Письма в ЖЭТФ, том 122, вып. 12, с. 860 – 864 © 2025 г. 25 декабря

Асимптотический анализ квантового мемристора на ультрахолодном ионе $^{171}Yb^+$

И. А. Ковалишин[+], *С. Ю. Стремоухов*[+*×1)], *П. А. Форш*[+*], *Н. Н. Колачевский*[*°], *К. Ю. Хабарова*[*]

[+]*Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

[*]*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[×]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

[°]*Российский квантовый центр, 121205 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 5 ноября 2025 г.
После переработки 5 ноября 2025 г.
Принята к публикации 6 ноября 2025 г.

Представлено аналитическое рассмотрение динамики населенности уровней квантового мемристора на ультрахолодных ионах $^{171}Yb^+$ в случае, когда импульсы воздействующих резонансных к переходам между уровнями лазерных полей существенно разделены во времени. Показано, что в этом случае динамика населенностей уровней, а также управляющий параметр мемристора могут быть вычислены аналитически. Сравнение полученных зависимостей с прямым численным решением системы уравнений для амплитуд населенностей уровней демонстрирует хорошее совпадение.

DOI: 10.7868/S3034576625120247

1. Введение. Мемристор, как он был изначально предложен в 1971 г. Леоном Чуа [1], представляет собой пассивный электрический элемент, способный менять свое сопротивление в зависимости от протекшего по нему заряда. Элемент, считавшийся изначально исключительно теоретическим объектом без возможности практической реализации, однако получил дальнейшее развитие в виде реальных образцов. Позже была предложена реализация вычислительной машины на основе мемристоров, имевшая ряд преимуществ над классическими архитектурами [2].

На сегодняшний день большинство разработанных и изученных мемристоров используют классические входные и выходные сигналы, такие как электрический ток и напряжение. Однако в последнее время уделяется особое внимание возможностям создания мемристивных устройств, которые демонстрируют гистерезисные характеристики ввода-вывода, одновременно обладая истинно квантовой природой. Такие устройства способны выполнять операции с квантовой информацией. Идея квантового мемристора была впервые предложена в работе [3].

К настоящему времени были предложены различные способы реализации квантовых мемристоров: квантовая фотоника [4, 5], сверхпроводящие схемы [3, 6–9], ионные ловушки [10], а также устройства, использующие особенности взаимодействия излучения с веществом [11, 12]. Некоторые из этих подходов уже были успешно реализованы экспериментально [13, 14]. Также активно разрабатываются методы машинного обучения с использованием как одиночных квантовых мемристоров, так и их взаимосвязанных систем [13, 15].

Недавно была предложена концепция квантового мемристора, основанного на применении ультрахолодных ионов, заключенных в ловушки Пауля [10], развитию которой посвящена настоящая работа. В качестве платформы для создания квантового мемристора был выбран ион $^{171}Yb^+$. Сигналами в этом случае выступают населенности различных энергетических уровней иона, меняющиеся за счет создания осцилляций Раби под действием двух резонансных к переходам лазерных полей. В рамках разработанной концепции были предложены методы "связывания" мемристоров как внутри одиночного иона [16], так и между различными ионами посредством колебательной моды [17]. В проведенных исследованиях импульсы воздействующих полей действовали одновременно, что затрудняло последовательный анализ информационных сигналов.

В данной работе проведено асимптотическое исследование решений системы уравнений, описываю-

1)e-mail: sustrem@gmail.com

щих динамику населенностей уровней в случае, когда воздействующие импульсы разнесены во времени, и на его основе предложена модельная обратная связь для управляющих лазерных импульсов. Преимущество такого рассмотрения заключается в открывающейся возможности более последовательного анализа входного и выходного сигнала. Полученные аналитические зависимости динамики населенностей уровней были соотнесены с прямым численным решением системы уравнений для амплитуд населенностей уровней, продемонстрировав хорошее совпадение полученных зависимостей. Это позволяет моделировать работу квантового мемристора аналитически, что является важным при создании нейронных сетей на его основе.

2. Квантовый мемристор на захваченном ионе. В наиболее общем случае система, проявляющая мемристивные свойства, может быть описана следующим набором уравнений:

$$y = f(s, x)x, \tag{1}$$

$$\frac{ds}{dt} = g(s, x), \tag{2}$$

где функции f и g определяют поведение системы, x – входной сигнал, y – выходной, s – внутренний параметр состояния системы. Обычно зависимость выходного сигнала от входного представляет собой гистерезис, что говорит о внутренней памяти системы. Теоретический концепт квантового мемристора на захваченном ионе кратко можно описать следующим образом. Пусть имеются три энергетических уровня $|a\rangle, |g\rangle, |e\rangle$ такие, что взаимные переходы электронов между ними разрешены, кроме одного ($|e\rangle \to |a\rangle$, см. рис. 1). Изначально волновая функция системы представима следующим образом:

$$|\Psi_0\rangle = |g\rangle. \tag{3}$$

Уровень $|g\rangle$ может быть первоначально заселен, например, π – импульсом из основного состояния иона. После этого производится облучение иона полем первого лазерного импульса (обозначен цифрой *1* на рис. 1), резонансного переходу между уровнями $|g\rangle$ и $|e\rangle$, который можно назвать “кодирующим”. В результате чего инициируются осцилляции Раби между указанными уровнями. После воздействия на ион волновая функция системы представима как:

$$|\Psi_1\rangle = \alpha\,|g\rangle + \beta\,|e\rangle, \tag{4}$$

где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Входной сигнал введем как:

$$x = |\langle g|\Psi_1\rangle|^2 = |\alpha|^2. \tag{5}$$

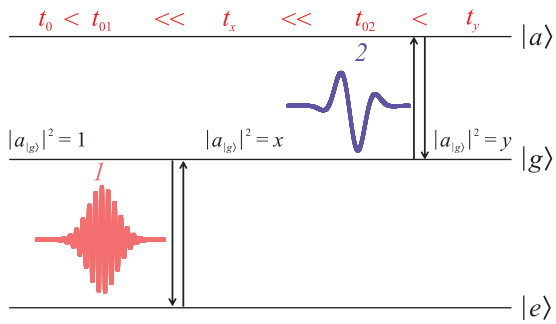

Рис. 1. (Цветной онлайн) Прицнипиальная схема трехуровневого квантового мемристора. Стрелками обозначены переходы между уровнями иона, цифрами *1* и *2* – импульсы резонансных полей. Вверху представлены временные моменты из неравенства (10)

Таким образом, изменение параметров первого лазерного импульса позволяет задавать входной сигнал мемристора. После инициирования осцилляций Раби между уровнями $|g\rangle$ и $|a\rangle$ путем воздействия на ион вторым лазерным импульсом, резонансным переходу между указанными уровнями (обозначен цифрой *2* на рис. 1), получим волновую функцию системы следующего вида:

$$|\Psi_2\rangle = \alpha'\,|g\rangle + \beta'\,|e\rangle + \gamma'\,|a\rangle, \tag{6}$$

где $|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 + |\gamma'|^2 = 1$. Выходной сигнал возьмем как населенность уровня $|g\rangle$ после воздействия:

$$y = |\langle g|\Psi_2\rangle|^2 = |\alpha'|^2. \tag{7}$$

Уравнения, описывающие динамику населенностей представленной системы под воздействием двух вышеуказанных лазерных полей с гауссовыми временными огибающими, записаны в систему ниже [10]:

$$\begin{cases} \dot{a}_{|e\rangle} = i\Omega_1 e^{-(\frac{t-t_{01}}{\tau_1})^2} a_{|g\rangle}, \\ \dot{a}_{|g\rangle} = i\Omega_1^* e^{-(\frac{t-t_{01}}{\tau_1})^2} a_{|e\rangle} + i\Omega_2^* e^{-(\frac{t-t_{02}}{\tau_2})^2} a_{|a\rangle}, \\ \dot{a}_{|a\rangle} = i\Omega_2 e^{-(\frac{t-t_{02}}{\tau_2})^2} a_{|g\rangle}, \end{cases} \tag{8}$$

где Ω_i – частота осцилляций Раби между уровнями для соответствующего резонансного лазерного поля, t_{0i} определяет положение максимума огибающей импульса, а τ_i – его длительность. Нижний индекс i соответствует номеру лазерного импульса.

3. Асимптотическое решение. Рассмотрим ситуацию, при которой лазерные импульсы идут последовательно с такими параметрами, при которых выполняется следующее соотношение:

$$t_{02} - t_{01} \gg \tau_1 + \tau_2. \tag{9}$$

Таким образом, при значимой амплитуде одного из лазерных полей в интервале времени его действия на

систему амплитуда другого будет мала. Также потребуем выполнения соотношения следующего вида:

$$t_0 < t_{01} \ll t_x \ll t_{02} < t_y, \tag{10}$$

где t_x – время измерения населенности уровня $|g\rangle$, соответствующее входному сигналу x, а t_y – время измерения населенности того же уровня, соответствующее выходному сигналу y. При таких условиях можно найти приближенное аналитическое решение системы уравнений, описывающих динамику населенностей, разделив ее на две подсистемы, описывающие динамику под воздействием каждого импульса по отдельности:

$$\begin{cases} \dot{a}_{|g\rangle} = i\Omega_1^* e^{-(\frac{t-t_{01}}{\tau_1})^2} a_{|e\rangle}, \\ \dot{a}_{|e\rangle} = i\Omega_1 e^{-(\frac{t-t_{01}}{\tau_1})^2} a_{|g\rangle}, \\ a_{|g\rangle}(t_0) = 1, \\ a_{|e\rangle}(t_0) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \dot{a}_{|g\rangle} = i\Omega_2^* e^{-(\frac{t-t_{02}}{\tau_2})^2} a_{|a\rangle}, \\ \dot{a}_{|a\rangle} = i\Omega_2 e^{-(\frac{t-t_{02}}{\tau_2})^2} a_{|g\rangle}, \\ a_{|g\rangle}(t_x) = \sqrt{x}, \\ a_{|a\rangle}(t_x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

На основе аналитического решения системы (11) получим зависимость для населенностей соответствующих уровней:

$$|a_{|g\rangle}(t)|^2 = \cos^2\left[\frac{\sqrt{\pi}\tau_1\Omega_1}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{t-t_{01}}{\tau_1}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{t_0-t_{01}}{\tau_1}\right)\right)\right],$$
$$|a_{|e\rangle}(t)|^2 = \sin^2\left[\frac{\sqrt{\pi}\tau_1\Omega_1}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{t-t_{01}}{\tau_1}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{t_0-t_{01}}{\tau_1}\right)\right)\right].$$

При измерении входного сигнала после затухания первого импульса, чему соответствует условие (10), он может быть выражен как:

$$x = |a_{|g\rangle}(t_x)|^2 \approx \cos^2(\sqrt{\pi}\tau_1\Omega_1). \tag{13}$$

Аналогично решая систему (12):

$$|a_{|g\rangle}(t)|^2 = x\cos^2\left[\frac{\sqrt{\pi}\tau_2\Omega_2}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{t-t_{02}}{\tau_2}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{t_x-t_{02}}{\tau_2}\right)\right)\right],$$
$$|a_{|a\rangle}(t)|^2 = x\sin^2\left[\frac{\sqrt{\pi}\tau_2\Omega_2}{2}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{t-t_{02}}{\tau_2}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{t_x-t_{02}}{\tau_2}\right)\right)\right].$$

Для выходного сигнала:

$$y = |a_{|g\rangle}(t_y)|^2 \approx x \cdot \cos^2(\sqrt{\pi}\tau_2\Omega_2). \tag{14}$$

Валидация такого подхода к решению уравнений динамики населенностей проведена путем сравнения с численным решением при выполнении условий (9) и (10). При $(t_{02} - t_{01})/(\tau_1 + \tau_2) > 8$ при $\tau_1 = 30, \tau_2 = 10$ можно говорить об удовлетворительной точности такого приблизительного подхода, относительное среднеквадратичное отклонение составляет менее 0.03 %. На рисунке 2 представлен пример динамики эволюции населенностей трехуровневой системы с выполнением условий применимости асимптотического подхода.

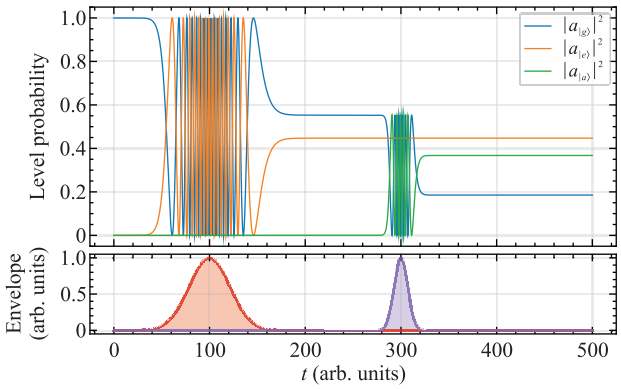

Рис. 2. (Цветной онлайн) Пример эволюции динамики населенностей с выполнением условий применимости аналитического метода. Ниже указан график огибающей поля лазерных импульсов. Расчет проводился при безразмерных параметрах $\Omega_1 = 0.9$, $\Omega_2 = 0.94$, $\tau_1 = 30$, $\tau_2 = 10$, $t_{01} = 100$, $t_{02} = 300$

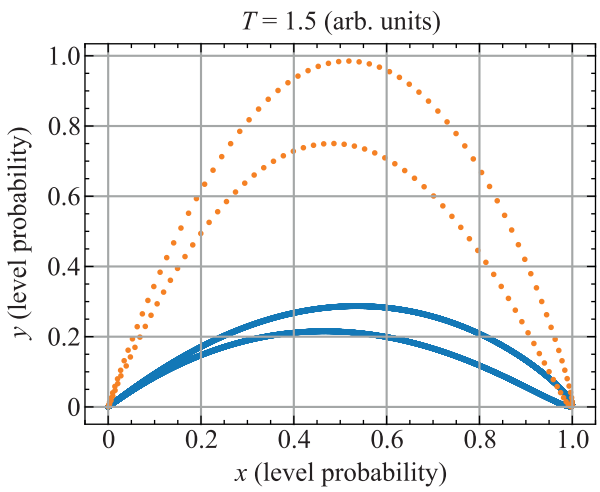

Рис. 3. (Цветной онлайн) Сравнение гистерезисов, рассчитанных при разных конфигурациях импульсов. Синий график показывает гистерезис с импульсами лазерных полей, существенно разделенных во времени. Оранжевый соответствует гистерезису в случае одновременного действия полей [16]

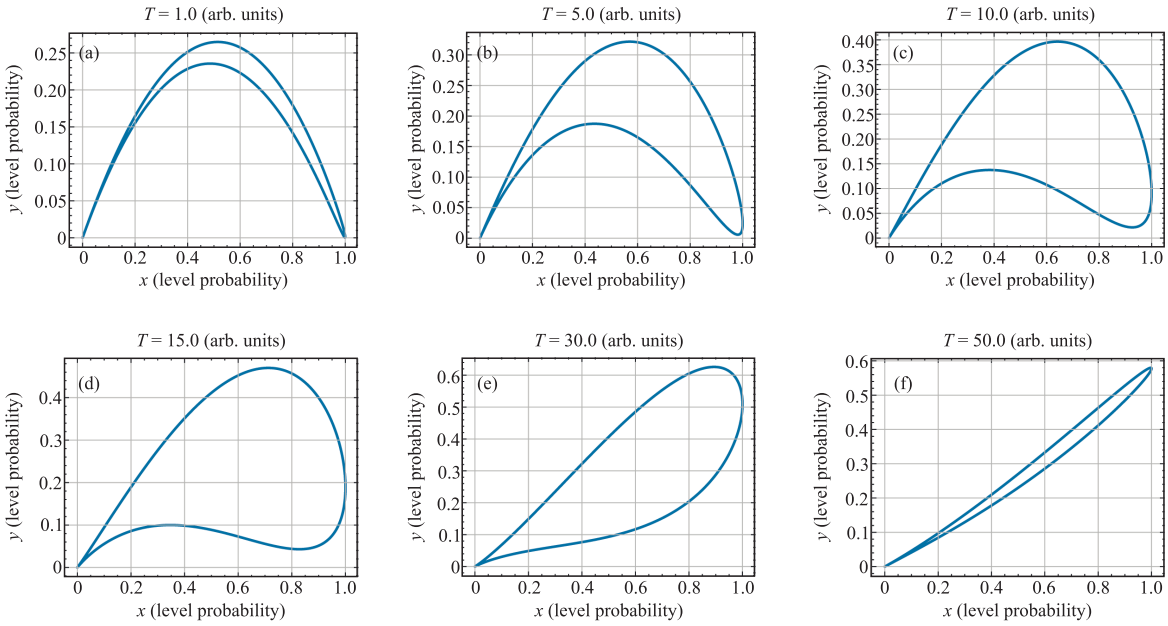

Рис. 4. (Цветной онлайн) Гистерезисы, расчитанные для разных параметров T (указаны в подписях к графикам) скользящего окна интегрирования в (17)

Следуя формализму статьи [13], аналогом коэффициента отражения R на ионной платформе будет выражение:

$$R = 1 - \cos^2(\sqrt{\pi}\tau_2\Omega_2) = \sin^2(\sqrt{\pi}\tau_2\Omega_2). \tag{15}$$

Тогда:

$$\Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\tau_2}\arcsin\sqrt{R}. \tag{16}$$

Положим R в качестве переменной состояния системы s, тогда уравнение (14) после замены переменных является частным случаем уравнения (1) для выбранной системы на ультрахолодном ионе в указанных допущениях (9), (10).

Введем обратную связь по R, аналогичную таковой для фотонной платформы [13]

$$R = 0.5 + \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}(x(\tau) - 0.5)d\tau. \tag{17}$$

При этом обратная связь вводится на масштабе времени, значительно превышающем время одного цикла измерений:

$$d\tau \gg t_y - t_0. \tag{18}$$

Пользуясь формулами выше, можно рассчитать зависимость выходного сигнала от входного. На рисунке 3 приведено сравнение зависимости выходного сигнала как функции входного сигнала, рассчитанного в случае одновременного действия импульсов лазерных полей [16] (оранжевая кривая с точками) с соответствующей зависимостью для случая, когда импульсы разнесены во времени (сплошная синяя кривая). Видно, что в обоих случаях зависимости имеют форму гистерезисов, однако они отличаются по области вариации выходного сигнала (y). Расчет проводился при схожих параметрах воздействующих полей, указанных в [16].

На рисунке 4 представлены различные варианты численно рассчитанной гистерезисной зависимости при фиксированных параметрах лазерных импульсов ($\Omega_1 = 0.95$, $\Omega_2 = 0.9$, $\tau_1 = 30$, $\tau_2 = 10$, $t_{01} = 100$, $t_{02} = 300$) и различном параметре T скользящего окна интегрирования. Важно отметить, что параметр T сильно влияет на форму гистерезиса. Такое свойство особенно полезно при обучении нейроморфных вычислительных устройств на предложенной платформе. Кроме того, полученные зависимости имеют схожий вид с рассчитанными и измеренными зависимостями выходного сигнала относительно входного для квантового мемристора на фотонной платформе [13].

4. Заключение. В работе проведено аналитическое рассмотрение динамики населенностей уровней трехуровневой системы, находящейся под действием двух лазерных импульсов с резонансными к переходам частотами. Аналитический анализ динамики населенностей удается получить в случае существенной временной задержки между импульсами, когда амплитуда одного поля в интервале действия другого поля существенно мала. Результаты аналитических

расчетов были соотнесены с численными решениями системы уравнений и показали хорошее совпадение. С помощью такого аналитического рассмотрения были получены входной и выходной сигналы квантового мемристора, который может быть создан на трехуровневой системе [10], а также его управляющий параметр в явном виде. Проведены численные расчеты зависимости выходного сигнала от величины входного сигнала при вариации управляющего параметра, которые продемонстрировали, несмотря на отсутствие наложения во времени двух импульсов друг на друга, гистерезисную зависимость, необходимую для использования квантовых мемристоров в квантовых нейроморфных вычислениях. Сравнение зависимостей, построенных в случае одновременного действия резонансных полей и в случае разделенных временным промежутком действий соответствующих полей, продемонстрировали некоторое уменьшение области вариации выходного сигнала в случае разнесенных полей.

Предложенное в настоящей работе рассмотрение работы квантового мемристора на ультрахолодных ионах с одной стороны позволяет последовательно определять значения входного (x) и выходного (y) сигнала, что упрощает как экспериментальную верификацию работы такого объекта, так и его использование в нейроморфных вычислениях. Кроме того, параметры квантового мемристора на ионной платформе представлены в формализме мемристора на фотонной платформе [13], что позволит использовать алгоритмы, разработанные для фотонного квантового мемристора, на ионном квантовом мемристоре.

Разработанный математический аппарат может быть использован для анализа мемристивных свойств любых ионов, на выделенных уровнях которых может быть реализован квантовый мемристор.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 24-12-00415, https://rscf.ru/project/24-12-00415/.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. L. O. Chua, IEEE Trans. Circuit Theory **18**, 507 (1971).
2. M. Di Ventra and Y. V. Pershin, Nature Phys. **9**, 200 (2013).
3. P. Pfeifer, I. L. Egusquiza, M. Di Ventra, M. Sanz, and E. Solano, Sci. Rep. **6**, 29507 (2016).
4. M. Sanz, L. Lamata, and E. Solano, APL Photonics **3**, 080801 (2018).
5. T. Gonzalez-Raya, J. M. Lukens, L. C. Celeri, and M. Sanz, Materials **13**, 864 (2020).
6. S. N. Shevchenko, Y. V. Pershin, and F. Nori, Phys. Rev. Appl. **6**, 014006 (2016).
7. S. N. Shevchenko and D. S. Karpov, Phys. Rev. Appl. **10**, 014013 (2018).
8. S. Peotta and M. Di Ventra, Phys. Rev. Appl. **2**, 034011 (2014).
9. J. Salmilehto, F. Deppe, M. Di Ventra, M. Sanz, and E. Solano, Sci. Rep. **7**, 42044 (2017).
10. S. Stremoukhov, P. Forsh, K. Khabarova, and N. Kolachevsky, Entropy **25**, 1134 (2023).
11. J.-L. Tang, G. A. Barrios, E. Solano, and F. Albarran-Arriagada, Entropy **25**, 756 (2023).
12. A. Norambuena, F. Torres, M. Di Ventra, and R. Coto, Phys. Rev. Appl. **17**, 024056 (2022).
13. M. Spagnolo, J. Morris, S. Piacentini, M. Antesberger, F. Massa, A. Crespi, F. Ceccarelli, R. Osellame, and P. Walther, Nat. Photonics **16**, 318 (2022).
14. J. Gao, X.-W. Wang, W.-H. Zhou, Z.-Q. Jiao, R.-J. Ren, Y.-X. Fu, L.-F. Qiao, X.-Y. Xu, C.-N. Zhang, X.-L. Pang, H. Li, Y. Wang, and X.-M. Jin, Chip **1**, 100007 (2022).
15. C. Hernani-Morales, G. Alvarado, F. Albarran-Arriagada, Y. Vives-Gilabert, E. Solano, and J. D. Martin-Guerrero, Adv. Quantum. Technol. 2300294 (2024).
16. С. Ю. Стремоухов, П. А. Форш, К. Ю. Хабарова, Н. Н. Колачевский, Письма в ЖЭТФ **119**(5), 343 (2024).
17. П. А. Форш, С. Ю. Стремоухов, А. С. Фролова, К. Ю. Хабарова, Н. Н. Колачевский, Успехи физических наук **194**, 905 (2024).