует в моделях [16, 27, 29] расчета боковых сил при срывах. Здесь величина $b_r = b_r^{\mathrm{w}} + b_r^{\mathrm{cs}}$, обозначенная сплошной кривой на рис. 3, оказалась заметно ниже b_r^{w} при реалистических $\varepsilon_{\mathrm{w}} = 1/3$ и $x_{\mathrm{cs}} = 0.9$, хотя в моделях с 2D плазмой ожидается, что результат расчета вне плазмы должен быть $b_r \approx b_r^{\mathrm{w}}$.

В теории равновесия тороидальной плазмы виртуальный кожух – это поверхность, ток на которой полностью заменяет ток в плазме. Это означает, в частности, что $\mathbf{b}^{\mathrm{cs}}$ должно равняться $\mathbf{b}^{\mathrm{pl}}$ во внешней области V_{out}. Однако по условию задачи $\mathbf{b}^{\mathrm{pl}} = 0$, поэтому доказанная необходимость очень большого $\mathbf{b}^{\mathrm{cs}}$, как в (21), является демонстрацией скрытого недостатка этого метода для 2D плазмы в присутствии 3D стенки.

Заключение. Для подхода с использованием CS [7, 10–12, 15, 16], которая вводится как поверхность, разделяющая область с трехмерным возмущением $\mathbf{b} \neq 0$ и двумерную плазму с $\mathbf{b} = 0$, получены аналитические выражения для полей $\mathbf{b}^{\mathrm{cs}}$ и $\mathbf{b}^{\mathrm{w}}$, создаваемых токами на CS и на стенке соответственно. Рассмотрение проведено для аксиально-симметричного токамака с круглыми в поперечном сечении стенкой, плазмой и CS. Представленные результаты показывают, что магнитное поле $\mathbf{b}$, рассматриваемое в $2\mathrm{D} + 3\mathrm{D}$ моделях, нельзя интерпретировать как поле от 3D токов в стенке. Более того, отличие $\mathbf{b}$ от $\mathbf{b}^{\mathrm{w}}$ оказывается очень большим. Это, в частности, требует пересмотра некоторых оценок в [16]. Наличие в задаче поля $\mathbf{b}^{\mathrm{cs}}$, не имеющего реальных источников, следует учитывать при сравнении результатов численных расчетов с данными магнитных измерений.

Авторы благодарны экспертам ITPA из группы по МГД за обсуждение работ с кодами CarMa и JOREK.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Национальный исследовательского центра “Курчатовский институт”. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. T. C. Hender, J. C. Wesley, J. Bialek et al. (Collaboration), Nucl. Fusion **47**, S128 (2007).
2. V. D. Shafranov, *Plasma equilibrium in a magnetic field*, in *Reviews of Plasma Physics*, ed. by M. A. Leontovich, Consultants Bureau, N.Y. (1966), v. 2, p. 103.
3. J. Freidberg, *Ideal magnetohydrodynamics*, Plenum Press., N.Y. (1987).
4. V. D. Pustovitov, J. Plasma Phys. **81**, 905810609 (2015).
5. L. E. Zakharov and V. D. Shafranov, *Equilibrium of current-carrying plasmas in toroidal configurations*, in *Reviews of Plasma Physics*, ed. by M. A. Leontovich and B. B. Kadomtsev, Consultants Bureau, N.Y. (1986), v. 11, p. 153.
6. V. D. Pustovitov, *Theoretical principles of the plasma-equilibrium control in stellarators*, in *Reviews of Plasma Physics*, ed. by B. B. Kadomtsev and V. D. Shafranov, Springer US, Boston (2000), v. 21, p. 1.
7. F. Villone, L. Barbato, S. Mastrostefano, and S. Ventre, Plasma Phys. Control. Fusion **55**, 095008 (2013).
8. A. B. Mikhailovskii, *Instabilities in a Confined Plasma*, CRC Press, Boca Raton, Florida (2017).
9. N. Isernia, N. Schwarz, F. J. Artola, S. Ventre, M. Hoelzl, G. Rubinacci, and F. Villone, Phys. Plasmas **30**, 113901 (2023).
10. R. Albanese, Y. Q. Liu, A. Portone, G. Rubinacci, and F. Villone, IEEE Trans. Magn **44**, 1654 (2008).
11. A. Portone, F. Villone, Y. Liu, R. Albanese, and G. Rubinacci, Plasma Phys. Control. Fusion **50**, 085004 (2008).
12. F. Villone, L. Barbato, S. Mastrostefano, and S. Ventre, Plasma Phys. Control. Fusion **54**, 085003 (2012).
13. D.-H. Kim, D.-K. Oh, S. Pak, H. Jhang, J. Lee, and V. Rozov, Fusion Eng. Des. **85**, 1747 (2010).
14. R. Sparago, F. J. Artola, and M. Hoelzl, Plasma Phys. Control. Fusion **67**, 045021 (2025).
15. G. Ramogida, G. Maddaluno, F. Villone, R. Albanese, L. Barbato, F. Crisanti, S. Mastrostefano, R. Mazzuca, R. Palmaccio, G. Rubinacci, S. Ventre, and R. Wenninger, Fusion Eng. Des. **96–97**, 348 (2015).
16. V. Yanovskiy, N. Isernia, V. D. Pustovitov, and F. Villone, Nucl. Fusion **62**, 086001 (2022).

17. V. D. Shafranov and L. E. Zakharov, Nucl. Fusion **12**, 599 (1972).
18. L. E. Zakharov, Nucl. Fusion **13**, 595 (1973).
19. P. Merkel, J. Comput. Phys. **66**, 83 (1986).
20. S. Hirshman, W. van Rij, and P. Merkel, Comput. Phys. Commun. **43**, 143 (1986).
21. P. Merkel, Nucl. Fusion **27**, 867 (1987).
22. V. D. Pustovitov, Plasma Phys. Control. Fusion **50**, 105001 (2008).
23. J. D. Hanson, Plasma Phys. Control. Fusion **57**, 115006 (2015).
24. V. D. Pustovitov, Plasma Phys. Rep. **45**, 1114 (2019).
25. D. Malhotra, A. J. Cerfon, M. O'Neil, and E. Toler, Plasma Phys. Control. Fusion **62**, 024004 (2020).
26. J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, Wiley, Hoboken, New Jersey (2015).
27. D. V. Mironov and V. D. Pustovitov, Phys. Plasmas **24**, 092508 (2017).
28. A. I. Morozov and L. S. Solov'ev, *The Structure of Magnetic Fields*, in *Reviews of Plasma Physics*, ed. by M. A. Leontovich, Consultants Bureau, N.Y. (1966), v. 2, p. 1.
29. V. D. Pustovitov, Nucl. Fusion **62**, 026036 (2022).