Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 12, с. 815 – 820

Форма ультракоротких рентгеновских импульсов при их рассеянии на кристаллах

Д. Н. Макаров[1], М. К. Есеев, Е. С. Гусаревич

Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, 163002 Архангельск, Россия

Поступила в редакцию 14 октября 2025 г.
После переработки 7 ноября 2025 г.
Принята к публикации 10 ноября 2025 г.

В данной работе показано, что при рассеянии ультракоротких рентгеновских импульсов важной характеристикой является не только их длительность, но и форма самого импульса. Показано, что зависимость спектров рассеяния от формы импульса имеет простой аналитический вид. Найдены простые критерии, когда форма импульса может влиять на дифракционную картину, что особенно важно в рентгеноструктурном анализе вещества. В качестве примера рассмотрено рассеяние ультракоротких импульсов трех различных форм на кристалле алмаза: гауссовый импульс, “мексиканская шляпа” и прямоугольный импульс.

DOI: 10.7868/S3034576625120178

1. Введение. В настоящее время дифракционный анализ веществ (XRD) с применением рентгеновских ультракоротких импульсов (УКИ) приобрел особую актуальность [1–3]. Благодаря таким УКИ можно проводить исследования внутренней структуры веществ с высоким временным и пространственным разрешением, что обусловлено техническими возможностями современных установок. Одним из наиболее перспективных источников УКИ являются лазеры на свободных электронах XFELs [4]. В настоящее время исследования на подобных установках выполняются с использованием фемтосекундных импульсов, а также зафиксировано образование аттосекундных импульсов благодаря усовершенствованиям в технике рентгеновских лазеров на свободных электронах [5, 6]. Также достигнут субфемтосекундный барьер с высокой пиковой мощностью, что открывает возможности для исследования возбуждения в молекулярных системах, движения валентных электронов и других процессов с высоким временным и пространственным разрешением, например, [7]. В связи с развитием мощных источников УКИ возникает необходимость в создании новых теоретических моделей, учитывающих особенности взаимодействия таких импульсов со сложными многоатомными структурами [8, 9]. Обычно в теоретических моделях XRD рассеяние ультракоротких рентгеновских импульсов рассматривают как рассеяние плоских волн бесконечной длительности [10, 3]. Однако такая модель не учитывает особенности рассеяния УКИ на сложных структурах, что снижает точность применяемых подходов [8, 3]. Процессы рассеяния УКИ с фемто- и особенно аттосекундным разрешением на подобных объектах недостаточно изучены и активно исследуются [8, 11–22]. Например, недавно было показано, что рассеяние аттосекундных УКИ на нуклеотидах ДНК может значительно отличаться от существующих теоретических моделей XRD [23, 24]. Также при варьировании параметра длительности импульса можно определить межплоскостное расстояние в кристаллах с ангстремным разрешением [25, 26]. Кроме того, удается определить динамику алмазных слоев с высоким временным разрешением [27], что в будущем можно использовать в 3D томографии с ангстремным разрешением. Влияние формы УКИ на спектры рассеяния изучено недостаточно и обычно считается, что различная форма, в случае многоциклового импульса, не влияет на дифракционную картину, а только на амплитудные значения спектров рассеяния.

В данной работе показано, что форма УКИ может сильно влиять на дифракционную картину, и найдены критерии, когда это происходит. Полученные результаты имеют аналитическую форму, на основании которой можно судить о разнице в спектрах рассеяния при различных формах импульса. Для демонстрации полученных результатов представлены расчеты спектров рассеяния УКИ (дифракционная картина) на кристаллической решетке алмаза при трех различных формах импульса: гауссовый, “мексиканская шляпа” и прямоугольный.

[1]e-mail: makarovd0608@yandex.ru

Далее будем использовать атомную систему единиц: $\hbar = 1$; $|e| = 1$; $m_e = 1$, где $\hbar$ – приведенная постоянная Планка, e – заряд электрона, m_e – масса электрона.

2. Форма импульса при рассеянии УКИ. Рассмотрим рассеяние УКИ в рентгеновском диапазоне частот на произвольной многоатомной системе. Такое рассеяние УКИ на многоатомных системах изучалось, например, в работах [16, 24, 28, 29], где было показано, что при использовании подхода, основанного на приближении внезапных возмущений и выходящего за его рамки [28], можно получить аналитические выражения для спектров рассеяния с учетом длительности падающего импульса [16]. Развитая в этих работах модель действует при условии $\omega_0 \gg 1/\tau_a$, где ω_0 – несущая частота УКИ, а τ_a – характерное атомное время, см. [28]. Очевидно, что это условие хорошо выполняется в случае рентгеновских импульсов. Выберем УКИ в общем виде, применимом к любой форме импульса. Тогда напряженность электромагнитного поля имеет вид $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0\mathbf{r})} f((t-\mathbf{n}_0\mathbf{r}/c)/\tau)$, где $\mathbf{E}_0$ – амплитуда поля, а $f((t-\mathbf{n}_0\mathbf{r}/c)/\tau)$ – произвольная функция, определяющая форму УКИ с длительностью импульса τ, ω_0 – несущая частота, $\mathbf{k}_0$ – волновой вектор, направленный вдоль единичного вектора $\mathbf{n}_0$, c – скорость света (в а.е. $c \approx 137$). Тогда с использованием работ [28, 16, 29, 24], в случае многоциклового импульса $\omega_0\tau \gg 1$, можно получить, что спектр рассеяния (рассеянная энергия ε в телесный угол $\Omega_{\mathbf{k}}$) будет иметь вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\Omega_{\mathbf{k}}} = \frac{\tau\,[\mathbf{E}_0\mathbf{n}]^2 \int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(x)|^2dx}{(2\pi)^2c^3} \times \tag{1}$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{s} N_{e,i}N_{A,i}(1-|F_i|^2) + \sum_{i,j=1}^{s}\gamma_{i,j}N_{e,i}N_{e,j}F_iF_j^*\right],$$

$$\gamma_{i,j} = \sum_{Ai,A'j} e^{-i\mathbf{p}_0\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j}}\beta(\mathbf{p}_\tau\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j}), \tag{2}$$

$$\beta(\mathbf{p}_\tau\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(x)|^2 e^{-ix\mathbf{p}_\tau\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j}}dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(x)|^2dx}, \tag{3}$$

где $\mathbf{R}_{Ai}$ – радиус-вектор, задающий положение центра атома типа i с числом атомов Ai этого типа; $\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j}(t) = \mathbf{R}_{Ai}(t) - \mathbf{R}_{A'j}(t)$; s – число различных типов атомов в рассматриваемой системе; $N_{e,i}$ – число электронов в атомах типа i; $N_{A,i}$ – число атомов типа i; $\mathbf{p}_\tau = \frac{1}{c\tau}(\mathbf{n}-\mathbf{n}_0)$; $\mathbf{p}_0 = \frac{\omega_0}{c}(\mathbf{n}-\mathbf{n}_0)$, который имеет смысл импульса отдачи на несущей частоте ω_0 при рассеянии УКИ; $F_i = \frac{1}{N_{e,i}}\int\rho_{e,i}(\mathbf{r})e^{-i\mathbf{p}_0\mathbf{r}}d^3\mathbf{r}$ – формфактор атома типа i с электронной плотностью $\rho_{e,i}(\mathbf{r})$; $\tilde{f}((\omega-\omega_0)\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(\omega-\omega_0)\tau x}f(x)dx$ – преобразование Фурье для функции $f(x)$. Из выражения (1) видно, что дифракционная картина определяется параметром $\gamma_{i,j}$. Если считать, что длительность импульса большая, т.е. при $\tau\to\infty$, то $\gamma_{i,j} = \sum_{Ai,A'j}e^{-i\mathbf{p}_0\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j}}$, что соответствует хорошо известному структурному фактору в теории дифракции рентгеновского излучения. Добавим, что зависимость от формы импульса в (1) также есть в числителе в виде $\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{f}(x)|^2dx$, но эта зависимость не меняет дифракционной картины, а меняет только амплитудные значения спектров рассеяния и нас не интересует. Из выражения (3) можно сделать общие выводы, связанные с изменением дифракционной картины в зависимости от формы импульса. Видно, что параметр $|\beta| \in (0,1)$, а это означает, что наибольшая амплитуда дифракционных максимумов будет при $|\beta| = 1$, т.е. когда размер импульса $c\tau$ во много раз больше межатомных расстояний $L_a \sim |\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j}|$, на которых происходит дифракция. Хорошо известно, что среднее значение такого расстояния $\langle L_a\rangle$ связано с тепловыми колебаниями атомов (фононами), что приводит к уширению дифракционных спектров и уменьшению их амплитуды. Другими словами, это означает, что если $c\tau \gg \langle L_a\rangle$, а размеры многоатомной системы $L \sim \max\{|\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j}|\}$ много больше или сравнимы $\langle L_a\rangle$, то можно всегда считать фактор $\beta = 1$. Следующий важный случай – это когда $c\tau \lesssim \langle L_a\rangle$. Очевидно, что в этом случае будет присутствовать зависимость спектров рассеяния как от длительности импульса τ, так и от его формы, см. выражение (3). Добавим, что дифракционная картина не зависит от тепловых колебаний атомов в решетке: они приводят лишь к уменьшению ее максимумов и уширению спектров, поэтому структуру спектров рассеяния можно считать независящей от тепловых колебаний атомов. Тогда в выше представленном анализе достаточно заменить $\langle L_a\rangle$ на решетку с конечным размером L. Далее нас будет интересовать второй случай, когда $c\tau \lesssim L$. На самом деле, данный анализ работает, когда функция $|\tilde{f}(x)|^2$ имеет максимум вблизи малых x и при $x\to\pm\infty$ стремится к нулю, что не является очевидным, поэтому для анализа не всегда удобно пользоваться выражением (3). Это выражение можно представить в ином виде, используя преобразование Фурье или теорему о свертке в виде

$$\beta(\mathbf{p}_\tau\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}f^*(x-\mathbf{p}_\tau\Delta\mathbf{R}_{Ai,A'j})f(x)dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx}. \tag{4}$$

В выражении (4) стоят только функции, задающие профиль УКИ $f(x)$, поэтому оно более удобное для анализа. Например, можно увидеть, что если параметр $\mathbf{p}_\tau \Delta \mathbf{R}_{Ai,A'j} \gg x$, то параметр $\beta \to 0$, а при $\mathbf{p}_\tau \Delta \mathbf{R}_{Ai,A'j} \ll x$, параметр $\beta \to 1$. С другой стороны, функция профиля УКИ $f(x)$ не мала только в области $|x| \lesssim 1$, поэтому параметр $\beta \to 0$, при $|\mathbf{p}_\tau \Delta \mathbf{R}_{Ai,A'j}| \gg 1$ и $\beta \to 1$, при $|\mathbf{p}_\tau \Delta \mathbf{R}_{Ai,A'j}| \ll 1$, а при $|\mathbf{p}_\tau \Delta \mathbf{R}_{Ai,A'j}| \lesssim 1$ параметр β необходимо расчитывать. Можно увидеть, что этот анализ совпадает с приведенным выше по формуле (3), но при этом поведение функции $f(x)$, в отличие от $\tilde{f}(x)$, мы знаем. В итоге можно качественно объяснить, почему возникает влияние формы импульса на основании параметра β. Если размер УКИ (порядка $c\tau$) во много раз больше L, то для всех электронов, находящихся в кристалле внутри L, силовое действие УКИ будет одинаковым, и они будут двигаться согласованно (когерентно). Если же размер УКИ меньше или порядка L, то движение электронов, находящихся внутри L, будет несогласованным, поскольку поле в области L будет различным, что приведет к некогерентному рассеянию УКИ на этих электронах. Степень несогласованности при рассеянии УКИ на электронах должна зависеть от формы импульса, поскольку она задает то, как будут двигаться электроны.

Далее рассмотрим конкретный пример трех различных форм УКИ: гауссовая, "мексиканская шляпа", прямогульный импульс. Обозначив $\eta = \mathbf{p}_\tau \Delta \mathbf{R}_{Ai,A'j}$, получим значения для параметра $\beta = \beta(\eta)$ в виде,

1. Гауссовый импульс:

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad \beta(\eta) = e^{-\eta^2/2}. \tag{5}$$

2. Мексиканская шляпа:

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}, \ \beta(\eta) = \left(1 + \frac{\eta^4}{12} - \eta^2\right) e^{-\eta^2/4}. \tag{6}$$

3. Прямоугольный импульс:

$$f(x) = \begin{cases} 1, |x| \le 1/2 \\ 0, |x| > 1/2 \end{cases}, \ \beta(\eta) = \begin{cases} 1 - |\eta|, |\eta| \le 1 \\ 0, |\eta| > 1. \end{cases} \tag{7}$$

Функции $f(x)$ и $\beta(\eta)$ представлены на рис. 1 и 2 соответственно. Из выражений (5)–(7) видно, что основной вклад в β вносит область $\eta \lesssim 1$, что соответсвует общему анализу выше.

3. Рассеяние УКИ на кристаллах. Из выражения (1) можно увидеть, что для расчетов спектров рассеяния необходимо распределение электронной плотности $\rho_{e,i}(\mathbf{r})$ атомов типа i. Выберем в качестве такого распределения хорошо известную модель нейтральных атомов, развитую в работе [30],

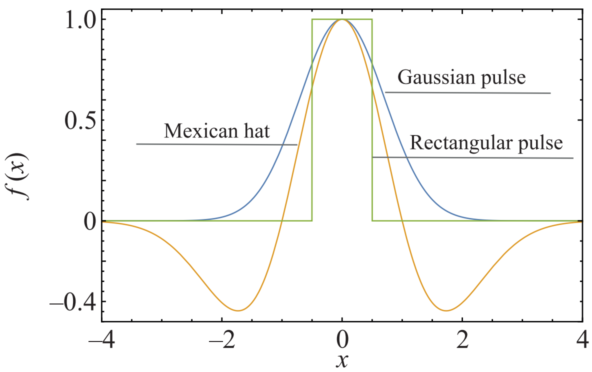

Рис. 1. (Цветной онлайн) Представлена функциия $f(x)$ для трех различных форм УКИ

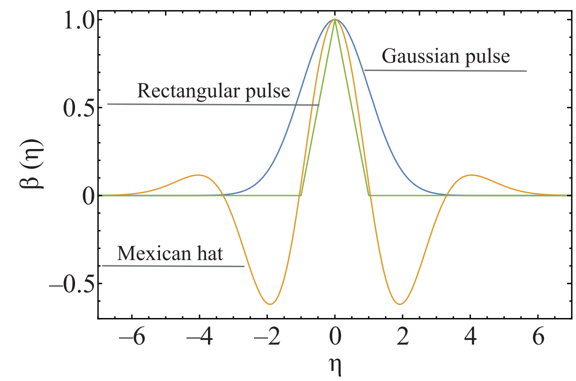

Рис. 2. (Цветной онлайн) Представлена функция $\beta(\eta)$ для трех различных форм УКИ

где $\rho_{e,i}(\mathbf{r}) = \frac{N_{e,i}}{4\pi r} \sum_{k=1}^{3} A_{k,i} \alpha_{k,i}^2 e^{-\alpha_{k,i} r}$, при этом $A_{k,i}, \alpha_{k,i}$ – постоянные коэффициенты (для всех типов атомов с номером i), определенные в [30]. В результате вычислений форм-фактор F_i принимает простой вид $F_i = \sum_{k=1}^{3} \frac{A_{k,i}\alpha_{k,i}^2}{p_0^2 + \alpha_{k,i}^2}$.

Далее, в качестве примера, рассмотрим рассеяние УКИ на кристалле алмаза. Выберем алмазную решетку, ограниченную пятью элементарными ячейками по всем трем направлениям, т.е. $5 \times 5 \times 5$. Падающий импульс выберем перпендикулярно левой грани системы, см. рис. 3. В падающем импульсе энергия фотона 7.5 кэВ, а длительность импульса $\tau = 10$ ас. Добавим, что выбор размеров решетки и длительности импульса обусловлены тем, что изучаемый нами параметр β был меньше единицы и зависимость от формы импульса была заметна. Действительно, размеры решетки примерно 20 Å, а длина $c\tau \approx 30$ Å. Отношение этих двух параметров порядка единицы, что приводит к зависимости от формы импульса. Результаты расчетов для различных форм УКИ представлены на рис. 4 и 5. Для формы импульса в виде "мексиканская шляпа" результаты

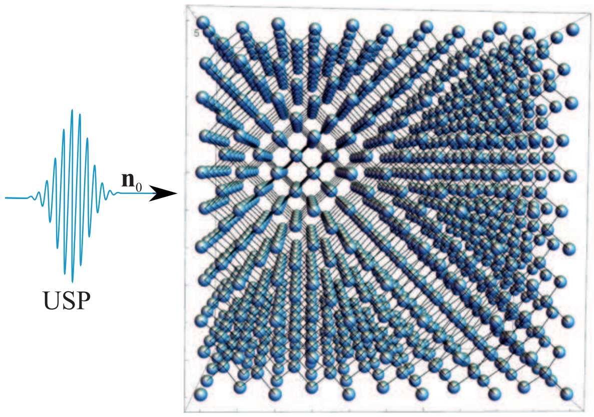

Рис. 3. (Цветной онлайн) Представлена алмазная решетка $5 \times 5 \times 5$, на которую падает УКИ в перпендикулярном направлении к левой грани

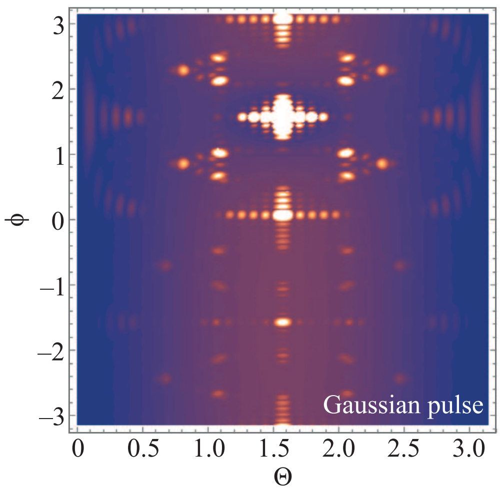

Рис. 4. (Цветной онлайн) Представлены 2D спектры рассеяния УКИ на алмазной решетке (см. рис. 3) для импульса гауссовой формы, где углы θ и ϕ – это углы в сферической системе координат, ось z направлена вверх (по вектору поляризации), а ось y – по направлению импульса

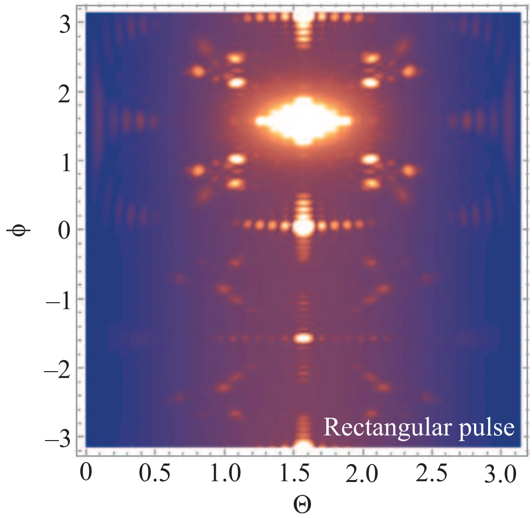

Рис. 5. (Цветной онлайн) То же самое, что и на рис. 4, но для прямоугольного импульса

дифракционной картины близки в гауссовому случаю и внешне практически не отличимы по рисунку, поэтому здесь не приводятся. Если анализ выражения (4) показывает, что отличия от формы импульса должны быть, но они не заметны в расчетах, то это связано со сложной зависимостью сложения амплитуд рассеянного импульса. Однако это совсем не означает, что при выборе другого кристалла или направления падающего импульса отличия будут сохраняться. Также были проведены расчеты спектров рассеяния для других направлений падающего импульса и оказалось, что отличия в спектрах рассеяния для гауссового импульса и мексиканской шляпы уже стали заметны. При этом, если размеры рассеивающей системы сделать больше, чем $c\tau$ (или $c\tau$ меньше, чем размеры системы), то различия в дифракционных картинах будут еще заметнее.

Добавим, что понятие длительности для реальной формы падающего импульса можно вводить поразному, поскольку данный параметр является коэффициентом в аппроксимации реального импульса. При этом для различных форм УКИ может быть один и тот же параметр длительности импульса, что и отражает расчет на рис. 4 и 5.

4. Заключение. В данной работе было показано, что форма УКИ является такой же важной характеристикой при рассеянии, как и его длительность. Полученные результаты особо важны в рентгеноструктурном анализе вещества с использованием УКИ, поскольку для определения структуры вещества обычно форма импульса не учитывается, что может привести к неверному определению изучаемой структуры. Также определены границы, когда форму УКИ необходимо учитывать, а когда можно ею пренебречь. Представленные результаты имеют простой аналитический вид (см. выражение (4)), используя который можно оценить вклад формы УКИ в спектры рассеяния. В качестве примеров рассмотрены различные формы УКИ и наглядно показано влияние формы на спектры рассеяния. Полученные результаты необходимо практически всегда учитывать при использовании аттосекундных импульсов для изучения кристаллов, поскольку параметр β будет меньше единицы.

Финансирование работы. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда # 23-12-20014 и частично госзадания # FSRU-2024-0005.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. N. Jones, "Crystallography: Atomic secrets", Nature **505**, 602 (2014).
2. A. Benediktovich, I. Feranchuk, and A. Ulyanenkov, *Theoretical Concepts of X-Ray Nanoscale Analysis* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014).
3. М. К. Есеев, В. И. Матвеев, Д. Н. Макаров, "Диагностика наносистем с использованием ультракоротких рентгеновских импульсов: теория и эксперимент (Миниобзор)", Письма в ЖЭТФ **114**, 444 (2021) [M. K. Eseev, V. I. Matveev, and D. N. Makarov, "Diagnostics of Nanosystems with the Use of Ultrashort X-Ray Pulses: Theory and Experiment (Brief Review)", JETP Lett. **114**, 387 (2021)].
4. R. Schoenlein, T. Elsaesser, K. Holldack, Z. Huang, H. Kapteyn, M. Murnane, and M. Woerner, "Recent advances in ultrafast X-ray sources", Philos. Trans. R. Soc. A **377**, 20180384 (2019).
5. J. Duris, S. Li, T. Driver et al. (Collaboration), "Tunable isolated attosecond X-ray pulses with gigawatt peak power from a free-electron laser", Nature Photon. **14**, 30 (2020).
6. P. K. Maroju, C. Grazioli, M. Di Fraia et al. (Collaboration), "Attosecond pulse shaping using a seeded free-electron laser", Nature **578**, 386 (2020).
7. S. Mukamel, D. Healion, Yu Zhang, and J. D. Biggs, "Multidimensional attosecond resonant X-ray spectroscopy of molecules: lessons from the optical regime", Annu. Rev. Phys. Chem. **64**, 101 (2013).
8. G. Dixit, O. Vendrell, and R. Santra, "Imaging electronic quantum motion with light", Proceedings of the National Academy of Sciences **109**, 11636 (2012).
9. S. R. Leone, C. W. McCurdy, J. Burgdorfer et al. (Collaboration), "What will it take to observe processes in "real time"?", Nature Photon. **8**, 162 (2014).
10. R. W. James, *The Optical Principles of the Diffraction of X-rays (Ox Bow)* (Woodbridge, Connecticut, 1982).
11. P. M. Kraus, M. Zürch, S. K. Cushing, D. M. Neumark, and S. R. Leone, "The ultrafast X-ray spectroscopic revolution in chemical dynamics", Nat. Rev. Chem. **2**, 82 (2018).
12. P. Peng, C. Marceau, and D. M. Villeneuve, "Attosecond imaging of molecules using high harmonic spectroscopy"', Nat. Rev. Phys. **1**, 144 (2019).
13. V. A. Astapenko and E. V. Sakhno, "Excitation of a quantum oscillator by short laser pulses", Appl. Phys. **126**, 23 (2020).
14. F. B. Rosmej, V. A. Astapenko, V. S. Lisitsa, X. D. Li, and E. S. Khramov, "Scattering of ultrashort laser pulses on "ion-sphere" in dense plasmas", Contrib. Plasma Phys. **59**, 189 (2019).
15. V. A. Astapenko, "Absorption of ultrashort laser pulses in medium with account for propagation effects", J. Opt. **26**, 095402 (2024).
16. D. N. Makarov, "Quantum theory of scattering of ultrashort electromagnetic field pulses by polyatomic structures", Opt. Express **27**, 31989 (2019).
17. M. K. Eseev, A. A. Goshev, and D. N. Makarov, "Scattering of Ultrashort X-ray Pulses by Various Nanosystems", Nanomaterials **10**, 1355 (2020).
18. M. K. Eseev, A. A. Goshev, K. A. Makarova, and D. N. Makarov, "X-ray diffraction analysis of matter taking into account the second harmonic in the scattering of powerful ultrashort pulses of an electromagnetic field", Sci. Rep. **11**, 3571 (2021).
19. K. B. Moller and N. E. Henriksen, "Time-resolved x-ray diffraction: The dynamics of the chemical bond", Structure and Bonding **142**, 185 (2012).
20. S. Tanaka, V. Chernyak, and S. Mukamel, "Time-resolved x-ray spectroscopies: Nonlinear response functions and liouville-space pathways", Phys. Rev. A **63**, 63405 (2001).
21. G. Dixit, J. M. Slowik, and R. Santra, "Proposed Imaging of the Ultrafast Electronic Motion in Samples using X-Ray Phase Contrast", Phys. Rev. Lett. **110**, 137403 (2013).
22. N. E. Henriksen and K. B. Moller, "On the Theory of Time-Resolved X-ray Diffraction", J. Phys. Chem. B **112**, 558 (2008).
23. D. Makarov and A. Kharlamova, "Scattering of X-ray Ultrashort Pulses by Complex Polyatomic Structures", Int. J. Mol. Sci. **23**, 163 (2022).
24. D. N. Makarov, K. A. Makarova, and A. A. Kharlamova, "Specificity of scattering of ultrashort laser pulses by molecules with polyatomic structure", Sci. Rep. **12**, 1 (2022).
25. Д. Н. Макаров, М. К. Есеев, Е. С. Гусаревич, К. А. Макарова, М. С. Борисов, "Ультракороткие импульсы в структурном анализе алмазных слоев с NV-центрами", Письма в ЖЭТФ **120**, 723 (2024) [D. N. Makarov, M. K. Eseev, E. S. Gusarevichet, K. A. Makarova, and M. S. Borisov, "Ultrashort Pulses in the Structural Analysis of Diamond Layers with NV Centers", JETP Lett. **120**, 695 (2024)].
26. D. N. Makarov, M. K. Eseev, E. S. Gusarevich, K. A. Makarova, and M. S. Borisov, "Ultrashort pulses in structural analysis of diamond layers with angstrom resolution", Opt. Lett. **50**, 694 (2025).
27. D. N. Makarov, M. K. Eseev, E. S. Gusarevich, and K. A. Makarova, "Ultrashort pulses in dynamic processes

of crystal plates with ultrahigh temporal and spatial resolution", Opt. Lett. **50**, 3078 (2025).

28. D. N. Makarov, M. K. Eseev, and K. A. Makarova, "Analytical wave function of an atomic electron under the action of a powerful ultrashort electromagnetic field pulse", Opt. Lett. **44**, 3042 (2019).
29. D. Makarov and A. Kharlamova, "Scattering of Attosecond Laser Pulses on a DNA Molecule during Its Nicking and Bending", Int. J. Mol. Sci. **24**, 15574 (2023).
30. F. Salvat, J. D. Martnez, R. Mayol, and J. Parellada, "Analytical Dirac-Hartree-Fock-Slater screening function for atoms (Z = 1-92)", Phys. Rev. A **36**, 467 (1987).