Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 5, с. 314 – 319

Неупругие эффекты в модели Изинга

Д. Менской[1)]

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), 141700 Долгопрудный, Россия

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, 127994 Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 июля 2025 г.
После переработки 4 августа 2025 г.
Принята к публикации 5 августа 2025 г.

В настоящей работе мы изучаем неупругие эффекты в модели Изинга. Мы рассматриваем модель Изинга, как теорию поля Изинга с магнитным полем, возмущенную оператором плотности энергии ε. Включение такого оператора приводит к возникновению процессов рассеяния самых легких частиц в теории с образованием двух частиц: самой легкой и следующей по массе. В данной работе вычислено сечение рассеяния данного процесса и определены его асимптотики при больших энергиях и над порогом

DOI: 10.31857/S0370274X25090101, EDN: XQVTAN

1. Введение. Решеточная модель Изинга описывает фазовый переход парамагнетик–ферромагнетик. В двух измерениях ее скейлинговый предел в окрестности критической точки $(T,H)=(T_c,0)$ описывается теорией поля Изинга. Данная теория поля обладает многими интересными свойствами. В самом общем случае она не является интегрируемой теорией, и ее действие равно

$$\mathcal{A}_{\mathrm{IFT}}=\mathcal{A}_{\mathrm{ICFT}}+\frac{m}{2\pi}\int\varepsilon(x)d^2x+h\int\sigma(x)d^2x, \quad (1)$$

где $m\sim T-T_c$, $h\sim H$, а $\mathcal{A}_{\mathrm{ICFT}}$ – конформная теория поля, минимальная модель $\mathcal{M}_{4,3}$, содержащая, помимо единичного оператора, два примарных поля – плотность энергии $\varepsilon(x)$ и оператор спина $\sigma(x)$ [1].

При нулевом магнитном поле $h=0$ данная теория поля является теорией майорановских фермионов с массой $|m|$ [2]. При критической температуре $T=T_c$ ($m=0$) и ненулевом магнитном поле модель является теорией, спектр частиц которой состоит из 8 стабильных частиц разных масс [3]. Как конформная теория поля, возмущенная своим сингулярным вектором, оба данных случая являются случаями интегрируемых моделей с факторизованной матрицей рассеяния [4]. Это значит, что все процессы рассеяния – упругие.

Рассмотрим модель (1) как возмущение оператором ε теории поля Изинга при критической температуре (эта модель также называется моделью $E8$, так как спины ее интегралов движения совпадают с экспонентами алгебры Ли $E8$ [3])

$$\mathcal{A}_{E8}=\mathcal{A}_{\mathrm{ICFT}}+h\int\sigma(x)d^2x. \quad (2)$$

В такой теории существует 8 нейтральных частиц с массами [3]

$$\begin{aligned}
&m_1=M(h),\\
&m_2=2m_1\cos\frac{\pi}{5}=(1.6180339887\ldots)m_1,\\
&m_3=2m_1\cos\frac{\pi}{30}=(1.9890437907\ldots)m_1,\\
&m_4=2m_2\cos\frac{7\pi}{30}=(2.4048671724\ldots)m_1,\\
&m_5=2m_2\cos\frac{2\pi}{15}=(2.9562952015\ldots)m_1,\\
&m_6=2m_2\cos\frac{\pi}{30}=(3.2183404585\ldots)m_1,\\
&m_7=4m_2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{7\pi}{30}=(3.8911568233\ldots)m_1,\\
&m_8=4m_2\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{15}=(4.7833861168\ldots)m_1,
\end{aligned} \quad (3)$$

где общая нормировка зависит от магнитного поля h следующим образом

$$M(h)=\mathcal{C}\,h^{8/15} \quad (4)$$

с константой $\mathcal{C}$, вычисленной в [5]

$$\mathcal{C}=\frac{4\sin\frac{\pi}{5}\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{8}{15}\right)}\left(\frac{4\pi^2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma^2\left(\frac{13}{16}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{16}\right)}\right)^{4/15}= \\ =4.40490858\ldots. \quad (5)$$

[1)]e-mail: menskoy.dd@phystech.edu

Факторизованная матрица рассеяния в данной теории имеет вид [3]

$$S_{ab}(\theta) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}_{ab}} (f_\alpha(\theta))^{p_\alpha}\,, \tag{6}$$

где $\theta = \theta_a - \theta_b$ – относительная быстрота рассеивающихся частиц типа a и типа b (энергия и импульс частицы связаны с быстротой через соотношения $E = m\cosh\theta$, $p = m\sinh\theta$); а $f_\alpha(\theta)$ опеределена так

$$f_\alpha(\theta) = \frac{\tanh\frac{1}{2}(\theta + i\pi\alpha)}{\tanh\frac{1}{2}(\theta - i\pi\alpha)}. \tag{7}$$

Набор чисел $\mathcal{A}_{ab}$ и p_α можно найти в [6].

В силу интегрируемости в теории (2) не может быть неупругого процесса рассеяния двух наилегчайших частиц с массами m_1 с образованием одной частицы массы m_1 и другой массы m_2 (сокращенно $11\to 12$). Однако при отклонении температуры от критического значения (т.е. при включении возмущения оператором ε) такой процесс возникает. Изучение данного процесса, а именно сечения его рассеяния, позволяет провести первые шаги в определении неупругой фазы рассеяния амплитуды рассеяния полной теории (1) [7].

Чтобы определить сечение такого процесса, необходимо вычислить форм-фактор $F^\varepsilon_{1112}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\beta) = \langle 0|\varepsilon(0)|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\beta\rangle_{in}$, где $|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\beta\rangle_{in}$ – асимптотическое in-состояние трех частиц массы m_1 с быстротами θ_i и одной частицы массы m_2 с быстротой β. Такой форм-фактор можно получить из пятиточечного форм-фактора наилегчайших частиц $F^\varepsilon_{11111}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5) = \langle 0|\varepsilon(0)|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5\rangle_{in}$, где $|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5\rangle_{in}$ – асимптотическое in-состояние пяти частиц массы m_1 с быстротами θ_i, посредством

$$\begin{aligned}F^\varepsilon_{1112}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\beta) = -\frac{i}{\Gamma^2_{11}}\lim_{t\to 0} t\, F^\varepsilon_{11111}\times\\ \times\left(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\beta+\frac{iu^2_{11}}{2}+t,\beta-\frac{iu^2_{11}}{2}\right),\end{aligned} \tag{8}$$

где $u^2_{11} = \frac{2\pi}{5}$, а Γ^2_{11} – трехчастичная вершина, определенная через

$$-i\operatorname*{Res}_{\theta=iu^2_{11}} S_{11}(\theta) = \left(\Gamma^2_{11}\right)^2 \tag{9}$$

и численно равная [6]

$$\Gamma^2_{11} = \sqrt{\frac{2\tan\frac{2}{5}\pi\tan\frac{8}{15}\pi\tan\frac{7}{30}\pi}{\tan\frac{2}{15}\pi\tan\frac{1}{6}\pi}} = 14.322681\ldots \tag{10}$$

2. Вычисление форм-фактора F^ε_{1112}. Форм-фактор F^ε_{11111} можно определить как частный случай вычисления из работы [8]. В этой работе вычислены форм- факторы экспоненциальных операторов

$$V_a(x) = e^{a\varphi(x)} \tag{11}$$

в теории Буллоу–Додда, определенной действием

$$\mathcal{A}_{BD} = \int d^2x\left(\frac{1}{16\pi}(\partial_\nu\varphi)^2 + \mu(e^{\sqrt{2}b\varphi} + 2e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}\varphi})\right). \tag{12}$$

Теория поля (2) является частным случаем теории Буллоу–Додда при $b = i\sqrt{\frac{3}{8}}$, тогда как оператор плотности энергии ε является частным случаем операторов (11) при $a = a_{1,3} = -\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Согласно [8], форм-фактор $F^\varepsilon_5 = F^{a_{1,3}}_5 = F^{a_{1,3}}_{11111}$ равен

$$\begin{aligned}F^\varepsilon_5(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5) = \langle\varepsilon\rangle\rho^5 J^{a_{1,3}}_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\times\\ \times\prod_{1\le i<j\le 5}\frac{R_{11}(\theta_{ij})}{\mathcal{P}_{2/5}(\theta_{ij})\,\mathcal{P}_{1/15}(\theta_{ij})},\end{aligned} \tag{13}$$

где $x_i = e^{\theta_i}$, $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$, величина ρ вычисляется так

$$\begin{aligned}\rho = \sqrt{\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi b}{3Q}\sin\frac{2\pi}{3Qb}}}\times\\ \times\exp\left(2\int_0^\infty\frac{dt}{t}\frac{\cosh\frac{t}{6}\sinh\frac{tb}{3Q}\sinh\frac{t}{3Qb}}{\sinh t\cosh\frac{t}{2}}\right) =\\ = 1.3110948\ldots,\end{aligned} \tag{14}$$

а $\langle\varepsilon\rangle = 2.00314\ldots h^{8/15} = 2.00314\ldots M(h)/\mathcal{C}$ – вакуумное среднее в модели $E8$ [9]. В формуле (13) использованы величины $R_{11}(\theta)$ и $\mathcal{P}_\alpha(\theta)$, которые определены следующим образом

$$R_{11}(\theta) = \mathcal{N}(b)g_0(\theta)g_{2/3}(\theta)g_{2/5}(\theta)g_{1/15}(\theta), \tag{15}$$

$$\mathcal{P}_\alpha(\theta) = g_\alpha(\theta)g_{-\alpha}(\theta) = \frac{\cos\pi\alpha - \cosh\theta}{2\cos^2\frac{\pi\alpha}{2}}, \tag{16}$$

где

$$g_\alpha(\theta) = \exp\left(2\int_0^\infty\frac{dt}{t}\frac{\cosh\frac{(2\alpha-1)t}{2}}{\cosh\frac{t}{2}\sinh t}\sin^2\frac{(i\pi-\theta)t}{2\pi}\right) \tag{17}$$

$$\mathcal{N}(b) = \exp\left(-4\int_0^\infty\frac{dt}{t}\frac{\cosh\frac{t}{6}\sinh\frac{tb}{3Q}\sinh\frac{t}{3Qb}}{\sinh t\cosh\frac{t}{2}}\right). \tag{18}$$

В интересующем случае $\mathcal{N}\left(i\sqrt{\frac{3}{8}}\right) = 2.5478694\ldots$

Функция $J^a_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ – является рациональной функцией от своих аргументов (экспонент от быстрот). Для общего N семейство таких функций определяется соотношением

$$J_N^a(x_1,\ldots,x_N)=\Lambda_N(\sigma_1,\ldots,\sigma_N)\times \times\prod_{1\le i<j\le N}\frac{1}{(x_i+x_j)(x_i+\omega x_j)(x_i+\omega^{-1}x_j)}, \quad (19)$$

где $\omega=e^{i\pi/3}$, а Λ_N – однородный симметрический многочлен от переменных $x_1,\ldots,x_N$ общей степени $3N(N-1)/2$ и частной степенью по каждой из переменных не более $3(N-1)$, а значит может быть записан как многочлен от элементарных симметрических многочленов σ_i, заданных через соотношение

$$\prod_{i=1}^{N}(x+x_i)=\sum_{k=0}^{N}x^{N-k}\sigma_k(x_1,\ldots,x_N). \quad (20)$$

Функции $J_N^a(x_1,\ldots,x_N)$ задаются рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned}J_{N+1}^a(z,x_1,\ldots,x_N)&=J_1^aJ_N^a(x_1,\ldots,x_N)+\\&+\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n}{z+x_n}K_n(x_1,\ldots,x_N)J_{N-1}^a(x_1,\ldots,\cancel{x_n},\ldots,x_N)+\\&+\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n\omega^{-1}}{z+x_n\omega^{-1}}B_n^+(x_1,\ldots,x_N)J_N^a(x_1,\ldots,x_n\omega,\ldots,x_N)-\\&+\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n\omega}{z+x_n\omega}B_n^-(x_1,\ldots,x_N)J_N^a(x_1,\ldots,x_n\omega^{-1},\ldots,x_N)\end{aligned} \quad (21)$$

с начальным условием

$$J_1^a=J=4\sin\left(\frac{\pi\sqrt{2}a}{3Q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6Q}\left(2\sqrt{2}a-b+b^{-1}\right)\right),\quad Q=b+b^{-1}. \quad (22)$$

В интересующем нас случае

$$J=4\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{23\pi}{30}\right)=-2.8270909\ldots \quad (23)$$

Функции $K_n(x_1,\ldots,x_N)$ и $B_n^\pm(x_1,\ldots,x_N)$ определяются через

$$\begin{aligned}K_n(x_1,\ldots,x_N)&=\frac{(H^2-3)(H^2-1)}{2(\omega-\omega^{-1})}\\&\times\left(\prod_{i\ne n}f\left(\frac{x_n}{x_i}\omega^2\right)f\left(\frac{x_n}{x_i}\omega\right)-\right.\\&\left.-\prod_{i\ne n}f\left(\frac{x_n}{x_i}\omega^{-2}\right)f\left(\frac{x_n}{x_i}\omega^{-1}\right)\right),\end{aligned} \quad (24)$$

$$B_n^\pm(x_1,\ldots,x_N)=\frac{H(H^2-1)}{\omega-\omega^{-1}}\prod_{i\ne n}f\left(\frac{x_n}{x_i}\omega^{\pm1}\right), \quad (25)$$

где

$$f(x)=\frac{x+x^{-1}+H^2-2}{x+x^{-1}-1}, \quad (26)$$

а величина H определена как

$$H=2\sin\frac{\pi\left(b-b^{-1}\right)}{6Q}. \quad (27)$$

В рассматриваемом случае $H=-1.8270909\ldots$ Уравнение (21) есть разложение мероморфной функции J_N^a по вычетам в полюсах и целой функции.

Выражения для многочленов Λ_2, Λ_3 и Λ_4 приведены в [8]. Для того, чтобы вычислить Λ_5, заметим, что в самом общем виде его можно представить следующим образом

$$\Lambda_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)= =\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5\le12,\\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+5\alpha_5=30}}c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\sigma_1^{\alpha_1}\sigma_2^{\alpha_2}\sigma_3^{\alpha_3}\sigma_4^{\alpha_4}\sigma_5^{\alpha_5}. \quad (28)$$

Перепишем теперь условие (21), как условия на Λ_5. Они получаются как условия на вычеты функции J_5^a в точках $z=-x_1$, $-x_1\omega^{\pm1}$ и на предел при $z\to\infty$. Эти условия имеют следующий вид

$$\Lambda_5(-x_1|x_1,x_2,x_3,x_4)= =-x_1^3K_1^f(x_1|x_2,x_3,x_4)\Lambda_3(x_2,x_3,x_4), \quad (29)$$

$$\Lambda_5(-x_1\omega^{-1}|x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^3B_1^{f+}(x_1,x_2,x_3,x_4) \times\Lambda_4(x_1\omega,x_2,x_3,x_4)\prod_{i=2}^{4}(x_1+x_i\omega^{-1}), \quad (30)$$

$$\Lambda_5(-x_1\omega|x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^3B_1^{f-}(x_1,x_2,x_3,x_4) \times\Lambda_4(x_1\omega^{-1},x_2,x_3,x_4)\prod_{i=2}^{4}(x_1+x_i\omega), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned}K_1^f(x_1|x_2,x_3,x_4)&=-\frac{(H^2-3)(H^2-1)}{2(\omega-\omega^{-1})}\times\\&\times\left[\prod_{i=2}^{4}f_u(x_1,-\omega x_i)f_u(x_1\omega,x_i)(x_1-\omega x_i)(x_1+\omega^{-1}x_i)\right.\\&\left.-\prod_{i=2}^{4}f_u(-\omega x_1,x_i)f_u(x_1,\omega x_i)(x_1+\omega x_i)(x_1-\omega^{-1}x_i)\right],\end{aligned} \quad (32)$$

$$B_1^{f+}(x_1,x_2,x_3,x_4)=H(H^2-1)\prod_{i=2}^{4}f_u(x_1\omega,x_i), \quad (33)$$

$$B_1^{f-}(x_1,x_2,x_3,x_4)=H(H^2-1)\prod_{i=2}^{4}f_u(x_1,\omega x_i), \quad (34)$$

а функция $f_u(x,y) = x^2+y^2+xy(H^2-2)$ происходит от числителя функции $f(x)$. Условие на предел при $z\to\infty$ выглядит так

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=12\\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+5\alpha_5=30}} c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\left(\sigma_1^{(4)}\right)^{\alpha_2}\left(\sigma_2^{(4)}\right)^{\alpha_3}\times$$
$$\times\left(\sigma_3^{(4)}\right)^{\alpha_4}\left(\sigma_4^{(4)}\right)^{\alpha_5} = J\Lambda_4(x_1,x_2,x_3,x_4), \qquad (35)$$

где $\sigma_i^{(4)}$ – элементарные симметрические многочлены от x_1,x_2,x_3,x_4. Преимущество данных условий состоит в том, что они являются уравнениями на многочлены.

Задача теперь состоит в решении системы уравнений (29)–(35) относительно 252 коэффициентов $c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$. Однако, так как нас интересует вклад форм-фактора F^{ε}_{1112} в матрицу рассеяния, то нужно изучить его значение на энергетической поверхности, которая задается равенством нулю общей энергии и импульса частиц:

$$\sum_{i=1}^{5} e^{\theta_i} = 0, \qquad (36)$$

$$\sum_{i=1}^{5} e^{-\theta_i} = 0, \qquad (37)$$

или в терминах элементарных симметрических полиномов это условие будет выглядеть так:

$$\sigma_1\left(e^{\theta_1},\ldots,e^{\theta_5}\right)=0,\ \sigma_4\left(e^{\theta_1},\ldots,e^{\theta_5}\right)=0. \qquad (38)$$

Таким образом нас интересует только следующий набор коэффициентов (здесь введены обозначения $K(J,H) = -3+7H^2-5H^4+H^6+HJ-H^3J+J^2$ и $L=H^2-1$):

$$c_{0,0,0,0,6} = JK(J^2-4HJL+(13-5HJ)L^2+$$
$$+(5+5HJ)L^3-(9+HJ)L^4+2L^5) = 7.18679\cdot 10^{-13},$$
$$c_{0,1,1,0,5} = JK(-4J^2+13HJL+(15HJ-37)L^2+$$
$$+(16+15HJ)L^3+(27+3HJ)L^4-6L^5) = 14.1355,$$
$$c_{0,2,2,0,4} = JK(6J^2-15HJL+3(11-5HJ)L^2+$$
$$+3(6+5HJ)L^3-3(9+HJ)L^4+6L^5) = -42.4064,$$
$$c_{0,3,3,0,3} = JK(-4J^2+7HJL+(5HJ-7)L^2-$$
$$-(8+5HJ)L^3+(9+HJ)L^4-2L^5) = 42.4064,$$
$$c_{0,4,4,0,2} = JK^2 = -14.1355,$$
$$c_{0,0,5,0,3} = c_{0,0,10,0,0} = c_{0,1,6,0,2} =$$
$$= c_{0,2,7,0,1} = c_{0,3,8,0,0} = c_{0,5,0,0,4} = 0,$$
$$c_{0,5,5,0,1} = c_{0,6,1,0,3} = c_{0,6,6,0,0} =$$
$$= c_{0,7,2,0,2} = c_{0,8,3,0,1} = c_{0,10,0,0,2} = 0. \qquad (39)$$

Определив многочлен Λ_5, найдем окончательно F^{ε}_{1112}. Единственный множитель, дающий ненулевой вклад в предел (8), – это $\mathcal{P}_{2/5}(\theta_{ij})$ при $i=4$ и $j=5$. Так как

$$\lim_{t\to 0}\frac{-it}{\mathcal{P}_{2/5}(iu_{11}^2+t)} = \cot\frac{2\pi}{5}, \qquad (40)$$

то

$$F^{\varepsilon}_{1112}(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4) = \langle\varepsilon\rangle\frac{\rho^5\cot\frac{2\pi}{5}}{\Gamma_{11}^2}J_5^{a_{1,3}}\left(e^{\theta_1},e^{\theta_2},e^{\theta_3},e^{\theta_4}\gamma,e^{\theta_4}\gamma^{-1}\right)$$
$$\times\frac{R_{11}\left(\frac{i\pi}{5}\right)}{\mathcal{P}_{1/15}\left(\frac{i\pi}{5}\right)}\prod_{1\le i<j\le 3}\frac{R_{11}(\theta_{ij})}{\mathcal{P}_{2/5}(\theta_{ij})\mathcal{P}_{1/15}(\theta_{ij})}$$
$$\times\prod_{i=1}^{3}\frac{R_{11}\left(\theta_{4j}+\frac{i\pi}{5}\right)R_{11}\left(\theta_{4j}-\frac{i\pi}{5}\right)}{\mathcal{P}_{2/5}\left(\theta_{4j}+\frac{i\pi}{5}\right)\mathcal{P}_{1/15}\left(\theta_{4j}+\frac{i\pi}{5}\right)\mathcal{P}_{2/5}\left(\theta_{4j}-\frac{i\pi}{5}\right)\mathcal{P}_{1/15}\left(\theta_{4j}-\frac{i\pi}{5}\right)}, \qquad (41)$$

где $\gamma = e^{\frac{i\pi}{5}}$.

3. Вычисление сечения рассеяния. Сечение рассеяния процесса $11\to 12$ можно вычислить по формуле

$$\sigma_{11\to 12}(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{2!}\int\frac{d\theta_3}{2\pi}\frac{d\beta}{2\pi}(2\pi)^2\delta^{(2)}(P_{\text{out}}-P_{\text{in}})|S_{11\to 12}(\theta_1,\theta_2|\theta_3,\beta)|^2, \qquad (42)$$

где через θ_i обозначены быстроты частиц массы m_1, а через β – частицы массы m_2, а потому $P_{\text{in}} = (m_1\cosh\theta_1+m_1\cosh\theta_2, m_1\sinh\theta_1+m_1\sinh\theta_2)$ и $P_{\text{out}} = (m_1\cosh\theta_3+m_2\cosh\beta, m_1\sinh\theta_3+m_2\sinh\beta)$ – соответственно общий 2-импульс частиц до и после неупругого процесса, а $S_{11\to 12}$ – матричный элемент S-матрицы, который можно вычислить по теории возмущений [10]

$$S_{11\to 12}(\theta_1,\theta_2|\theta_3,\beta) = {}^{\text{out}}_{m}\langle\theta_3,\beta|\theta_1,\theta_2\rangle^{\text{in}}_{m} \tag{43}$$

$$= {}^{\text{out}}_{0}\langle\theta_3,\beta|\theta_1,\theta_2\rangle^{\text{in}}_{0} - im(2\pi)^2\delta^{(2)}\times$$

$$\times(P_{\text{out}}-P_{\text{in}}){}^{\text{out}}_{0}\langle\theta_3,\beta|\varepsilon(0)|\theta_1,\theta_2\rangle^{\text{in}}_{0}. \tag{44}$$

Так как невозмущенная теория интегрируема, то первое слагаемое равно нулю

$${}^{\text{out}}_{0}\langle\theta_3,\beta|\theta_1,\theta_2\rangle^{\text{in}}_{0} = 0, \tag{45}$$

а значит, сечение рассеяния связано с форм-фактором возмущающего оператора посредством

$$\sigma_{11\to 12}(\theta_1,\theta_2) = \frac{m^2}{2}\times \tag{46}$$

$$\int\frac{d\theta_3}{2\pi}\frac{d\beta}{2\pi}(2\pi)^2\delta^{(2)}(P_{\text{out}}-P_{\text{in}})|{}^{\text{out}}_{0}\langle\theta_3,\beta|\varepsilon(0)|\theta_1,\theta_2\rangle^{\text{in}}_{0}|^2.$$

Можно воспользоваться кроссинг-симметрией, чтобы переписать матричный элемент в виде форм-фактора, который нужно вычислить в невозмущенной теории [11]

$${}^{\text{out}}_{0}\langle\theta_3,\beta|\varepsilon(0)|\theta_1,\theta_2\rangle^{\text{in}}_{0} = F^{\varepsilon}_{1112}(\theta_1+i\pi,\theta_2+i\pi,\theta_3,\beta). \tag{47}$$

Условие сохранения энергии и импульса записывается так

$$x_1+x_2 = x_3+kz, \tag{48}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}+\frac{k}{z}, \tag{49}$$

где $x_i = e^{\theta_i}$, $z = e^{\beta}$, а $k = \frac{m_2}{m_1} = 2\cos\frac{\pi}{5}$.

Асимптотическое поведение при высоких энергиях. На рисунке 1 мы видим график зависимости $\sigma_{11\to 12}(E)/(E^{-11}\log E)$. По графику логарифмической зависимости можно судить, что при $E\to+\infty$ сечение рассеяния ведет себя как $E^{-11}\log E$.

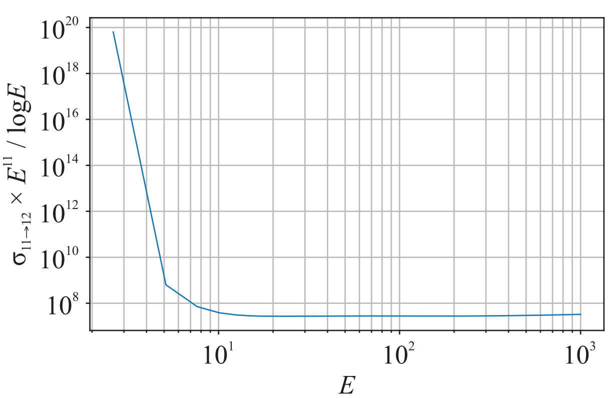

Рис. 1. (Цветной онлайн) График зависимости сечения рассеяния $\sigma_{11\to 12}/(E^{-11}\log E)$ от энергии в системе центра инерции в логарфимическом масштабе

Асимптотическое поведение над порогом. На рисунке 2 мы видим график зависимости $\sigma_{11\to 12}((E-E_{\text{th}})^{-1})$, где $E_{\text{th}} = m_1+m_2 = m_1\left(1+2\cos\frac{\pi}{2}\right)$. По графику логарифмической зависимости можно судить, что при $E\to 3$ сечение рассеяния ведет себя как $(E-E_{\text{th}})^{-1/2}$.

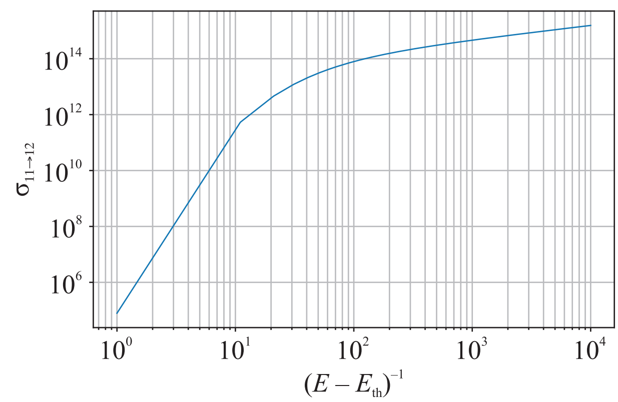

Рис. 2. (Цветной онлайн) График зависимости сечения рассеяния $\sigma_{11\to 12}$ от величины $(E-E_{\text{th}})^{-1}$ в логарифмическом масштабе

4. Заключение. Таким образом, с помощью форм-факторной теории возмущений [10] было вычислено с учетом первого порядка теории возмущений сечение неупругого рассеяния, т.е. процесса с изменением типа частиц. Также графически обоснованы асимптотики вычисленного сечения при больших энергиях и над порогом. Учет последующих порядков предполагает вычисление членов, квадратичных по форм-факторам возмущающего поля ε.

Автор выражает благодарность Александру Замолодчикову и Алексею Литвинову за ценные обсуждения и советы по публикации.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем передачи информации имени А. А. Харкевича Российской академии наук. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Springer-Verlag New York, N.Y. (1996).
2. T. T. Wu and B. M. McCoy, *The two-dimensional Ising model*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1973).

3. A. B. Zamolodchikov, Int. J. Mod. Phys. A **4**, 4235 (1989).
4. A. B. Zamolodchikov, Adv. Stud. Pure 158 Math. **19**, 641 (1989).
5. V. Fateev, Phys. Lett. B **324**, 45 (1994).
6. G. Delfino and G. Mussardo, Nucl. Phys. B **455**, 724 (1995); hep-th/9507010.
7. A. Zamolodchikov, 1310.4821.
8. O. Alekseev, JETP Lett. **95**, 201 (2012); arXiv:1106.4758v2.
9. V. Fateev, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov, and A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. B **516**, 652 (1998); hep-th/9709034.
10. G. Delfino, G. Mussardo, and P. Simonetti, Nucl. Phys. B **473**, 469 (1996); hep-th/9603011.
11. F. A. Smirnov, *Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore (1992); 10.1142/1115; https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/1115.