Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 4, с. 214 – 219

Эффекты сильной турбулентности волн на воде

Е. А. Кочурин[+*1)], *Е. А. Кузнецов*[*×○1)]

[+]*Институт электрофизики Уральского отделения РАН, 620016 Екатеринбург, Россия*

[*]*Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия*

[×]*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[○]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

Поступила в редакцию 22 июля 2025 г.
После переработки 22 июля 2025 г.
Принята к публикации 24 июля 2025 г.

Представлены результаты прямого численного моделирования плоско-симметричной турбулентности волн на воде для потенциальных течений в рамках конформных переменных с учетом низкочастотной накачки и высокочастотного затухания вязкого типа. В данной модели для широкого диапазона амплитуд накачки не обнаружен режим слабой турбулентности. Показано, что для типичных параметров турбулентности главными эффектами являются процессы опрокидывания волн, формирования на их гребнях каспов, которые вносят основной вклад в спектры турбулентности с зависимостью от частоты и волнового числа с одной и той же степенью, равной -4. В этом сильно нелинейном режиме плотность вероятности крутизны волн при больших отклонениях имеет степенные хвосты, ответственные за перемежаемость турбулентности.

DOI: 10.31857/S0370274X25080166, EDN: FIUKEN

Введение. Хорошо известно, что основным механизмом затухания морского волнения даже при умеренной ветровой накачке является опрокидывание волн (см., например, [1]). Как показывают многочисленные наблюдения, процесс опрокидывания начинается на гребне волны в перпендикулярном направлении к его фронту. Этот процесс носит одномерный характер. На начальном этапе опрокидывания в профиле волны происходит формирование особенности в виде острия. Таким образом, в заданной точке x_0 профиль отклонения поверхности $y = \eta(t)$ и его производная $d\eta(t)/dt$ до момента опрокидывания $t = t_0$ остаются гладкими функциями времени. При $t = t_0$ производная $d\eta(t)/dt$ испытывает скачок, а ее производная будет пропорциональна δ-функции времени. Таким образом, в точке наблюдения $x = x_0$ вторую производную от $\eta(t)$ можно записать в виде

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum_i \Gamma_i \delta(t - t_i) + \text{regular terms}, \qquad (1)$$

где t_i – времена формирования особенностей, Γ_i – скачок величины $d^2\eta/dt^2$ в момент формирования сингулярности. Совершая преобразование Фурье от сингулярной части (1), получаем зависимость η_ω от частоты:

$$\eta_\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega^2} \sum_i \Gamma_i e^{-i\omega t_i}.$$

Считая величины Γ_i и t_i случайными, отсюда после усреднения находится вклад от сингулярностей в спектр E_ω:

$$E_\omega = \frac{g}{2\pi T} \langle |\eta_\omega|^2 \rangle = \frac{g\nu}{2\pi\omega^4} \langle \Gamma^2 \rangle, \qquad (2)$$

где g – ускорение поля тяжести, T – время осреднения, ν – средняя частота появления особенностей, угловые скобки $\langle ... \rangle$ означают усреднение по времени. Спектр (2) был получен в работе [2]. Важно отметить, что зависимость (2) от частоты, пропорциональная ω^{-4}, совпадает со спектром слабой турбулентности Захарова–Филоненко [3], который к настоящему времени очень хорошо воспроизведен как экспериментально, так и численно для изотропного распространения волн на воде (см. обзор [4] и ссылки в нем). Это совпадение чисто случайное, поскольку спектр слабой турбулентности предполагает слабо нелинейный режим, когда нелинейность мала по сравнению с дисперсией линейных гравитационных волн на глубокой воде

$$\omega = \sqrt{gk}. \qquad (3)$$

1)e-mail: kochurin@iep.uran.ru; kuznetso@itp.ac.ru

Спектр (2) соответствует сильной нелинейности, когда характерные градиенты $\eta(x,t)$ не являются малыми.

Из этих же соображений в одномерной постановке $d = 1$ зависимость спектра в режиме сильной турбулентности от волнового числа k имеет такую же степенную зависимость, что и частотный спектр (2): $E_k \propto k^{-4}$. Как было показано в [2], в двумерной постановке спектр от k сохраняет ту же степенную зависимость, что и при $d = 1$: $\propto k^{-4}$. Тот факт, что наклон спектров E_ω и E_k одинаков как в частотной области, так и в области волновых чисел подразумевает, что вместо корневой зависимости в дисперсионном соотношении (3) имеет место линейная связь $\omega \sim k$. Это противоречие объясняется тем, что на сильно нелинейной стадии эволюции закон дисперсии $\omega = \omega(k)$ может существенно отклоняться от (3).

В данной работе рассмотрена задача о турбулентности поверхностных гравитационных волн на глубокой воде в одномерной плоско-симметричной постановке. Для численного моделирования мы используем конформное преобразование, отображающее область течения в нижнюю полуплоскость [5, 6]. Переход к конформным переменным позволяет эффективно выявлять появление особенностей на свободной поверхности и исследовать сильную турбулентность поверхностных волн. Прямое численное интегрирование уравнений Эйлера для потенциальных течений с учетом граничных условий на свободной поверхности является весьма трудоемкой задачей, по этой причине она до сих пор полностью не решена.

Следует отметить, что в одномерной постановке классический спектр Захарова–Филоненко [3] не реализуется поскольку четырехволновые матричные элементы, как было показано в [7], на соответствующей резонансной поверхности обращаются в нуль. Авторы [7] высказали предположение, что в одномерной постановке спектры слабой турбулентности должны определяться пятиволновым резонансным взаимодействием. По этой причине спектр Колмогорова–Захарова для слабой турбулентности плоских гравитационных волн не совпадает со спектром Захарова–Филоненко [3], описывающим изотропную двумерную турбулентность.

В данной работе путем прямого численного интегрирования уравнений движения в конформных переменных мы показываем, что в режиме сильной турбулентности реализуется степенной спектр (2) как в частотном диапазоне, так и в зависимости от волновых чисел с одинаковой степенью, равной -4, тем самым подтверждаются предсказания теории [2]. В этом режиме в функциях плотности вероятности для градиентов формируются сильно негауссовые степенные хвосты, свидетельствующие о перемежаемости сильной турбулентности.

Отметим, что нами были проведены численные эксперименты в широком диапазоне малых амплитуд накачки с целью обнаружить спектры слабой турбулентности за счет пятиволнового взаимодействия волн. Согласно предсказаниям [7] такое взаимодействие должно порождать спектр колмогоровского вида. Подобный слабо турбулентный спектр для гравитационных волн не обнаруживается. Отметим, что режим слабой турбулентности в плоской геометрии реализуется только в области малых масштабов, на которых доминируют эффекты поверхностного натяжения, за счет пятиволновых взаимодействий плоских капиллярных волн, см. экспериментальные и вычислительные работы [8–10].

Основные уравнения и численная схема. Рассмотрим уравнения движения идеальной жидкости для двумерных потенциальных течений со свободной поверхностью в вертикальном поле тяжести в приближении глубокой воды. Введем декартову систему координат $\{x, y\}$ таким образом, чтобы невозмущенная форма границы соответствовала $y = 0$, а вектор поля тяжести был направлен против вертикальной оси $\mathbf{g} \| \hat{y}$. Функция $y = \eta(x,t)$ описывает отклонение свободной поверхности от невозмущенного состояния. Потенциал скорости ($\mathbf{v} = \nabla\phi(x,y,t)$) в силу несжимаемости жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta\phi = 0$. На свободной поверхности жидкости для уравнения Лапласа ставятся динамическое и кинематические граничные условия:

$$\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 = -g\eta, \tag{4}$$

$$\eta_t + \eta_x\phi_x = \phi_y. \tag{5}$$

При $y \to -\infty$ движение жидкости затухает $\phi \to 0$.

Как было показано В. Е. Захаровым [11, 12], уравнения движения (4) и (5) относятся к гамильтоновским уравнениям:

$$\eta_t = \delta H/\delta\psi, \qquad \psi_t = -\delta H/\delta\eta,$$

где гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\iint\limits_{y\le\eta} |\nabla\phi|^2 dxdy + \frac{g}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta^2 dx \tag{6}$$

совпадает с полной энергией системы, а ψ есть значение потенциала ϕ на свободной поверхности:

$$\psi = \phi(x, y = \eta, t).$$

Величина ϕ находится из решения задачи Дирихле уравнения Лапласа, которое выражается через соответствующую функцию Грина G. Выражение для G может быть получено в виде бесконечного ряда и поэтому может быть использовано в рамках теории возмущений, в частности, в теории слабой турбулентности. Однако использование конформных переменных позволяет эффективно исследовать эффекты сильной турбулентности.

Введем безразмерные переменные, выбрав характерный масштаб $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, соответствующий длинным волнам $k_0 \ll k_{gc} = (\rho g/\sigma)^{1/2}$, где ρ – плотность жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения. Характерный временной масштаб соответствует $t_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(gk_0)^{-1/2}$. Далее в работе используются безразмерные величины: $\tilde{t} = t\omega_0$, $\tilde{x} = xk_0$, $\tilde{\eta} = \eta k_0$, $\tilde{\phi} = \phi k_0^2/\omega_0$. Для удобства знаки тильды далее опущены.

В конформных переменных система уравнений (4) и (5) имеет вид:

$$Y_t = \left(Y_u \hat{H} - X_u\right) \frac{\hat{H}\Psi_u}{J} - \hat{\gamma}_k Y, \tag{7}$$

$$\Psi_t = \frac{(\hat{H}\Psi_u)^2 - \Psi_u^2}{2J} + \hat{H}\left(\frac{\hat{H}\Psi_u}{J}\right)\Psi_u - Y + \mathcal{F}(\mathbf{k},t) - \hat{\gamma}_k \Psi, \tag{8}$$

где $z = X(u,v) + iY(u,v)$ осуществляет отображение области, занимаемой жидкостью, в нижнюю полуплоскость $v \le 0$. При этом свободная граница переходит в линию $v = 0$. В этих уравнениях X и Y есть значения x и y при $v = 0$, при этом форма жидкости и потенциал скорости задаются в параметрическом виде, т.е. $\eta = Y(X)$ и $\psi = \Psi(X)$; $J = X_u^2 + Y_u^2$ – якобиан преобразования, $\hat{H}$ – преобразование Гильберта, которое для периодических функций имеет вид: $\hat{H}f = (2\pi)^{-1}\text{p.v.}\int_0^{2\pi} f(x')\cot[(x-x')/2]dx'$. В фурье-представлении $\hat{H}$ представляет собой оператор умножения $\hat{H} = i\text{sign}(k)$.

Для моделирования волновой турбулентности мы вводим дополнительные слагаемые, ответственные за диссипацию энергии в области коротких волн и накачку, сосредоточенную в длинноволновой области. Оператор диссипации вязкого типа определяется в k-пространстве как

$$\hat{\gamma}_k f_k = \gamma_0 k^2 f_k,$$

где γ_0 считается постоянной при $k < k_d$. Чтобы стабилизировать мелкомасштабную неустойчивость, а также уменьшить эффект опрокидывания волн, при котором возникает тенденция к формированию взаимно неоднозначных областей формы границы, т.е. углов более $\pi/2$, амплитуда γ_0 при $k \ge k_d$ увеличивается на три порядка.

Накачка $\mathcal{F}(\mathbf{k},t)$ определяется в пространстве Фурье следующим образом:

$$\mathcal{F}(\mathbf{k},t) = F(k)\cdot\exp[iR(\mathbf{k},t)],$$

$$F(k) = F_0 \cdot \exp[-L_0^4(k-k_f)^4].$$

Здесь $R(\mathbf{k},t)$ – случайные числа, равномерно распределенные в интервале $[0,2\pi]$, F_0 – константа, k_f – волновое число, при котором амплитуда накачки достигает максимума, а L_0 задает ширину накачки.

Интегрирование уравнений движения (7) и (8) по времени выполняется явным методом Рунге–Кутта четвертого порядка с шагом dt. Все вычисления проводятся в периодической области длиной $L = 2\pi$ со следующими параметрами: $dt = 2.5\cdot 10^{-5}$, $N = 32\,768$ – число пространственных точек, $\gamma_0 = 10^{-5}$, $k_d = 5000$, $F_0 = 0.6\cdot 10^5$, $k_f = 3$, $L_0 = 0.64$. Для подавления эффекта элайзинга на каждом шаге интегрирования по времени используется низкочастотный фильтр, устраняющий высшие гармоники $k \ge N/3$.

Результаты моделирования. В отсутствии диссипации уравнения (7) и (8) описывают процесс опрокидывания волн, приводящий к формированию разрыва в кривизне границы за конечное время. Этот процесс достаточно хорошо исследован, см., например, [13–15]. Целью настоящей работы является описание квазистационарного режима, при котором диссипативные эффекты препятствуют формированию сингулярностей. На рисунке 1 показана эволюция полной энергии системы при выбранных параметрах расчета. Действительно видно, что энергия быстро растет до некоторого уровня и далее совершает достаточно сложные осцилляции. В квазистационарном режиме функции

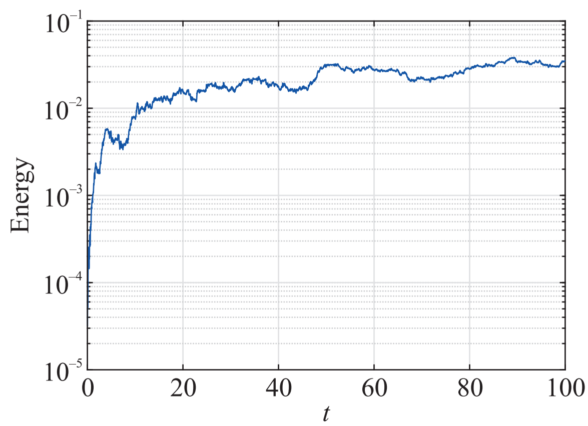

Рис. 1. (Цветной онлайн) Временная эволюция полной энергии системы (6)

плотности вероятности очень сильно отклоняются от гауссового распределения, см. рис. 2. На этом рисунке мы наблюдаем длинные степенные хвосты с показателем $-7/2$, которые свидетельствуют о перемежаемости.

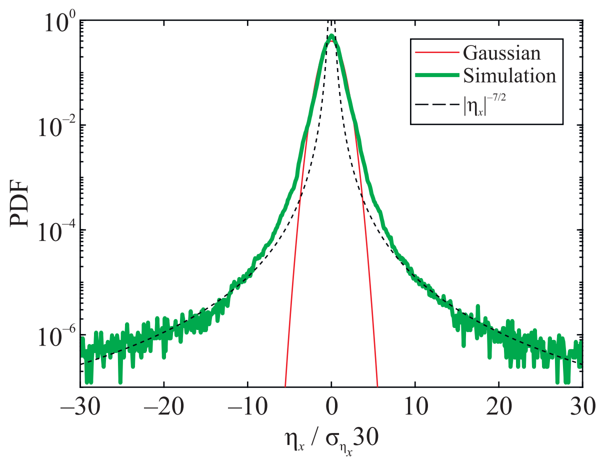

Рис. 2. (Цветной онлайн) Вычисленная функция плотности вероятности для крутизны границы η_x, измеренная относительно среднеквадратичного отклонения σ_{η_x}, в квазистационарном состоянии

На рисунке 3 показаны форма границы, ее крутизна η_x и кривизна поверхности $K = \eta_{xx}/(1+\eta_x^2)^{3/2}$ в некоторый момент эволюции системы. Можно видеть, что на поверхности жидкости сформировались области с высокой кривизной границы. Углы наклона (крутизна η_x) претерпевают разрыв в этих точках. На рисунке 4 показан временной участок эволюции формы поверхности жидкости, а также величин η_x и K в турбулентном режиме. Видно, что на границе жидкости сформировались несколько ударных фронтов – пространственно узких областей, в которых углы наклона претерпевают разрыв. Важно, что движение ударных фронтов происходит практически с постоянной скоростью. Это особенно видно на рис. 4b и c.

Спектры турбулентности. Главным вопросом является, какой спектр турбулентности демонстрирует система в сильно нелинейном режиме движения. На рис. 5 и 6 показаны пространственный и частотный спектр поверхностных возмущений в турбулентном режиме движения. Отметим, что на этих графиках показаны спектры восстановленной функции $\eta(x,t)$, а не функции $Y(u,t)$, определенной в конформных координатах. Процедура восстановления явной зависимости $\eta(x,t)$ описана в работе [9]. Спектр (2) действительно хорошо воспроизводится в нашем численном эксперименте. Инерционный интервал составил почти три декады как в k, так и в ω областях, что достаточно велико применительно к методам прямого численного моделирования. Важно, что спектр сильной турбулентности (2) также наблюдается в прямых лабораторных экспериментах [16–18] (см. также обзор [4]).

Следует отметить, что наблюдаемый на рис. 5 и 6 спектр турбулентности существенно отличается от спектра Филлипса, изначально полученного на основе анализа размерностей [19]. Фактически спектр Филлипса соответствует ситуации, когда эффекты нелинейности сравнимы с линейной дисперсией волн (так называемый критический баланс см. [20–22]). В исследуемом режиме нелинейные эффекты (тенденции к коллапсу) играют доминирующую роль. Отметим также, что спектр слабой турбулентности Колмогорова–Захарова, предложенный в [7] для описания плоско-симметричных гравитационных волн, не удается воспроизвести в рамках используемой численной модели. Расчеты показывают, что система всегда переходит в режим сильной нелинейности. Возможно, этот факт объясняется неустойчивостью спектра слабой турбулентности [7] в условиях плоской симметрии.

Пространственно-временной анализ турбулентности. Как было ранее отмечено, спектр сильной турбулентности (2) справедлив для возмущений, частота и волновое число которых линейно связаны $\omega \sim k$. При этом такая зависимость, очевидно, противоречит линейному закону дисперсии (3). Для того, чтобы выяснить, как частота волн может быть связана с волновым числом в сильно нелинейном режиме движения, мы провели пространственно-временной фурье-анализ. На рисунке 7 показан пространственно-временной фурье-спектр поверхности $|\eta(\omega,k)|$, рассчитанный в режиме развитой турбулентности. На этом рисунке мы видим, что возмущения поверхности сгруппированы вдоль прямых линий, описывающих бездисперсионное распространение волн. Наблюдаемые возмущения очень сильно отклоняются от линейного закона дисперсии, показанного красной сплошной линией. Фактически мы обнаруживаем дискретный набор ударных фронтов, распространяющихся с почти постоянной скоростью, по крайне мере, в течение некоторого конечного интервала времени. По всей видимости, движение с постоянной скоростью возникает в результате баланса нелинейных эффектов и диссипации энергии. Отметим, что похожая структура наблюдалась в работе [23] применительно к поиску интегрируемых структур на поверхности глубокой жидкости.

Заключительные замечания. Таким образом, в прямом численном эксперименте для одномерной

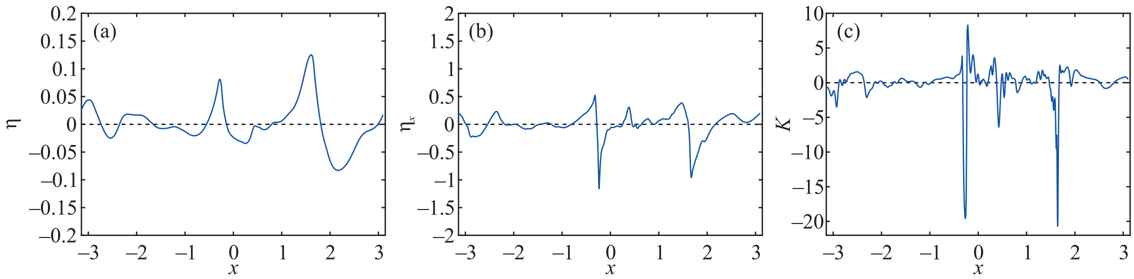

Рис. 3. (Цветной онлайн) (a) – Форма границы жидкости, (b) – крутизна и (c) кривизна границы в некоторый момент квазистационарного состояния $t = 40$

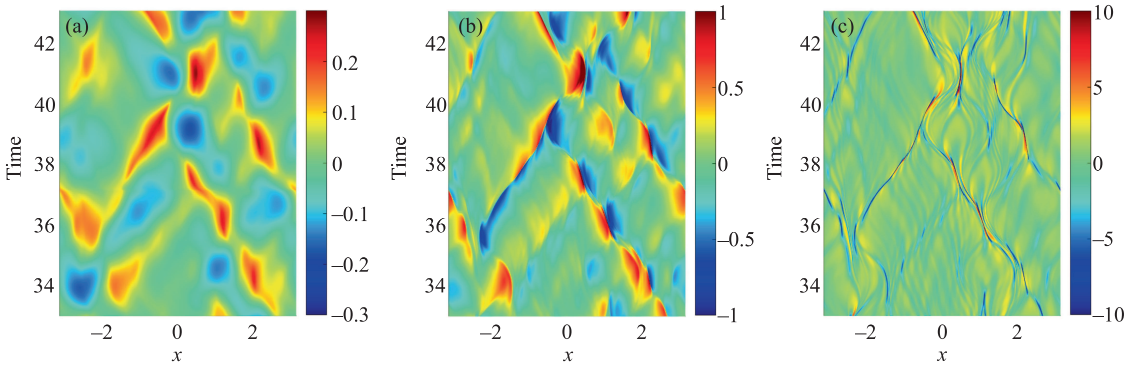

Рис. 4. (Цветной онлайн) Эволюция формы (a), крутизны (b) и кривизны (c) границы жидкости в интервале времени $t \in (33, 43)$

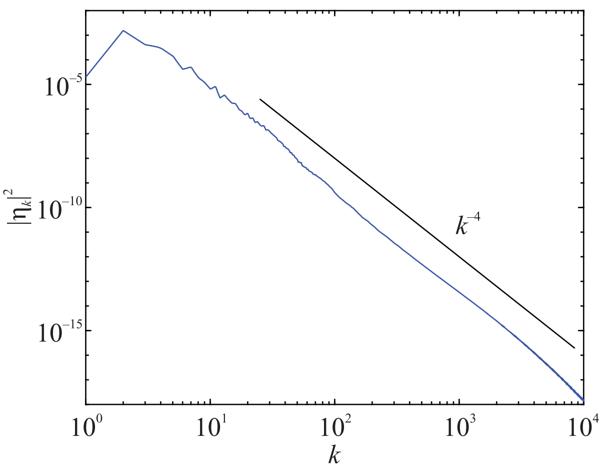

Рис. 5. (Цветной онлайн) Пространственный спектр возмущений поверхности в сравнении со спектром k^{-4}

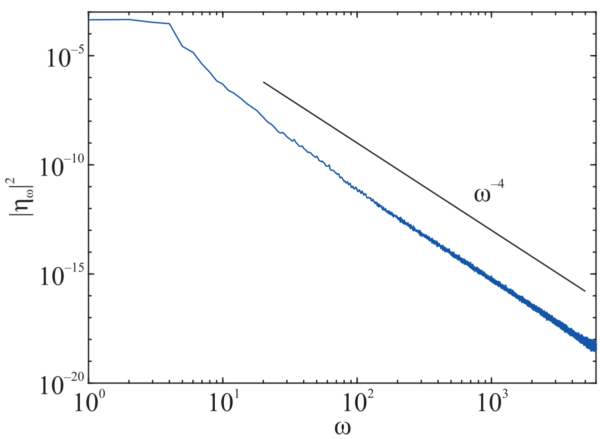

Рис. 6. (Цветной онлайн) Частотный спектр возмущений поверхности в сравнении со спектром ω^{-4}

турбулентности гравитационных волн на глубокой воде продемонстрировано, что главный вклад в турбулентность связан с опрокидыванием волн, которое продуцирует степенной спектр (2) как в частотном диапазоне, так и в пространстве волновых чисел. Насколько нам известно, полученные результаты представляют собой первое прямое численное подтверждение спектров сильной турбулентности, предсказанных в работе [2]. Рассчитанная плотность вероятности для градиента поверхности в состоянии сильной турбулентности имеет степенные хвосты с показателем, близкими к $-7/2$. Интересно отметить, что такое поведение типично для одномерной турбулентности Бюргерса [24–28], а также наблюдается для сильной трехмерной звуковой турбулентности [29]. Отметим, что волновой коллапс играет важную роль в одномерных моделях волновой турбулентности (так называемая MMT модель [30]). В MMT модели коллапсы приводят к сильной перемежаемости и разрушению слабо турбулентных спектров Колмогорова–Захарова [31–35]. Подобный

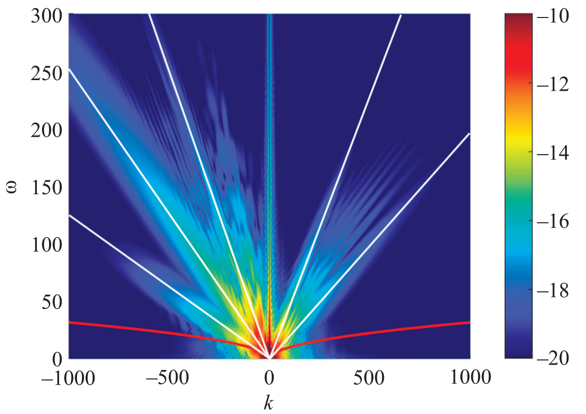

Рис. 7. (Цветной онлайн) Пространственно-временной спектр возмущений поверхности $\log|\eta(\omega,k)|$, красные сплошные линии – линейный закон дисперсии $\omega = k^{1/2}$, белые сплошные линии соответствуют бездисперсионному распространению нелинейных волн $\omega \sim k$

ударно-волновой режим турбулентности реализуется также для слабодисперсионных магнитогидродинамических волн на границах жидкостей [36, 37].

Авторы благодарны М. Онорато (M. Onorato), обративший наше внимание на работу [4].

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках гранта Российского научного фонда # 19-72-30028.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. V. E. Zakharov, S. I. Badulin, V. V. Geogjaev, and A. N. Pushkarev, Earth and Space Science **6**, 540 (2019).
2. Е. А. Кузнецов, Письма в ЖЭТФ **80**(2), 92 (2004).
3. В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, ДАН СССР **170**, 1292 (1966) [Sov. Phys. Docl. **11**, 881 (1967)].
4. E. Falcon and N. Mordant, Annu. Rev. Fluid Mech. **54**, 1 (2022).
5. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A, **221**, 73 (1996).
6. A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov, and E. A. Kuznetsov, Fizika Plazmy **22**, 916 (1996) [Plasma Phys. Rep. **22**(10), 829 (1996)].
7. A. I. Dyachenko, Y. V. Lvov, and V. E. Zakharov, Physica D **87**(1–4), 233 (1995).
8. G. Ricard and E. Falcon, Europhys. Lett. **135**(6), 64001 (2021).
9. Е. А. Кочурин, Письма в ЖЭТФ **118**(12), 889 (2023).
10. E. A. Kochurin and P. A. Russkikh, Physica D **481**, 134763 (2025).
11. В. Е. Захаров, ПМТФ **9**(2), 86 (1968). [V. E. Zakharov, J. Appl. Mech. Tech. Phys. **9**(2), 190 (1968)].
12. В. Е. Захаров, Некоторые проблемы нелинейной теории поверхностных волн. Кандидатская диссертация, ИЯФ СО АН СССР, Новосибирск (1966).
13. S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and A. O. Korotkevich, JETP Lett. **98**(11), 675 (2014).
14. S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and A. O. Korotkevich, Stud. Appl. Math. **137**(4), 419 (2016).
15. A. O. Korotkevich, P. M. Lushnikov, A. Semenova, and S. A. Dyachenko, Stud. Appl. Math. **150**(1), 119 (2023).
16. P. Denissenko, S. Lukaschuk, and S. Nazarenko, Phys. Rev. Lett. **99**(1), 014501 (2007).
17. S. Lukaschuk, S. Nazarenko, S. McLelland, and P. Denissenko, Phys. Rev. Lett. **103**(4), 044501 (2009).
18. S. Nazarenko and S. Lukaschuk, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **7**(1), 61 (2016).
19. O. M. Phillips, J. Fluid Mech. **2**(5), 417 (1957).
20. V. Rosenhaus and D. Schubring, arXiv preprint arXiv:2406.18475 (2024).
21. A. C. Newell and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **372**(23), 4230 (2008).
22. V. Rosenhaus and G. Falkovich, Phys. Rev. Lett. **133**(24), 244002 (2024).
23. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, JETP Lett. **88**, 307 (2008).
24. S. N. Gurbatov, A. N. Malakhov, and A. I. Saichev, *Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays, particles*, Manchester University Press., Manchester (1991), p. 308.
25. V. Yakhot and A. Chekhlov. Phys. Rev. Lett. **77**, 3118 (1996).
26. E. Weinan and E. V. Eijnden. Phys. Rev. Lett. **83**, 2572 (1999).
27. U. Frisch and J. Bec, *Burgulence*, in *New trends in turbulence Turbulence: nouveaux aspects*, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg (2002), p. 341.
28. J. Bec and K. Khanin, Burgers turbulence. Phys. Rep. **447**, 1 (2007).
29. E. A. Kochurin and E. A. Kuznetsov, Phys. Rev. Lett. **133**, 207201 (2024).
30. A. J. Majda, D. W. McLaughlin, and E. Tabak, J. Nonlinear Sci. **7**(1), 9 (1997).
31. A. Simonis and Y. Pan, Phys. Rev. E **110**(2), 024202 (2024).
32. S. Chibbaro, F. De Lillo, and M. Onorato, Phys. Rev. Fluids **2**(5), 052603 (2017).
33. B. Rumpf and T. Y. Sheffield, Phys. Rev. E **92**(2), 022927 (2015).
34. T. Y. Sheffield and B. Rumpf, Phys. Rev. E **95**(6), 062225 (2017).
35. B. Rumpf and A.C. Newell, The Competition between Wave Turbulence and Coherent Structures. Available at SSRN 5243541; https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=5243541.
36. G. Ricard and E. Falcon, Phys. Rev. Fluids **8**(1), 014804 (2023).
37. E. A. Kochurin, Water **17**(2), 140 (2025).