Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 2, стр. 63 – 65 *25 июля 1989 г.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФАЗА ДЛЯ МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА–КАММИНГСА И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ АТОМНЫХ СОСТОЯНИЙ

В.А.Андреев, А.Б.Климов, П.Б.Лернер

Для модели взаимодействия двухуровневой системы с резонаторной модой циклическая адиабатическая эволюция параметров приводит к нетривиальному фазовому сдвигу волновой функции (фаза Берри [1]). Эта геометрическая, по своей природе, фаза, в принципе поддается экспериментальному обнаружению.

Точно решаемая модель Джейнса–Каммингса (ДЖК) [2] описывает взаимодействие резонаторной моды с двухуровневой системой в приближении вращающихся волн. Она применяется для описания так называемых "ридберговских мазеров" [3,4], устройств, в которых осуществляется мазерная генерация на высоковозбужденных электронных состояниях одиночных атомов в высокодобротном резонаторе. Гамильтониан модели [2] может быть представлен в форме

$$H = \omega_0 a^+ a + \omega_1 \sigma_3 + \mu a^+ \sigma_- + \mu^* a \sigma_+ , \qquad (1)$$

a^+, a – операторы рождения (уничтожения) фотона в моде резонатора, $\sigma_\pm$, σ_3 – матрицы Паули, ω_0 – частота моды, ω_1 – частота перехода в двухуровневой системе, μ – константа связи. Модуль константы связи $|\mu| = \rho$ имеет смысл частоты Раби одного фатона, а аргумент φ – начального сдвига фаз между атомной поляризацией и электромагнитным полем [5].

Собственные функции модели ДЖК имеют вид

$$\Psi = \alpha |N, 0\rangle + \beta |N-1, 1\rangle , \qquad (2)$$

где $|N, 0\rangle$ – состояние с N-фотонами в моде и невозбужденной двухуровневой системой, а $N-1, 1\rangle$ – состояние с $(N-1)$-фотоном в моде, когда двухуровневая система возбуждена.

Считая, что параметры модели меняются адиабатически (на практике это можно осуществить механическим изменением обьема и геометрии резонатора [6] и штарковским сдвигом частоты перехода), то есть $\Delta = \omega_1 - \omega_0 \equiv \Delta(\tau)$, $\mu, \mu^* = \mu(\tau), \mu^*(\tau)$, так что $\dot{\Delta}/\Delta$ и $(\dot{\mu}/\mu)$ – наиболее медленные характерные частоты в системе.

Тогда для величин $u(\tau)$, $v(\tau)$ определяемых через $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ посредством

$$\begin{aligned} u &= \exp\{-\frac{1}{2i}\int^t [(2N-1)\omega_0 + i\frac{\dot{\mu}}{\mu}]d\tau\}\alpha , \\ v &= \exp\{-\frac{1}{2i}\int^t [(2N-1)\omega_0 + i\frac{\dot{\mu}^*}{\mu^*}]d\tau\}\beta \end{aligned} \qquad (3)$$

в приближении ВКБ получаются следующие выражения

$$u = \frac{a_1}{\sqrt{\Omega}} e^{\int^t (-f(\tau)+i\varphi(\tau))d\tau} + \frac{a_2}{\sqrt{\Omega}} e^{\int^t (f(\tau)-i\varphi(\tau))d\tau}$$

$$v = \frac{b_1}{\sqrt{\Omega}} e^{\int^t (f+i\varphi)d\tau} + \frac{b_2}{\sqrt{\Omega}} e^{-\int^t (f+i\varphi)d\tau}$$

$$f(\tau) = \frac{1}{4\Omega}\,(\dot\Delta - \Delta\frac{\dot\rho}{\rho}), \qquad \varphi(\tau) = \Omega + \frac{\Delta\dot\varphi}{4\Omega}, \qquad \Omega = (4|\mu|^2 N + \Delta^2)^{1/2} \tag{4}$$

N – полное число возбуждений в системе, являющееся интегралом движения, a_1, a_2, b_1, b_2 – константы, зависящие от начальных условий.

Для начальных условий, соответствующих невозбужденной двухуровневой системе имеем

$$u(\tau) = \sqrt{\frac{\Omega(0)}{\Omega(\tau)}}\,[\mathrm{ch}\gamma\cos\delta - i\,\mathrm{sh}\gamma\sin\delta]$$

$$v(\tau) = \sqrt{\frac{\Omega(0)}{\Omega(\tau)}}\,[\mathrm{sh}\,\gamma\cos\delta + i\,\mathrm{ch}\gamma\,\sin\delta]\,, \tag{5}$$

где $\gamma = \int^t \frac{1}{4\Omega}(\dot\Delta - \Delta\frac{\dot\rho}{\rho})d\tau$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$, $\delta_1 = \int^t \Omega d\tau$, $\delta_2 = \int^t \frac{\Delta\dot\varphi}{4\Omega}d\tau$.

Углы γ, δ_1 имеют динамическую природу (о различии между динамической и топологической фазами, см. [7]). Если эволюция системы носит циклический характер, $\Delta(T) = \Delta(0)$, $\mu(T) = \mu(0)$, $\int_0^T \Omega(\tau)d\tau = 2\pi m$, m – целое, то они тождественно равны нулю $\mathrm{mod}(2\pi)$.

Напротив, угол δ_2 может быть не равен нулю при циклическом изменении параметров. Волновая функция системы в этом случае имеет вид

$$|\Psi\rangle = a\,|N,0\rangle + ib\,|N-1,1\rangle\,, \tag{6}$$

где $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$, $\theta \equiv \delta_2$.

Угол θ имеет, в данной модели, смысл топологической фазы. Он обладает двумя замечательными (но естественными) свойствами. В предельном случае $N = 0$, $\theta = 0$, т. е. вакуумное состояние не приобретает топологической фазы. В другом предельном случае $\theta \to \frac{1}{\sqrt{N}} \sim 0$, т. е. эффект носит чисто квантовый характер и исчезает в пределе классического поля ($N = \infty$). В случае точного резонанса между атомным переходом и частотой резонатора он также равен нулю.

Численная величина фазы Берри не является малой. Так для гармонического закона изменения расстройки, фазы и амплитуды константы связи: $\Delta = \pm\epsilon\cos(\gamma_R t)$, $\varphi = \sin(\gamma_R t)$, $2\sqrt{N}\rho = \epsilon\sin(\gamma_R t)$ $\gamma_R \ll \Delta, \rho$, имеем $\theta = \pm\pi/4$.

Фаза Берри в принципе может быть измерена в спектроскопической схеме Рамзая [8] с двумя разнесенными полями, применение которой к ридберговским системам описано в работе [9]. А именно, в ходе измерения, волновая функция вида $|\Psi\rangle = \alpha_0\,|a\rangle + \beta_0\,|b\rangle$ преобразуется в волновую функцию $|\psi'\rangle = \tilde\alpha_0\,|a\rangle + \tilde\beta_0 e^{i\phi}\,|b\rangle$, где $\tilde\alpha_0, \tilde\beta_0$ – измененные значения амплитуды, а ϕ – фаза некоторого (реперного) поля. Схема Рамзая позволяет измерить величину $|\tilde\alpha_0\tilde\beta_0^*|\cos(\theta + \phi - \omega_1 t_0)$, где $\theta = \arg(\alpha_0\beta_0^*) = \arg(\tilde\alpha_0\tilde\beta_0^*)$, t_0 – время пролета между двумя разнесенными полями. Роль каналов интерферометра в схеме Рамзая играют возбужденное и невозбужденное атомные состояния. Приготовление N-фотонного (фоковского) состояния электромагнитного поля в резонаторе (квантовые флуктуации числа фотонов маскируют указанный эффект), также возможно и описано в работе [10].

ДЖК, представляющая собой вполне реалистическую модель суперсимметричной квантовой механики [11], имеет нетривиальное поведение при адиабатической циклической эволюции параметров системы. Геометрическая фаза, возникающая при циклической эволюции, достигает заметной величины $|\theta| = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}79$ в разобранном примере) и допускает, в принципе, экспериментальное измерение в предложенном в работе [9] атомном интерферометре.

Литература

1. *Berry M.V.* Proc. Roy. Soc. A, 1984, **392**, 45.
2. *Cummings F.W.* Phys. Rev., 1965, **140**, 1094.
3. *Raimond J.M., Haroche S.* In: Adv. At. Mol. Phys., 1985, **20**, 347.
4. *Filipowicz P., Javanainen J., Meystre P.* Phys. Rev. A, 1986, **34**, 3077.
5. *Eberly J.H., Y.-H. Yoo.* Phys. Rep., 1985, **118**, 539.
6. *Walther H.* In: Atomic Physics 10, 1987, Eds. H.Narumi, I.Shimamura, p. 343.
7. *Aharonov Y., Anandan J.* Phys. Rev. Lett., 1987, **58**, 1593.
8. *Рамзей Н.* Молекулярные пучки. М.: ИЛ, 1960, стр. 412.
9. *Krause Y. et al.* Phys. Rev. A, 1986, **34**, 2032.
10. *Krause Y. et al.* Phys. Rev. A, 1988, **36**, 4547.
11. *Andreev V.A., Lerner P.B.* Phys. Lett., A, 1989, **134**, 507.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23 июня 1989 г.