Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 10, с. 650 – 659 © 2025 г. 25 ноября

Кросс-корреляции в процессе неупругого рассеяния бихроматической накачки на Ξ-системе

Я. Т. Шнейдман[×+1)], *С. А. Гунин*[+], *А. Ю. Дмитриев*[+*], *Г. П. Федоров*[+*], *О. В. Астафьев*[×+*]

[+]*Лаборатория искусственных квантовых систем, Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

[*]*Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, 125009 Москва, Россия*

[×]*Сколковский технологический институт, 121205 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 августа 2025 г.
После переработки 22 октября 2025 г.
Принята к публикации 23 октября 2025 г.

В данном письме для трехуровневой Ξ-системы, подвергнутой воздействию резонансного бихроматического возбуждения, исследованы вклады кросс-корреляционных функций в спектр резонансной флуоресценции, включающие в себя последовательное испускание двух фотонов с каждого из возбужденных уровней. Кросс-корреляционные функции демонстрируют взаимную когерентность излучаемых частотно разнесенных полей. Рассмотрен вклад в рассеянное излучение при наличии нестационарных процессов. Показано, что процессы, дающие вклад в кросс-корреляцию, определяют группировку фотонов с обоих возбужденных переходов.

DOI: 10.31857/S0370274X25110187

Среди всего многообразия квантово-оптических эффектов существенный интерес вызывает явление резонансной флуоресценции (РФ). Помимо фундаментальной значимости, наблюдение спектра неупругого рассеяния позволяет раскрывать внутреннюю структуру энергетических уровней экспериментальных образцов [1], получать информацию об окружении открытых квантовых систем [2].

Теоретически предсказанные спектральные характеристики неупруго рассеянного на двухуровневой системе (ДУС) в открытое пространство света представлены в пионерской работе [3] и были экспериментально верифицированы как на платформе естественных атомных пучков [4], так и с привлечением сверхпроводниковых искусственных атомов (СИА) [5]. Исследования в данной области расширили теоретические предсказания на случай различных конфигураций трехуровневых систем (ТУС) [6–8], а также для атома, находящегося в оптическом резонаторе [9]. Экспериментальные исследования РФ были проведены с использованием платформы СИА для ТУС [10] и атома в резонаторе [11]. Многообразие задач, связанных с явлением РФ, не ограничивается изучением макроскопических спектральных характеристик излучения с разрешением по частотам процессов, но и включает в себя вопросы исследования фотонной статистики, раскрывающие внутренние микроскопические корреляции.

Существуют нетривиальные случаи скоррелированности фотонов из различных боковых линий триплета Моллоу–Апанасевича [12–14]. Предсказанные в [15] корреляции частотно-разнесенных фотонов впервые экспериментально наблюдались с использованием естественных атомов [16]. Исследование корреляций излучения как с одного возбужденного перехода, так и с двух, индуцированных многофотонными процессами рассеяния, нашло отражение в серии теоретических работ [12, 15, 17]. Предсказано [18] и экспериментально исследовано [19] свойство антигруппировки фотонов при излучении с одного возбужденного перехода, причем убедительно продемонстрировано теоретически [15, 17], что, помимо антигруппировки, может наблюдаться и группировка фотонов с одного или различных уровней.

Спектр неупругого процесса рассеяния для естественных систем возможно восстановить, напрямую детектируя фотоотсчеты с разрешением по частоте. Микроволновой же диапазон взаимодействия, в отличие от оптической платформы, позволяет использовать в качестве центра рассеяния сверхпроводниковые квантовые цепи, которые обладают рядом преимуществ перед естественными атомами: относительная простота достижения режима сильной связи и, следовательно, высокого коэффициента экстинкции [20], присущая направленность излучения,

1)e-mail: shneidman.iat@phystech.su

а также возможность прямого детектирования рассеянных полей и их корреляторов с разрешением во времени. Использование СИА позволяет добиться селективного возбуждения как одиночных атомов, так и отдельных переходов внутри них, позволяя исследовать РФ отдельного СИА [5].

Возможность прямого детектирования рассеянных полей на сверхпроводниковых цепях с разрешением во времени позволяет исследовать кросс-корреляционные функции для излучения с различных возбужденных уровней энергии без привлечения интерференционных схем, фазовращателей и резонансной фильтрации. Такие функции входят в полный спектр двухвременных корреляторов рассеянного света и, следовательно, должны вносить свой вклад в спектральную плотность мощности рассеянного света. Изучение вклада кросс-корреляционных функций в спектр РФ Ξ-систем с бихроматической накачкой не нашло должного отражения в научной литературе.

В продолжение работы [10], посвященной экспериментальному исследованию эволюции автокорреляционных функций рассеянного поля при взаимодействии бихроматической резонансной накачки с искусственной сверхпроводниковой трехуровневой Ξ-системой, в данном письме показано, что кросс-корреляционные функции рассеянного излучения имеют нетривиальный вклад в спектральную плотность мощности излучаемого поля. Излучение, связанное с кросс-корреляционными функциями, демонстрирует взаимную когерентность фотонов, излучаемых последовательно с каждого из возбужденных уровней. Показано, что процессы, дающие вклад в кросс-корреляционные функции или же взаимные функции корреляции, задают группировку фотонов во времени.

1. Взаимодействие ТУС с внешним полем. Изучаемая система (рис. 1a) состоит из реализованной с использованием СИА ангармоничной ТУС, связанной с открытым пространством – волноводом и находящейся под действием бихроматической накачки. Каждый из монохроматических возбуждающих тонов находится в резонансе с одним из переходов ТУС.

В приближении вращающейся волны гамильтониан такой системы, учитывающий только дипольные каналы взаимодействия, можно записать в виде:

$$\hat{H}_{\mathbf{d}} = \hbar\omega_1\hat{\sigma}_1^{+}\hat{\sigma}_1 + \hbar(\omega_2+\omega_1)\hat{\sigma}_2^{+}\hat{\sigma}_2 + \\ + \sum_{i=1,2}\frac{\hbar\Omega_i}{2}(\hat{\sigma}_i e^{i\omega_i t} + \hat{\sigma}_i^{+} e^{-i\omega_i t}), \quad (1)$$

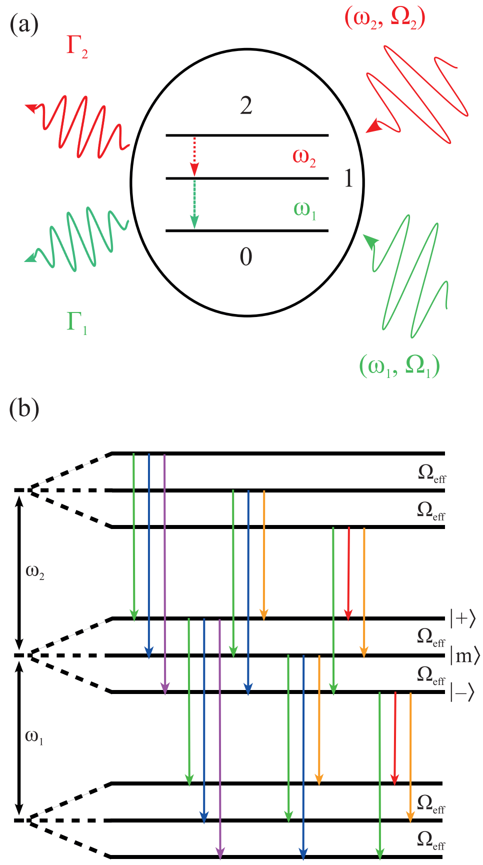

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схематическое изображение трехуровневой системы под действием бихроматической резонансной накачки. Каждый монохроматический тон амплитуды Ω_1 и Ω_2 возбуждает переходы $0-1$ (частоты ω_1) и $1-2$ (частоты ω_2, уширенные с константой распада Γ_1 и Γ_2 соответственно). (b) – Структура квазистационарных уровней энергии ТУС, гибридизованной под действием внешней бихроматической накачки. Цветными линиями отмечены переходы с одинаковой отстройкой от основной частоты между уровнями, расщепленными на Ω_{eff} за счет взаимодействия с внешней бихроматической накачкой

где $\hat{\sigma}_i$ – понижающие операторы, записывающиеся в терминах базисных состояний ТУС как:

$$\hat{\sigma}_1 = |0\rangle\langle 1|, \hat{\sigma}_2 = |1\rangle\langle 2|, \quad (2)$$

ω_i – собственная частота, а Ω_i – Раби частота для i-го перехода ТУС. При этом выполняется условие на ангармонизм ТУС $\alpha = \omega_1 - \omega_2 \gg \Omega_i$, что позволяет опустить в гамильтониане учет взаимодействия монохроматической волны с нерезонансным ей переходом.

Для записи уравнений с независящим от времени гамильтонианом возможно перейти в “дважды вращающуюся” на частотах несущих возбуждающих сигналов систему отсчета с оператором эволюции:

$$\hat{U}_{\mathrm{DRF}}(t) = \exp(-i\omega_1 \hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_1 t - i(\omega_1+\omega_2)\hat{\sigma}_2^+ \hat{\sigma}_2 t). \quad (3)$$

В такой системе отсчета гамильтониан (1) принимает вид:

$$\hat{H}/\hbar = \sum_{i=1,2} \frac{\Omega_i}{2}(\hat{\sigma}_i + \hat{\sigma}_i^+). \quad (4)$$

В таком представлении путем диагонализации гамильтониана можно получить квазистационарные уровни системы:

$$E_\pm/\hbar = \pm\frac{\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}}{2} \equiv \pm\,\Omega_{\mathrm{eff}},\ E_m = 0, \quad (5)$$

которым соответствуют гибридизованные состояния:

$$\begin{cases} |+\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}\Omega_{\mathrm{eff}}}(\Omega_1|0\rangle + \Omega_2|2\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \\ |m\rangle = \frac{1}{2\Omega_{\mathrm{eff}}}(\Omega_1|2\rangle - \Omega_2|0\rangle), \\ |-\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}\Omega_{\mathrm{eff}}}(\Omega_1|0\rangle + \Omega_2|2\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle. \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда следует, что сигнал на каждой собственной частоте изолированной ТУС ω_i расщепляется на 5 эквидистантных линий, расщепление между которыми задается эффективной амплитудой накачки Ω_{eff}, см. рис. 1b.

2. Уравнения движения. Учет связи изучаемой системы с открытым пространством приводит к уравнениям в форме Горини–Коссаковского–Сударшана–Линдблада (ГКСЛ) [21] с членами, отвечающими за наличие диссипации:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\rho] + \sum_{i=1,2}\left(\mathscr{L}_i \rho \mathscr{L}_i^+ - \frac{1}{2}\left\{\mathscr{L}_i^+\mathscr{L}_i, \rho\right\}\right), \quad (7)$$

где $\mathscr{L}_i = \sqrt{\Gamma_i}\hat{\sigma}_i$, а $\Gamma_i = \Gamma_1, \Gamma_2$ – скорости излучательного распада в открытое пространство за счет квантовых флуктуаций поля. Канал чистой дефазировки в модели не учитывается.

В таком случае полная система уравнений, описывающих средние операторов ТУС, получается из уравнения ГКСЛ (см. Приложение А):

$$\begin{cases} \frac{d\langle\hat{\sigma}_1\rangle}{dt} = -\frac{i\Omega_2}{2}\langle\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\rangle - \frac{\Gamma_1}{2}\langle\hat{\sigma}_1\rangle - \\ \quad -\frac{i\Omega_1}{2}(1 - 2\langle\hat{\sigma}_1^+\hat{\sigma}_1\rangle - \langle\hat{\sigma}_2^+\hat{\sigma}_2\rangle), \\ \frac{d\langle\hat{\sigma}_2\rangle}{dt} = \frac{i\Omega_1}{2}\langle\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\rangle - \frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\langle\hat{\sigma}_2\rangle - \\ \quad -\frac{i\Omega_2}{2}(\langle\hat{\sigma}_1^+\hat{\sigma}_1\rangle - \langle\hat{\sigma}_2^+\hat{\sigma}_2\rangle), \\ \frac{d\langle\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\rangle}{dt} = \frac{i\Omega_1}{2}\langle\hat{\sigma}_2\rangle - \frac{i\Omega_2}{2}\langle\hat{\sigma}_1\rangle - \frac{\Gamma_2}{2}\langle\hat{\sigma}_1\hat{\sigma}_2\rangle, \\ \frac{d\langle\hat{\sigma}_1^+\hat{\sigma}_1\rangle}{dt} = \frac{i\Omega_1}{2}(\langle\hat{\sigma}_1\rangle - \langle\hat{\sigma}_1^+\rangle) - \frac{i\Omega_2}{2}(\langle\hat{\sigma}_2\rangle - \langle\hat{\sigma}_2^+\rangle) - \\ \quad -\Gamma_1\langle\hat{\sigma}_1^+\hat{\sigma}_1\rangle + \Gamma_2\langle\hat{\sigma}_2^+\hat{\sigma}_2\rangle, \\ \frac{d\langle\hat{\sigma}_2^+\hat{\sigma}_2\rangle}{dt} = \frac{i\Omega_2}{2}(\langle\hat{\sigma}_2\rangle - \langle\hat{\sigma}_2^+\rangle) - \Gamma_2\langle\hat{\sigma}_2^+\hat{\sigma}_2\rangle. \end{cases} \quad (8)$$

Из полной системы возможно получить собственные числа матрицы динамического отображения, которые будут описывать положение пиков на графиках спектральной плотности мощности рассеянного света, а также их уширения. В данном письме собственные числа рассчитаны в первом порядке малости по $\Gamma_i/\Omega_{\mathrm{eff}}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\Omega_{\mathrm{eff}}\left[\frac{1}{2}\frac{\Gamma_1}{\Omega_{\mathrm{eff}}} + \frac{\Omega_2^2}{8\Omega_{\mathrm{eff}}^2}\frac{\Gamma_2}{\Omega_{\mathrm{eff}}}\right], \\ \lambda_{2,3} = \pm i\Omega_{\mathrm{eff}} - \\ -\Omega_{\mathrm{eff}}\left[\frac{1}{4}\frac{\Gamma_1}{\Omega_{\mathrm{eff}}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Omega_2^2}{16\Omega_{\mathrm{eff}}^2}\right)\frac{\Gamma_2}{\Omega_{\mathrm{eff}}}\right], \\ \lambda_{4,5} = \pm 2i\Omega_{\mathrm{eff}} - \\ -\Omega_{\mathrm{eff}}\left[\left(\frac{3}{4} - \frac{\Omega_2^2}{16\Omega_{\mathrm{eff}}^2}\right)\frac{\Gamma_1}{\Omega_{\mathrm{eff}}} + \frac{3\Omega_2^2}{16\Omega_{\mathrm{eff}}^2}\frac{\Gamma_2}{\Omega_{\mathrm{eff}}}\right]. \end{cases} \quad (9)$$

3. Корреляции в излучении ТУС. Связь излученного в открытое пространство поля с понижающими операторами следует из [22] и записывается как:

$$\hat{V}_{\mathrm{out}} \propto \sqrt{\Gamma_1}\hat{\sigma}_1 + \sqrt{\Gamma_2}\hat{\sigma}_2. \quad (10)$$

В полное поле вносит вклад излучение с каждого из возбужденных переходов. В автокорреляционную функцию излучения $\langle\hat{V}_{\mathrm{out}}^+(t)\hat{V}_{\mathrm{out}}(t+\tau)\rangle$, определяющую полную спектральную плотность мощности, входят все варианты автокорреляционных и кросс-корреляционных функций для атомных операторов $\hat{\sigma}_i$:

$$\langle\hat{V}_{\mathrm{out}}^+(t)\hat{V}_{\mathrm{out}}(t+\tau)\rangle \propto \Gamma_1 G_{11}^{(1)}(t,\tau) + \Gamma_2 G_{22}^{(1)}(t,\tau) + \\ + \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}G_{21}^{(1)}(t,\tau) + \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}G_{12}^{(1)}(t,\tau), \quad (11)$$

где введено обозначение для автокорреляторов и кросс-корреляторов:

$$G_{ij}^{(1)}(t,\tau) = \langle\hat{\sigma}_i^+(t)\hat{\sigma}_j(t+\tau)\rangle. \quad (12)$$

В лабораторной системе отсчета независящими от t являются только автокорреляторы, а кросс-корреляторы из-за ненулевого ангармонизма будут эволюционировать на частотах, определяемых как $e^{\pm i(\omega_1-\omega_2)t}$. Избавиться от зависимости от общего времени t возможно путем демодуляции сигналов, чему соответствует в рассматриваемом подходе переход в “дважды вращающуюся” систему отсчета. Экспериментально этого возможно добиться путем прямой демодуляции сигналов с использованием стабильной опорной частоты. Для расчета кросс-корреляторов и автокорреляторов было использовано следствие из теоремы Онзагера–Лакса [23]. В соответствии с ней, динамика коррелятора $G_{ij}^{(1)}(0,\tau)$ в “дважды вращающейся” системе отсчета определяется системой уравнений, получаемой из (8) заменой производных по времени t на производные по времени сдвига τ и средних операторов $\langle \hat{A}_i(t)\rangle$ на корреляторы $\langle \hat{O}(t)\hat{A}_i(t+\tau)\rangle$, где $\hat{A}_i$, $\hat{O}$ – некоторые операторы, действующие на ТУС. Это следует из возможности записать коррелятор в виде, подобном записи среднего для оператора:

$$\langle \hat{O}(t)\hat{A}_i(t+\tau)\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{S}}(\hat{A}_i(0)\rho_{\hat{O}}(\tau)), \tag{13}$$

где матрица плотности $\rho(t)$ заменяется на $\rho_{\hat{O}}(\tau)$, динамика которой также определяется уравнением (7), а начальное значение задается как $\rho_{\hat{O}}(0) = \rho(t)\hat{O}(0)$. Подробнее переход показан в Приложении Б.

Путем численного расчета была найдена временная и частотная зависимость всех возможных автокорреляторов (рис. 2) и кросс-корреляторов (рис. 3). Для сравнения аналитически полученных зависимостей положений и уширений пиков на спектрах от частот Раби накачек (9) с результатами численного моделирования в Приложении построены тепловые карты (см. Приложение Б) спектральной плотности мощности, нормированной на максимум соответствующего пика. Все изображения, помимо тепловых карт, построены для параметров системы, исследованной в эксперименте [10]: $\alpha = 340$ МГц, $\Gamma_1/2\pi = 2$ МГц, $\Gamma_2/2\pi = 4$ МГц, $\Omega_1/2\pi = 25$ МГц, $\Omega_2/2\pi = 24$ МГц.

Корреляторы первого порядка показывают возможность интерференции сигналов. Полученные в результате вычислений автокорреляторы первого порядка показывают наличие оптической когерентности рассеянного сигнала. Фурье-образы автокорреляторов, составляющие спектральную плотность мощности исходящего сигнала, совпадают с измеренными в работе [10].

Однако для нашей системы наблюдение интерференции возможно не только для сигнала с одного уровня. В случае интерференции сигналов с первого и второго уровней:

$$I \propto \langle(\sqrt{\Gamma}_1\hat{\sigma}_1^+(t) + \sqrt{\Gamma}_2\hat{\sigma}_2^+(t+\tau)) \times \times (\sqrt{\Gamma}_1\hat{\sigma}_1(t) + \sqrt{\Gamma}_2\hat{\sigma}_2(t+\tau))\rangle = = \Gamma_1 G_{11}^{(1)}(0,0) + \Gamma_2 G_{22}^{(1)}(0,0) + 2\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}\,\mathrm{Re}(G_{12}^{(1)}(t,\tau)). \tag{14}$$

Нетривиальным является тот факт, что даже в случае разных частот для переходов 1 и 2 будет иметь место интерференционная картина. Обычно в оптике интерференционная картина наблюдается на разделенных пучках от одного источника, в то время как наблюдение интерференции от двух источников на разных частотах является непростой задачей из-за сложности в синхронизации их фаз. В рассмотренном же случае два “источника” автоматически являются синхронизированными по фазе, так как принадлежат единой квантовой системе. Наблюдаемая интерференционная картина от времени сдвига τ будет соответствовать виду коррелятора $\langle \hat{\sigma}_i^+(t)\hat{\sigma}_j(t+ +\tau)\rangle$. В случае наблюдения интерференционной картины методом, аналогичным наблюдению интерференции от двух щелей, огибающая зависимости интенсивности от координаты в зафиксированный момент времени будет аналогична исследованной нами зависимости от времени сдвига τ. Но из-за разности частот картина не будет иметь статичного характера, а будет иметь динамику от общего времени t на разности частот $\omega_i - \omega_j$. Схожие биения были экспериментально показаны для оптических частот [24].

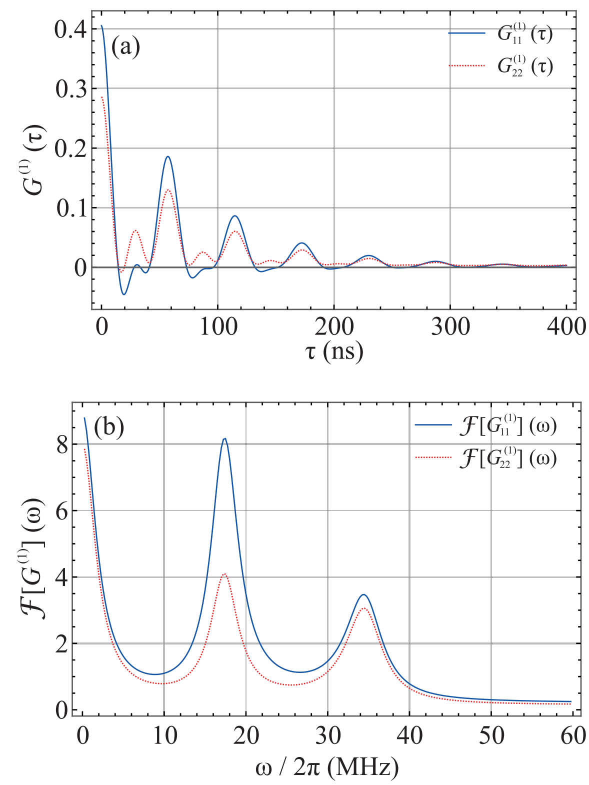

Рис. 2. (Цветной онлайн) (a) – Численно рассчитанные значения автокорреляционных функций излучения для стационарного состояния системы. Зависимость автокорреляционных функций от времени сдвига τ. (b) – Фурье-образ автокорреляционных функций, представленных на (a)

Численно полученные Фурье-образы кросс-корреляторов показывают подавление компонент с частотами $\pm\Omega_{\mathrm{eff}}$ для кросс-коррелятора $G_{21}^{(1)}$, а также наличие отрицательных значений, чего не проявлялось для Фурье-образов автокоррелятора.

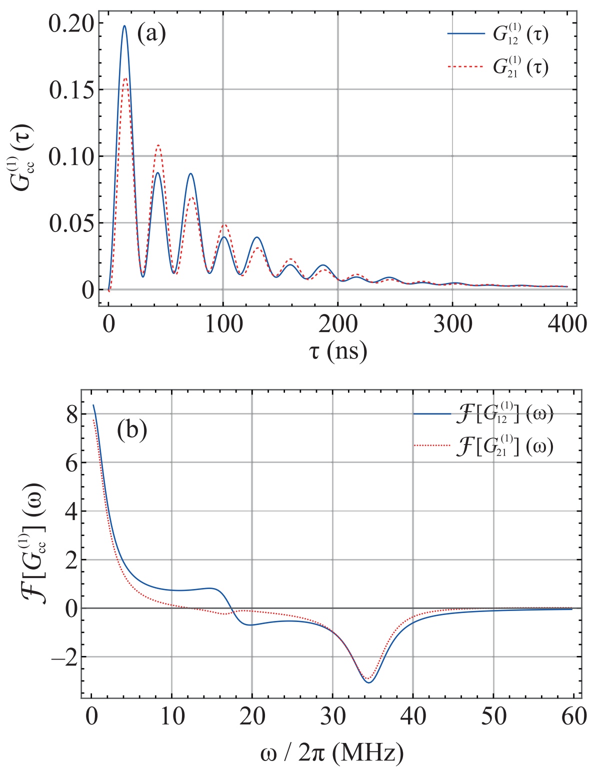

Рис. 3. (Цветной онлайн) (a) – Численно рассчитанные значения возможных кросс-корреляционных функций для стационарного состояния системы в зависимости от времени сдвига τ. (b) – Действительная часть Фурье-образа кросс-корреляционных функций, представленных на (a)

Факт наличия отрицательных компонент был показан также для кросс-корреляторов в рамках модели Джейнса–Каммингса [25].

Несмотря на то, что при использовании сверхпроводниковой платформы благодаря возможности прямого детектирования полей с использованием аналого-цифрового преобразователя можно ограничиться изучением динамики кросс-корреляторов в "дважды вращающейся" системе отсчета, остается вопрос с рассмотрением динамики кросс-корреляторов в лабораторной системе отсчета, доступной для экспериментов на платформе естественных атомов. В ней процесс перестает быть стационарным, так как корреляторы $G^{(1)}_{12}(t,\tau)$ и $G^{(1)}_{21}(t,\tau)$ приобретают зависимость от времени t ввиду ангармоничности системы уровней.

В отличие от автокорреляторов, зависимость кросс-корреляторов от времени t (11) в лабораторной системе отсчета не позволяет сопоставить их Фурье-образы со вкладами в спектральную плотность мощности, измеряемую в лабораторной системе, поэтому в письме была рассчитана определенная в [26] спектральная плотность мощности нестационарного сигнала:

$$S_{ij}(\omega,t,\Gamma) = 2\Gamma \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} e^{(\Gamma-i\omega)(t_1-t)}e^{(\Gamma+i\omega)(t_2-t)} \times \\ \times \langle \hat{\sigma}_i^{+}(t_1)\hat{\sigma}_j(t_2)\rangle dt_1 dt_2. \quad (15)$$

В этой записи $\Gamma \ll \Gamma_1, \Gamma_2$ вводится как ширина спектральной линии фильтра с максимумом пропускания на частоте ω. Введение фильтра с конечной импульсной характеристикой помогает избежать зануления вклада от кросс-корреляторов в спектральную плотность мощности, которое происходит при подстановке фильтра с $\Gamma \to 0$ из-за биений кросс-коррелятора (16) в лабораторной системе отсчета.

Данные биения возможно демодулировать при проведении эксперимента на сверхпроводниковой платформе, что помогает избежать дальнейших усложнений и использования дополнительной экспериментальной оснастки, чего лишена традиционная оптическая платформа. В общем же случае, после учета динамики кросс-коррелятора от времени в лабораторной системе:

$$\langle \hat{\sigma}_i^{+}(t)\hat{\sigma}_j(t+\tau)\rangle = \langle \hat{\sigma}_i^{+}(0)\hat{\sigma}_j(\tau)\rangle e^{i\Delta_{ij}t}, \Delta_{ij} = \omega_i - \omega_j, \quad (16)$$

путем перехода к новым переменным и интегрирования по $t_1 + t_2$ в (15), возможно записать S_{ij} в виде интеграла по разности времен $\tau = t_2 - t_1$:

$$S_{ij}(\omega,t,\Gamma) = \frac{\Gamma e^{-i\Delta_{12}t}}{2\Gamma + i\Delta_{ij}} \times \\ \times \int_0^{+\infty} \big(e^{-(i\omega - i\omega_j - i\Delta_{ij}+\Gamma)\tau}\langle \hat{\sigma}_j^{+}(0)\hat{\sigma}_i(\tau)\rangle^* + \\ + e^{(i\omega - i\omega_j - \Gamma)\tau}\langle \hat{\sigma}_i^{+}(0)\hat{\sigma}_j(\tau)\rangle\big) d\tau, \quad (17)$$

где было использовано свойство

$$\langle \hat{\sigma}_i^{+}(0)\hat{\sigma}_j(-\tau)\rangle = \langle \hat{\sigma}_j^{+}(0)\hat{\sigma}_i(\tau)\rangle^*. \quad (18)$$

С помощью (17) была определена часть спектральной плотности мощности от нестационарных кросс-корреляторов при $\Gamma/2\pi = 100$ КГц. Результаты представлены на рис. 4.

После включения в рассмотрение фильтра конечной ширины, представленное на рис. 4 абсолютное значение вклада спектральной плотности мощности от кросс-корреляторов перестает зануляться и принимает вид разнесенных на частоту ангармонизма триплета и пентета. Сама же часть плотности мощности от нестационарных кросс-корреляторов оказывается подавленной на величину порядка ширины

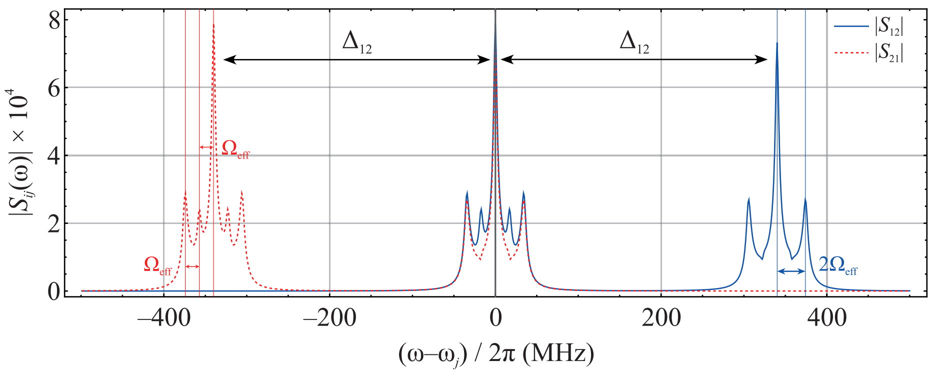

Рис. 4. (Цветной онлайн) Часть спектральной плотности мощности от нестационарных кросс-корреляторов

фильтра Γ/Δ_{12} по сравнению с частью от автокорреляторов. Присутствие такого вклада соответствует взаимной когерентности сигналов с разных уровней.

Различие между вкладами взаимных спектральных плотностей мощности на рис. 4 заключается в высоте пиков, отстоящих на Ω_{eff} от центрального, и, как следствие, меньшем вкладе в эти процессы на общей спектральной картине. Объяснение этому эффекту можно дать, записав понижающие операторы $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ в базисе гибридизованных с возбуждающим полем состояний (6) $|+\rangle, |m\rangle, |-\rangle$:

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{8\Omega_{\text{eff}}^2} \begin{pmatrix} -\Omega_1\Omega_2 & 0 & \Omega_1^2 \\ -2\Omega_{\text{eff}}\Omega_2 & 0 & 2\Omega_{\text{eff}}\Omega_1 \\ -\Omega_2^2 & 0 & \Omega_1\Omega_2 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\hat{\sigma}_2 = \frac{1}{8\Omega_{\text{eff}}^2} \begin{pmatrix} -\Omega_1\Omega_2 & 2\Omega_{\text{eff}}\Omega_2 & -\Omega_2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega_1^2 & -2\Omega_{\text{eff}}\Omega_1 & \Omega_1\Omega_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

В переход $2 \to 1$ вносят свой вклад процессы только с возбуждением уровня $|m\rangle$, а в $1 \to 0$ – только с его девозбуждением. При этом, как следует из рис. 1b, только переходы между гибридизованными уровнями, затрагивающие уровень $|m\rangle$, могут иметь отстройку от базовой частоты Ω_{eff}. Поэтому более скоррелированые процессы последовательного возбуждения и девозбуждения (рис. 5a) обуславливают присутствие отстоящих на Ω_{eff} боковых пиков лишь на части спектра, получающейся из $\langle\hat{\sigma}_1^+(0)\hat{\sigma}_2(\tau)\rangle^*$ при положительных временах сдвига.

В изначальной записи (15) кросс-коррелятор входит и при положительных, и при отрицательных временах сдвига. В преобразованной записи интеграла (17) части спектра, изначально соответствующие интегрированию по различным знакам τ, оказываются разнесенными на величину ангармонизма. Поэтому,

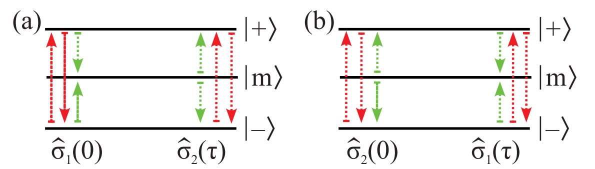

Рис. 5. (Цветной онлайн) Графическое представление последовательных процессов излучения в базисе гибридизованных состояний: в порядке $1 \to 0$ с последующим $2 \to 1$ (a) и в порядке $2 \to 1$ с последующим $1 \to 0$ (b). Зеленые стрелки соответствуют процессам с отстройкой по частоте Ω_{eff}, красные – с отстройкой $2\Omega_{\text{eff}}$

из итоговой записи следует присутствие боковых пиков, отстоящих на Ω_{eff} только для части спектральной картины S_{12} около нуля и отстоящей на ангармонизм от нуля части S_{21}, что подтверждается на численном расчете, представленном на рис. 4.

Наличие корреляций между излучением с двух уровней проявляется не только для полей, но и для интенсивностей излучения с различных уровней. Для анализа этого эффекта, используя аналогичный метод решения уравнений динамики, получаемых с помощью регрессионной теоремы, были рассчитаны корреляционные функции второго порядка, которые соответствуют способности рассеянного излучения к фотон-фотонной интерференции [27]:

$$g_{ij}^{(2)}(t,\tau) = \frac{\langle\hat{\sigma}_i^+(t)\hat{\sigma}_j^+(t+\tau)\hat{\sigma}_j(t+\tau)\hat{\sigma}_i(t)\rangle}{\langle\hat{\sigma}_j^+(t)\hat{\sigma}_j(t)\rangle\langle\hat{\sigma}_i^+(t)\hat{\sigma}_i(t)\rangle}. \tag{21}$$

Результаты вычислений представлены на рис. 6.

Корреляторы второго порядка (рис. 6) $g_{ij}^{(2)}(\tau)$ пропорциональны вероятности зафиксировать фотон с уровня j через время τ после фиксирования фотона с уровня i и, следовательно, показывают скоррелированность фотонов с различных уровней [27].

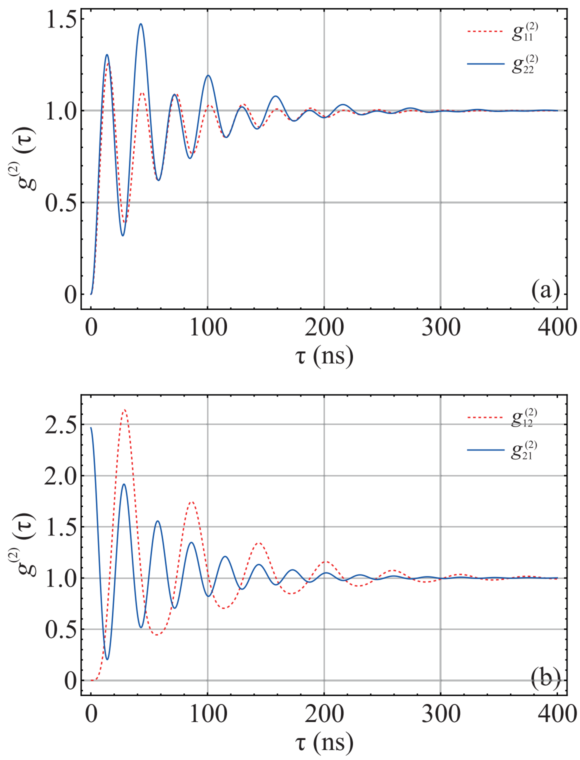

Рис. 6. (Цветной онлайн) Рассчитанные значения корреляторов второго порядка для стационарного состояния системы. (a) – Зависимость корреляторов второго порядка от времени. (b) – Зависимость перекрестных корреляторов второго порядка от времени

Исходя из полученной в моделировании зависимости $g_{21}^{(2)}(\tau)$, представленнной на рис. 6b:

$$g_{21}^{(2)}(0) > g_{21}^{(2)}(\tau). \qquad (22)$$

Это значит, что в системе наблюдается группировка фотонов при испускании в каскадном процессе: релаксация с перехода $2 \to 1$ сопровождается последующей эмиссией с $1 \to 0$. Также видна и антигруппировка при испускании в порядке $1 \to 0$ и последующего $2 \to 1$, которая следует из

$$g_{12}^{(2)}(0) < g_{12}^{(2)}(\tau). \qquad (23)$$

Помимо эффектов группировки и антигруппировки, для кросс-корреляторов второго порядка наблюдается еще один эффект. Заметно, что характерные периоды на рис. 6 отличаются в два раза. Это объясняется тем, что для кросс-коррелятора $g_{21}^{(2)}$ осцилляции определяются колебаниями населенности между уровнями 1 и 0 после излучения фотона $2 \to 1$, что происходит с частотой $2\Omega_{\text{eff}}$. Для $g_{12}^{(2)}$ же осцилляции определяются переносом населенности через два уровня, так как первый фотон был излучен при переходе $1 \to 0$, и осцилляции кросс-коррелятора происходят уже с вдвое меньшей частотой Ω_{eff}.

4. Заключение.

В работе была изучена динамика корреляторов рассеянного трехуровневой Ξ-системой излучения под действием бихроматической резонансной накачки путем численного решения уравнений динамики открытых квантовых систем. Полученные кросс-корреляционные функции показывают наличие когерентности между излучением с различных переходов системы, что приводит к появлению вклада в спектральную плотность мощности. Показано наличие эффектов группировки с различных уровней энергии путем изучения кросс-корреляторов второго порядка.

Приложение А

Получение уравнений на средние значения из управляющего уравнения. Напрямую из управляющего уравнения (7) возможно получить полную систему уравнений на динамику средних значений операторов (7). Из записи среднего значения оператора, действующего на ТУС:

$$\langle \hat{c} \rangle = \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix} \hat{c}\right], \qquad (\text{A.1})$$

следует, что значения операторов соответствуют матричным элементам:

$$\langle \hat{\sigma}_1 \rangle = \rho_{21},\ \langle \hat{\sigma}_2 \rangle = \rho_{32},\ \langle \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \rangle = \rho_{31}, \\ \langle \hat{\sigma}_1^+ \hat{\sigma}_1 \rangle = \rho_{22},\ \langle \hat{\sigma}_2^+ \hat{\sigma}_2 \rangle = \rho_{33}. \qquad (\text{A.2})$$

Динамика матрицы плотности описывается:

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \rho] + \sum_{i=1,2} \Gamma_i \left(\hat{\sigma}_i \rho \hat{\sigma}_i^+ - \frac{1}{2}\{\hat{\sigma}_i^+ \hat{\sigma}_i, \rho\} \right), \qquad (\text{A.3})$$

откуда следуют уравнения на динамику элементов матрицы плотности:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{21} = -\frac{1}{2}\Gamma_1 \rho_{21} - i\left(\frac{\rho_{11}\Omega_1}{2} - \frac{\rho_{22}\Omega_1}{2} + \frac{\rho_{31}\Omega_2}{2}\right), \\ \dot{\rho}_{32} = -\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}\rho_{32} - i\left(-\frac{1}{2}\rho_{31}\Omega_1 + \frac{\rho_{22}\Omega_2}{2} - \frac{\rho_{33}\Omega_2}{2}\right), \\ \dot{\rho}_{31} = -\frac{1}{2}\Gamma_2 \rho_{31} - i\left(\frac{\rho_{21}\Omega_2}{2} - \frac{\rho_{32}\Omega_1}{2}\right), \\ \dot{\rho}_{22} = -\Gamma_1 \rho_{22} + \Gamma_2 \rho_{33} - \\ \quad -i\left(\frac{\rho_{12}\Omega_1}{2} - \frac{\rho_{21}\Omega_1}{2} - \frac{\rho_{23}\Omega_2}{2} + \frac{\rho_{32}\Omega_2}{2}\right), \\ \dot{\rho}_{33} = -\Gamma_2 \rho_{33} - i\left(\frac{\rho_{23}\Omega_2}{2} - \frac{\rho_{32}\Omega_2}{2}\right). \end{cases} \qquad (\text{A.4})$$

После сопоставления их со средними операторов (A.2) получаем уравнения (8), которые используются далее в регрессионной теореме.

Регрессионная теорема. От системы (8), описывающей динамику средних операторов, можно перейти к системе, описывающей динамику корреляционных функций в соответствии с квантовой регрессионной теоремой. Используемый подход основан на [21].

Изначально рассматривается динамика коррелятора в полной системе взаимодействующих ТУС и резервуара с гамильтонианом $\hat{H}_{\mathrm{SR}} = \hat{H} + \hat{H}_{\mathrm{R}} + \hat{H}_{\mathrm{int}}$. Обозначая матрицу плотности полной системы за χ и рассматривая операторы $\hat{O}$, действующие в момент времени $t = 0$ только на ТУС, возможно записать:

$$\langle \hat{O}_1(t)\hat{O}_2(t+\tau)\rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}_{\mathrm{SR}}(e^{i\hat{H}_{\mathrm{SR}}t}\chi(t)O_1(0)e^{i\hat{H}_{\mathrm{SR}}\tau}\hat{O}_2(0)e^{-i\hat{H}_{\mathrm{SR}}(t+\tau)}) =$$
$$= \mathrm{Tr}_{\mathrm{S}}(\hat{O}_2(0)\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(e^{-i\hat{H}_{\mathrm{SR}}\tau}\chi(t)O_1(0)e^{i\hat{H}_{\mathrm{SR}}\tau})), \quad (\mathrm{A}.5)$$

где было использовано циклическое свойство следа и учтена динамика матрицы плотности во времени:

$$\chi(t) = e^{-i\hat{H}_{\mathrm{SR}}t}\chi(0)e^{i\hat{H}_{\mathrm{SR}}t}. \quad (\mathrm{A}.6)$$

Обозначая

$$\chi_{\hat{O}_1}(\tau) = e^{-i\hat{H}_{\mathrm{SR}}\tau}\chi(t)O_1(0)e^{i\hat{H}_{\mathrm{SR}}\tau}, \quad (\mathrm{A}.7)$$

можно сделать вывод, что динамика $\chi_{\hat{O}_1}$ от τ такая же, как и у матрицы плотности χ от t. Тогда после усреднения по степеням свободы резервуара

$$\rho_{\hat{O}_1}(\tau) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(\chi_{\hat{O}_1}(\tau)) \quad (\mathrm{A}.8)$$

поведение редуцированной матрицы описывается уравнением ГКСЛ (7):

$$\frac{\mathrm{d}\rho_{\hat{O}_1}}{\mathrm{d}\tau} = \hat{\mathcal{L}}\rho_{\hat{O}_1}(\tau), \quad (\mathrm{A}.9)$$

$$\rho_{\hat{O}_1}(\tau) = e^{\hat{\mathcal{L}}\tau}\rho_{\hat{O}_1}(0) = e^{\hat{\mathcal{L}}\tau}(\rho(t)\hat{O}_1(0)), \quad (\mathrm{A}.10)$$

по аналогии с описанием динамики матрицы плотности ТУС $\rho(t) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(\chi(t))$.

В таком случае, коррелятор операторов записывается в виде, подобном записи обычного среднего оператора:

$$\langle \hat{O}_1(t)\hat{O}_2(t+\tau)\rangle = \mathrm{Tr}_S(\hat{O}_2(0)e^{\mathcal{L}\tau}[\rho(t)\hat{O}_1(0)]), \quad (\mathrm{A}.11)$$

где $\mathcal{L}$ – оператор Лиувилля. От записи обычного среднего $O_2(\tau)$ коррелятор отличается только заменой $\rho(\tau)$ на $\rho_{\hat{O}_1}(\tau)$.

От конечной системы, описывающей динамику средних значений операторов, воздействующих на ТУС:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \hat{A}_\mu(t)\rangle = \mathrm{Tr}_S(\hat{A}_\mu(t)\dot{\rho}) =$$
$$= \mathrm{Tr}_S(\hat{A}_\mu(t)\mathcal{L}\rho) = \sum_k M_{\mu k}\langle \hat{A}_k(t)\rangle, \quad (\mathrm{A}.12)$$

используя (A.11) возможно перейти к системе, описываюшей динамику по τ для корреляторов:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\langle \hat{O}_1(t)\hat{A}_\mu(t+\tau)\rangle = \mathrm{Tr}_{\mathrm{S}}(\hat{O}_1(0)\mathcal{L}e^{\mathcal{L}\tau}[\rho(t)\hat{A}_\mu(0)]) =$$
$$= \sum_k M_{\mu k}\mathrm{Tr}_{\mathrm{S}}(\hat{O}_1(0)e^{\mathcal{L}\tau}[\rho(t)\hat{A}_k(0)]) =$$
$$= \sum_k M_{\mu k}\langle \hat{O}_1(t)\hat{A}_k(t+\tau)\rangle, \quad (\mathrm{A}.13)$$

откуда следует, что уравнение на динамику корреляторов от τ имеет такой же вид, как и уравнение на динамику средних от t, что и было использовано в работе. Проделывая те же выкладки, можно прийти к такому же результату и для корреляторов вида $\langle \hat{O}_1(t)\hat{A}_\mu(t+\tau)\hat{O}_2(t)\rangle$.

Приложение Б

См. рис. 1В.

Финансирование работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение # 075-15-2024-538).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **54**(10), c. 345 (1977)); DOI: 10.1088/0022-3700/10/3/005.
2. M. R. Ferguson, Z. Ficek, and B. J. Dalton, Phys. Rev. A **54**(3), 2379 (1996); DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.2379.
3. B. R. Mollow, Phys. Rev. **188**(5), 1969 (1969); DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRev.188.1969.
4. R. E. Grove, F. Y. Wu, and S. Ezekiel, Phys. Rev. A **15**, 227 (1977); DOI: 10.1103/PhysRevA.15.227.
5. O. Astafiev, A. M. Zagoskin, A. A. Abdumalikov, Yu. A. Pashkin, T. Yamamoto, K. Inomata, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Science **327**(5967), 840 (2010); DOI: https://doi.org/10.1126/science.1181918.
6. Ch.-R. Fu, Y.-M. Zhang, and Ch.-D. Gong, Phys. Rev. A **45**(1), 505 (1992); DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.505.
7. S. Sen, T. K. Dey, and B, Deb, Phys. Scr. **98**(11), 115124 (2023); DOI: https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad02c8.
8. P. Zhou and S. Swain, Phys. Rev. A **56**(4), 3011 (1997); DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.3011.
9. C. M. Savage, Phys. Rev. Lett. **63**(13), 1376 (1989); DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.63.1376.
10. S. A. Gunin, A. V. Vasenin, V. V. Voskresenskii, A. Yu. Dmitriev, D. A. Kalacheva, Ya. T. Shneidman, T. R. Sabirov, G. P. Fedorov, and O. V. Astafiev, JETP Lett. **121**(6), 427 (2025); DOI: 10.1134/S0021364025600181.

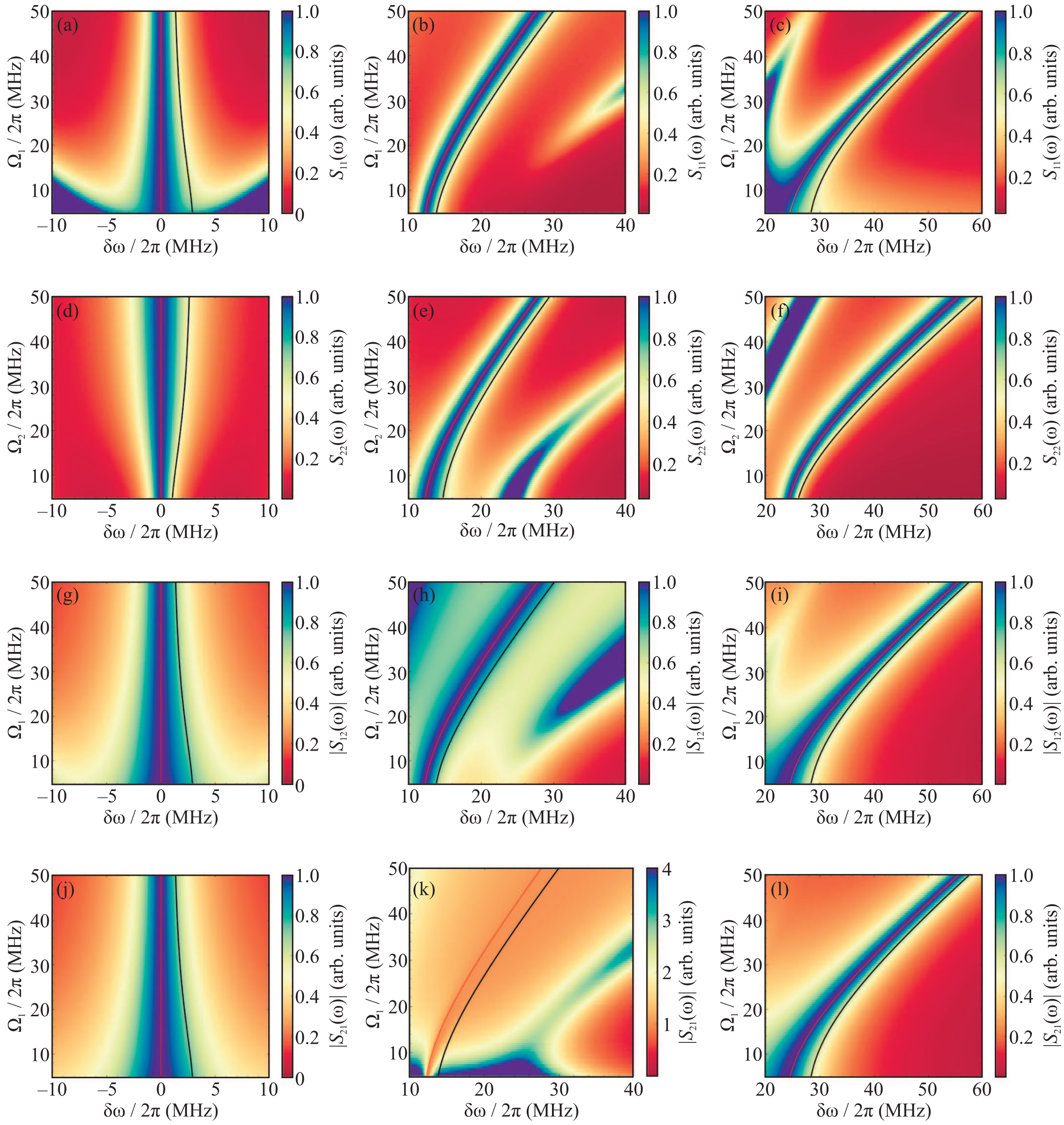

Рис. 1B. (Цветной онлайн) Наложение положений максимумов и полумаксимумов пиков из (9) на графики спектральной плотности мощности. Параметры системы принятые при расчетах: $\Gamma_1/2\pi = 2$ МГц, $\Gamma_2/2\pi = 4$ МГц, $\Omega_1/2\pi = 25$ МГц (a)–(c), (g)–(l) или $\Omega_2/2\pi = 24$ МГц (d)–(f)

11. Z. H. Peng, D. He, Y. Zhou, J. H. Ding, J. Lu, L. Zhou, J. Q. Liao, L. M. Kuang, Y.-X. Liu, O. V. Astafiev, and J. S. Tsai, DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.12080; arXiv: 2202.12080 [quant-ph]; URL: https://arxiv.org/abs/2202.12080.
12. P. A. Apanasevich and S. Ja. Kilin, J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **12**(3), L83 (1979); DOI: 10.1088/0022-3700/12/3/003.
13. H. F. Arnoldus and G. Nienhuis, J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **17**, 963 (1984); DOI: 10.1088/0022-3700/17/6/011.
14. G. Nienhuis, Phys. Rev. A **47**(1), 510 (1993); DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.47.510.
15. P. A. Apanasevich and S. Ya. Kilin, Phys. Lett. A **62**(2), 83 (1977); DOI: https://doi.org/10.1016/0375-9601(77)90956-2.
16. A. Aspect, G. Roger, S. Reynaud, J. Dalibard, and C. Cohen-Tannoudji, Phys. Rev. Lett. **45**(8), 617 (1980); DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.617.
17. P. A. Apanasevich and S. Ya. Kilin, J. Appl. Spectrosc. **29**(2), 83 (1978); DOI: https://doi.org/10.1007/BF00608512.

18. H. J. Carmichael and D. F. Walls, J. Phys. B: Atom. Mol. Phys. **9**(8), 1199 (1976); DOI: 10.1088/0022-3700/9/8/007.
19. H. J. Kimble, M. Dagenais, and L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **39**, 691 (1977); DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.39.691.
20. A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Nature **431**(7005), 162 (2004); DOI: https://doi.org/10.1038/nature02851.
21. H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics: Lectures Presented at the Université Libre de Bruxelles, October 28 to November 4, 1991*, Springer Berlin Heidelberg (1993); DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-540-47620-7.
22. C. W. Gardiner and M. J. Collett, Phys. Rev. A **31**(6), 3761 (1985); DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.31.3761.
23. M. Lax, Opt. Commun. **179**(1), 463 (2000); DOI: https://doi.org/10.1016/S0030-4018(00)00622-2.
24. M. McDonald, J. Ha, B. H. McGuyer, and T. Zelevinsky, Am. J. Phys. **82**(10), 1003 (2014); doi: https://doi.org/10.1119/1.4890502.
25. S. Y. Kilin and T. B. Karlovich, Opt. Spectrosc. **103**, 280 (2007); DOI: https://doi.org/10.1134/S0030400X07080188.
26. J. H. Eberly and K. Wódkiewicz, J. Opt. Soc. Am. **67**(9), 1252 (1977); DOI: https://doi.org/10.1016/0030-4018(82)90100-6.
27. M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1997); DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511813993.