Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 1, с. 55 – 62

Фононный механизм аномального эффекта Холла в $p_x + ip_y$ сверхпроводнике[1)]

М. В. Боев[2)], Д. С. Елисеев, Мехрдад М. Махмудиан

Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова Сибирского отделения РАН, 630090 Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 6 октября 2025 г.
После переработки 14 ноября 2025 г.
Принята к публикации 19 ноября 2025 г.

Построена теория фононного механизма аномального эффекта Холла в сверхпроводнике с p-типом спаривания электронов. Показано, что при определенных условиях, накладываемых на температуру и удельное сопротивление сверхпроводника в нормальной фазе, релаксация элементарных возбуждений сверхпроводника с испусканием акустических фононов должна давать вклад в холловскую проводимость, соизмеримый со вкладом процессов асимметричного (skew) рассеяния электронов на примесных центрах.

DOI: 10.7868/S3034576626010076

В настоящее время под термином "аномальный эффект Холла" (АЭХ) подразумевается семейство явлений, объединенных общей чертой: в исследуемой системе в отсутствие внешних магнитных полей возбуждаются поперечные (относительно направления вектора внешней вынуждающей силы) токи квазичастиц, например, электронов в металлах Вейля [1], графене [2, 3], сверхпроводниках [4, 5] и других системах. Необходимым условием для наблюдения АЭХ выступает отсутствие инвариантности системы к обращению времени. В физике сверхпроводимости известно уже немало примеров хиральных сверхпроводников: UPt_3 [6], URu_2Si_2 [7], бислои Bi/Ni [8], $PrOs_4Sb_{12}$ [9] – в которых отсутствие симметрии относительно операции обращения времени надежно установлено в измерениях полярного эффекта Керра. Отметим, что арсенал оптических методов детектирования хиральности параметра порядка не ограничивается полярным эффектом Керра, и сравнительно недавно была предложена оригинальная методика, заключающаяся в наведении локальной намагниченности в хиральном сверхпроводнике лазерным излучением [10]. В данной работе мы сконцентрируем свое внимание на еще одном представителе хиральных сверхпроводников – рутенате стронция Sr_2RuO_4. Сверхпроводящие свойства рутената стронция были экспериментально обнаружены в 1990-х гг. [11], и уже к началу XXI в. был достигнут значительный прогресс в понимании свойств этого соединения [12]. В 2006 году в рутенате стронция в сверхпроводящем состоянии экспериментально наблюдался полярный эффект Керра [13], что подтвердило факт нарушения симметрии системы относительно обращения времени в этом соединении. Однако природа АЭХ и полярного эффекта Керра в Sr_2RuO_4 до сих пор не до конца исследована. Более того, вопрос о симметрии параметра порядка в Sr_2RuO_4 остается дискуссионным уже на протяжении 30 лет [14]. В настоящей работе мы представляем теорию фононного механизма АЭХ, построенную на основе простейшей модели хирального сверхпроводника, в которой спиновая компонента волновой функции куперовских пар образует триплет, а параметр порядка является нечетной функцией импульса следующего вида: $\Delta(\mathbf{p}) = \Delta(p_x + ip_y)/p_0 = \Delta e^{i\varphi_\mathbf{p}}$, где Δ – модуль параметра порядка, p_0 – импульс Ферми, $\varphi_\mathbf{p} = \arctan(p_y/p_x)$. При этом мы будем ориентироваться на параметры и свойства Sr_2RuO_4, как основного потенциального представителя сверхпроводников с рассмотренной симметрией параметра порядка.

Несмотря на значительное число теоретических работ в области АЭХ, большинство из них опирается на анализ роли анизотропного рассеяния электронов на примесях (skew-рассеяние) [15–18]. При этом суммарный вклад аномальной скорости (anomalous velocity) и смещения волнового пакета (side jump) при рассеянии на примесях, как правило, считается малым. В свою очередь, теория фононного механизма возникновения АЭХ значительно менее развита по сравнению с теоретическим анализом роли примесного рассеяния и топологической структуры

[1)]См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ru

[2)]e-mail: boevm@isp.nsc.ru

энергетических зон. Тем не менее, попытки построить теорию фононного возбуждения поперечного отклика предпринимаются для широкого круга систем: спиновый эффект Холла в металлах [19], индуцированные фононами side-jump процессы в системе с дираковской дисперсией электронов [20], долинный эффект Холла в дихалькогенидах переходных металлов [21] и гибридных электрон-экситонных системах на их основе [22]. Сравнительно малое количество работ, посвященных фононному механизму, связано с двумя аспектами. Во-первых, с вычислительной точки зрения учет электрон-фононного взаимодействия несравненно более сложен, нежели примесное усреднение функций отклика [23]. Во-вторых, во многих экспериментах температура системы достаточно высока, чтобы процессы рассеяния электронов на фононах можно было считать упругими. В таком приближении, с точки зрения сложности построения теории, оба механизма АЭХ (примесный и фононный) становятся эквивалентными, что позволяет опираться на уже хорошо развитые подходы для описания примесного рассеяния. Однако в условиях низкой температуры процессы рассеяния электронов на колебаниях кристаллической решетки, строго говоря, нельзя считать квазиупругими и построение квантовой теории становится крайне сложным. Более того, ряд транспортных эффектов для своего объяснения требуют учета неупругой релаксации электронов посредством фононов [24, 25].

Сверхпроводники с нетривиальным параметром порядка, как правило, очень чувствительны к количеству дефектов кристаллической решетки. В частности, переход в сверхпроводящее состояние в Sr_2RuO_4 осуществляется только в достаточно чистых образцах, при этом критическая температура перехода резко уменьшается с увеличением удельного сопротивления в нормальной фазе. Это означает, что электроны в "хороших" образцах движутся баллистически, $p_0 l \gg 1$ (где l – длина свободного пробега нормального электрона), и выполнен критерий применимости полуклассической теории, $1/\tau \ll \Delta$, где τ – время релаксации в нормальной фазе. Отметим, что квазиклассический подход к построению ряда эффектов в p-сверхпроводниках уже применялся, и ниже мы приводим некоторые полученные ранее результаты [17].

Кинетическое уравнение Больцмана для сверхпроводника имеет вид [26]:

$$\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = I\{n_{\mathbf{p}}\}, \tag{1}$$

где $n_{\mathbf{p}}$ – функция распределения квазичастиц, имеющих следующий энергетический спектр:

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{p}_s}{m} + \varepsilon_{\mathbf{p}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \sqrt{\tilde{\xi}_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta|^2}, \tag{2}$$

$$\tilde{\xi}_{\mathbf{p}} = \xi_{\mathbf{p}} + \frac{p_s^2}{2m} + \Phi, \quad \xi_{\mathbf{p}} = \frac{p^2 + p_s^2}{2m}, \tag{3}$$

m – эффективная масса электрона. В выражениях (2) и (3) сверхтекучий импульс $\mathbf{p}_s$ и потенциал Φ являются калибровочно-инвариантными величинами и выражаются через потенциалы электромагнитного поля $\mathbf{A}$ и ϕ и фазу параметра порядка θ:

$$\mathbf{p}_s = -e\mathbf{A} + \frac{\nabla\theta}{2}, \quad \Phi = e\phi + \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{4}$$

Замыкает систему уравнение непрерывности:

$$e\frac{\partial N}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0, \tag{5}$$

где N – концентрация электронов,

$$\mathbf{j} = \frac{eN}{m}\mathbf{p}_s + e\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}\delta n_{\mathbf{p}} \tag{6}$$

– плотность электрического тока и $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$.

Интеграл столкновений $I\{n_{\mathbf{p}}\}$ в уравнении Больцмана (1) учитывает два источника релаксации квазичастичных возбуждений: примесные центры, $I_{imp}\{n_{\mathbf{p}}\}$, и акустические колебания кристаллической решетки, $I_{ph}\{n_{\mathbf{p}}\}$. Естественно предположить, что в условиях низкой температуры примесный механизм рассеяния электронов доминирует над фононным, поэтому вклад фононов в неравновесную функцию распределения квазичастиц сверхпроводника будем искать в виде поправки к примесному вкладу:

$$n_{\mathbf{p}} = n_F(\varepsilon_{\mathbf{p}}) + f_{\mathbf{p}} + \delta f_{\mathbf{p}}, \tag{7}$$

где $n_F = (e^{\varepsilon_{\mathbf{p}}/T} + 1)^{-1}$ – функция распределения Ферми–Дирака, $f_{\mathbf{p}}$ и $\delta f_{\mathbf{p}} \ll f_{\mathbf{p}}$ – неравновесные поправки к функции распределения квазичастиц, обусловленные примесным и фононным механизмами рассеяния соответственно. Такое разделение вкладов подразумевает следующие соотношения между интегралами столкновений, линеаризованными по неравновесным поправкам: $I_{imp}\{f_{\mathbf{p}}\} \gg I_{ph}\{f_{\mathbf{p}}\}$ и $I_{imp}\{\delta f_{\mathbf{p}}\} \sim I_{ph}\{f_{\mathbf{p}}\}$ – что позволяет искать неизвестные функции $f_{\mathbf{p}}$ и $\delta f_{\mathbf{p}}$ итерационным методом.

Определим примесный вклад в неравновесную функцию распределения квазичастиц сверхпроводника, $f_{\mathbf{p}}$, при отклике на однородное переменное электрическое поле с частотой ω и вектором напряженности электрического поля, направленным по оси x: $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$. Пренебрегая на первом шаге рассеянием квазичастиц на фононах, перепишем линеаризованное по внешнему полю уравнение (1) в виде:

$$-i\omega f_{\mathbf{p}} + evE\cos\varphi\frac{\partial n_F}{\partial\varepsilon_{\mathbf{p}}} = \sum_{\mathbf{p}'}(W_{\mathbf{pp}'}f_{\mathbf{p}'} - W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}f_{\mathbf{p}})\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}}), \quad (8)$$

где v – скорость Ферми, $W_{\mathbf{pp}'}$ – вероятность перехода квазичастицы между состояниями с импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, а φ задает ориентацию вектора $\mathbf{p}$ в полярной системе координат. Как показано в работе [17], вероятность рассеяния квазичастиц сверхпроводника p-типа на короткодействующих примесях удобно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$W_{\mathbf{pp}'} = W_0 + W_1[1 - \cos(\varphi - \varphi' + 2\delta_\varepsilon)], \quad (9)$$

где первое слагаемое

$$W_0 = \frac{(\xi_{\mathbf{p}} + \xi_{\mathbf{p}'})^2}{4\nu\tau\varepsilon_{\mathbf{p}}^2}, \quad (10)$$

совпадает с вероятностью рассеяния в обычном сверхпроводнике с s-типом спаривания электронов, а второе слагаемое, в котором

$$W_1 = \frac{|\Delta|^2}{2\nu\tau\varepsilon_{\mathbf{p}}^2}, \quad (11)$$

отражает специфику рассеяния в p-сверхпроводнике. В выражениях (10) и (11) ν – плотность состояний на уровне Ферми, $\tau = (2\pi n_i \nu u_0^2)^{-1}$ – время релаксации нормальных электронов на короткодействующих примесях, n_i и u_0 – концентрация примесных центров и создаваемый ими потенциал соответственно. Фазовый сдвиг δ_ε обусловливает примесный механизм поперечного отклика p-сверхпроводника, и далее мы полагаем $\delta_\varepsilon \ll 1$.

Решение уравнения (8) будем искать в виде суммы четной и нечетной функций угла φ:

$$f_{\mathbf{p}} = -evE\frac{\partial n_F}{\partial\varepsilon_{\mathbf{p}}}(a\cos\varphi + b\sin\varphi), \quad (12)$$

где a и b – неизвестные функции энергии квазичастиц и частоты переменного электрического поля. Подставляя (12) в (8) и интегрируя по импульсу $\mathbf{p}'$, приходим к следующим выражениям:

$$a = \frac{\tau}{\beta - i\omega\tau}, \quad b = \frac{\alpha\tau}{(\beta - i\omega\tau)^2}, \quad (13)$$

где

$$\alpha = \frac{\Delta^2\sin(2\delta_\varepsilon)}{4\varepsilon_{\mathbf{p}}|\xi_{\mathbf{p}}|}, \quad \beta = \frac{4\varepsilon_{\mathbf{p}}^2 - \Delta^2}{4\varepsilon_{\mathbf{p}}|\xi_{\mathbf{p}}|}. \quad (14)$$

Найдем далее фононную поправку к неравновесной функции распределения квазичастиц сверхпроводника, $\delta f_{\mathbf{p}}$. Как и в предыдущем случае, мы можем выделить в ней четную и нечетную функции угла φ, однако в рамках рассматриваемой задачи нас интересует только нечетная часть, так как именно она определяет поперечный отклик системы. Полагая функцию $f_{\mathbf{p}}$ известной, сведем уравнение Больцмана (1) к виду:

$$-i\omega\delta f_{\mathbf{p}}^a - \sum_{\mathbf{p}'}W_{\mathbf{pp}'}(\delta f_{\mathbf{p}'}^a - \delta f_{\mathbf{p}}^a)\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}}) = I_{ph}\{f_{\mathbf{p}}^s\}, \quad (15)$$

где мы пренебрегаем вкладом $I_{ph}\{f_{\mathbf{p}}^a\}$ как малой величиной более высокого порядка в режиме слабого примесного потенциала, $\delta_\varepsilon \ll 1$, и

$$f_{\mathbf{p}}^s = -\frac{\tau eEv\cos\varphi}{\beta - i\omega\tau}\frac{\partial n_F}{\partial\varepsilon_{\mathbf{p}}}. \quad (16)$$

Анализ фононного интеграла столкновений показывает, что $\delta f_{\mathbf{p}}^a \sim \sin\varphi$. Это позволяет провести в уравнении (15) интегрирование по импульсу и записать решение в форме:

$$\delta f_{\mathbf{p}}^a = \tau\frac{I_{ph}\{f_{\mathbf{p}}^s\}}{\beta - i\omega\tau}. \quad (17)$$

Таким образом, задача сводится к определению явного вида интеграла столкновений квазичастиц сверхпроводника с акустическими фононами. В силу ряда обстоятельств (существенно неупругие процессы испускания и поглощения фононов при низких температурах, нетривиальная структура электронных волновых функций в сверхпроводнике, необходимость рассмотрения третьего порядка теории возмущений по электрон-фононному взаимодействию) диаграммная техника в решении данной проблемы оказывается предпочтительной. Сам по себе вывод уравнения Больцмана из квантового кинетического уравнения был предложен более полувека назад в основополагающей работе Келдыша [27] и к настоящему моменту подробно изложен в ряде книг, посвященных теории квантовых кинетических эффектов [28, 29]. Для описания сверхпроводящих систем с s-типом спаривания электронов квазиклассическое кинетическое уравнение было получено Ароновым и Гуревичем в 1974 г. [30]. В данной работе мы обобщили их подход для случая сверхпроводников p-типа и вывели электрон-фононный интеграл столкновений в явном виде. Последовательное обоснование приведенных ниже интегралов столкновений, однако, оказывается крайне громоздким, поэтому мы поместили технические детали в дополнительные материалы, а ниже приводим качественные пояснения.

Оператор взаимодействия электронов с акустическими фононами имеет вид [31]:

$$\hat{V}_1 = g_1 \int d\mathbf{r}\, \hat{\psi}^+(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\phi}(\mathbf{r}), \tag{18}$$

где g_1 – константа электрон-фононного взаимодействия, $\hat{\psi}^+$ и $\hat{\psi}$ – полевые операторы электронов. Оператор фононного поля, $\hat{\phi}$, выражается через операторы рождения $\hat{b}^+$ и уничтожения $\hat{b}$ фононов следующим образом:

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{2}} \left(i\hat{b}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{q}} t} - i\hat{b}^+_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r} + i\omega_{\mathbf{q}} t} \right), \tag{19}$$

где $\omega_{\mathbf{q}} = cq$ – энергия фонона и c – скорость звука. В отличие от "вмороженного" беспорядка, создаваемого примесными центрами, фононное поле является динамическим, поэтому любой порядок теории возмущений по электрон-фононному взаимодействию должен содержать четное число операторов $\hat{V}_1$. Однако, как известно из теории АЭХ, асимметричное (skew) рассеяние электронов появляется в третьем порядке теории возмущений. На языке одночастичной квантовой механики асимметрия в рассеянии электронов появляется вследствие интерференции двух каналов рассеяния, характеризуемых одно- и двукратным столкновением электрона, например, с примесным атомом. Поэтому, чтобы в условиях настоящей задачи удовлетворить условию четности числа операторов фононного поля, нам необходимо ввести дополнительный оператор электрон-фононного взаимодействия:

$$\hat{V}_2 = g_2 \int d\mathbf{r}\, \hat{\psi}^+(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\phi}^2(\mathbf{r}), \tag{20}$$

который описывает процессы одновременного испускания и/или поглощения двух фононов при однократном взаимодействии электрона с кристаллической решеткой. Данный оператор, $\hat{V}_2$, не является в какой-либо мере искусственным и соответствует второму порядку разложения потенциальной энергии электрона в периодическом поле кристалла по смещению атомов из их положений равновесия. Отметим, что мы выбрали нормировку константы электрон-фононного взаимодействия, при которой безразмерной комбинацией выступает $g_1^2\nu$. В то же время $[g_2\nu] = \text{эВ}^{-1}$.

Система элементарных возбуждений сверхпроводников богата даже в минимальной модели – однозонной модели Бардина–Купера–Шриффера. При переходе в сверхпроводящее состояние электроны, обладающие энергией из узкого диапазона около уровня Ферми, объединяются в куперовские пары и образуют сверхтекучий бозе-конденсат. Остальные электроны формируют над- и подщелевые элементарные возбуждения с модифицированной плотностью состояний и щелью в энергетическом спектре. В силу сравнительной малости энергетической щели в системе реализуется большое число вариантов неупругого рассеяния квазичастиц с участием фононов, а соответствующие выражения для интеграла столкновений оказываются чрезвычайно громоздкими. Однако возможно сделать ряд упрощений, позволяющих, помимо облегчения вычислительной работы, построить ясную физическую картину процессов рассеяния. В настоящее время отсутствуют экспериментальные свидетельства о существовании высокотемпературных сверхпроводников с p-типом спаривания электронов, поэтому в своих оценках будем ориентироваться на параметры Sr_2RuO_4. Критическая температура в данном материале равна приблизительно $T_c = 1.5$ K. При столь низкой температуре в системе представлены лишь длинноволновые равновесные акустические колебания. Поэтому при проведении расчетов мы пренебрегаем процессами поглощения и вынужденного испускания фононов и считаем, что энергетическая релаксация элементарных возбуждений сверхпроводника в нашей модели обусловлена только спонтанными процессами. Другими словами, с целью упрощения теории мы полагаем функцию распределения фононов в интегралах столкновений равной нулю, $N(\mathbf{q}) \ll 1$, что в случае крайне низких температур не внесет большой погрешности в результаты расчета.

С учетом принятого упрощения искомые интегралы столкновений принимают вид:

$$I_{ab}\{n_{\mathbf{p}}\} = -\frac{(2\pi)^2 g_1^2 g_2}{16} \sum_{\mathbf{kq}} \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}) \Big\{ \big[\lambda_{\mathbf{kq}} + \lambda_{\mathbf{pk}} + \lambda_{\mathbf{qp}}\big]\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})(1 - n_{\mathbf{k}})n_{\mathbf{q}} + \\ + \big[-\lambda_{\mathbf{kq}} - \lambda_{\mathbf{pk}} + \lambda_{\mathbf{qp}}\big]\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{p}-\mathbf{k}})n_{-\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}} \Big\}, \tag{21}$$

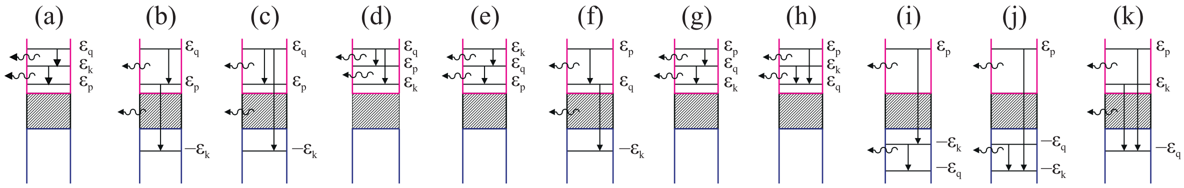

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схематическое изображение процессов релаксации квазичастиц с испусканием акустических фононов (волнистые линии). Заштрихованная область обозначает щель 2Δ в энергетическом спектре сверхпроводника

$$I_{c-e}\{n_{\mathbf{p}}\} = -(1-n_{\mathbf{p}})\frac{(2\pi)^2 g_1^2 g_2}{16}\sum_{\mathbf{kq}}\omega_{\mathbf{q-k}}\omega_{\mathbf{p-q}}\Big\{\big[-\lambda_{\mathbf{kq}} - \lambda_{\mathbf{pk}} + \lambda_{\mathbf{qp}}\big]\delta(\varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p-q}})\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q-k}})n_{-\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}} +$$

$$+\big[\lambda_{\mathbf{kq}} + \lambda_{\mathbf{pk}} + \lambda_{\mathbf{qp}}\big]\delta(\varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p-q}})\Big[\delta(\varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q-k}})(1-n_{\mathbf{k}})n_{\mathbf{q}} - \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q-k}})n_{\mathbf{k}}(1-n_{\mathbf{q}})\Big]\Big\}, \quad (22)$$

$$I_{f-k}\{n_{\mathbf{p}}\} = n_{\mathbf{p}}\frac{(2\pi)^2 g_1^2 g_2}{16}\sum_{\mathbf{kq}}\omega_{\mathbf{q-k}}\omega_{\mathbf{p-q}}\Big\{-\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p-q}})\Big[\big[-\lambda_{\mathbf{kq}} - \lambda_{\mathbf{pk}} + \lambda_{\mathbf{qp}}\big]\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q-k}})n_{-\mathbf{k}}n_{\mathbf{q}} +$$

$$+\big[\lambda_{\mathbf{kq}} + \lambda_{\mathbf{pk}} + \lambda_{\mathbf{qp}}\big]\Big(\delta(\varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q-k}})(1-n_{\mathbf{k}})n_{\mathbf{q}} - \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q-k}})n_{\mathbf{k}}(1-n_{\mathbf{q}})\Big)\Big] +$$

$$+\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{p-q}})\Big[\big[\lambda_{\mathbf{kq}} - \lambda_{\mathbf{pk}} - \lambda_{\mathbf{qp}}\big]\Big(\delta(\varepsilon_{\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q-k}})(1-n_{-\mathbf{k}})n_{-\mathbf{q}} - \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q-k}})n_{-\mathbf{k}}(1-n_{-\mathbf{q}})\Big) -$$

$$-\big[\lambda_{\mathbf{kq}} - \lambda_{\mathbf{pk}} + \lambda_{\mathbf{qp}}\big]\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q-k}})n_{\mathbf{k}}n_{-\mathbf{q}}\Big]\Big\}, \quad (23)$$

где $\lambda_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Delta^2/\varepsilon_{\mathbf{p}_1}\varepsilon_{\mathbf{p}_2}$. Несмотря на громоздкость выражений (21)–(23), каждому слагаемому в них можно сопоставить элементарную схему переходов квазичастиц между состояниями (рис. 1). Некоторые диаграммы (рис. 1b, c, f, i, j, k) включают в себя переходы через энергетическую щель, то есть описывают акты аннигиляции над- и подщелевых элементарных возбуждений сверхпроводника. Физически это означает образование куперовской пары, сопровождаемое передачей излишка энергии кристаллической решетке. Отметим, что в отличие от полупроводников, в которых сравнительно большая ширина запрещенной зоны эффективно подавляет роль межзонных переходов с участием фононов, в данном случае вклад переходов через щель нельзя считать малым.

На основе выражений (21)–(23) можно сделать ряд заключений, не прибегая к каким-либо сложным математическим операциям. Прежде всего отметим, что в интегралах столкновений (21)–(23) не соблюдается принцип детального равновесия, как минимум, по причине нечетности функции $\lambda_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ относительно перестановки импульсов, $\lambda_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2} = -\lambda_{\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1}$. Действительно, данный принцип не является универсальной теоремой и соблюдается только для систем, инвариантных относительно пространственной инверсии и обращения времени, к числу которых $p_x + ip_y$ сверхпроводники не принадлежат. Далее, энергии квазичастиц ε отсчитываются от середины энергетической щели и имеют порядок $\varepsilon \sim \max\{T, \Delta\} \ll cp_0$, где p_0 – импульс Ферми. В этих условиях незаконно считать энергию фонона малой величиной по сравнению с энергиями квазичастиц и, следовательно, в изучаемой системе приближение квазиупругого рассеяния квазичастиц на колебаниях кристаллической решетки оказывается неприменимым. Оценка, основанная на требовании сохранения энергии системы при испускании фонона, приводит к выражению $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \approx 1 - (\max\{T, \Delta\}/cp_0)^2$, что означает преимущественное рассеяние квазичастиц на малые углы.

Дальнейший расчет состоит в подстановке линеаризованных интегралов столкновений (21)–(23) в выражение для соответствующей неравновесной поправки (17) и последующего вычисления плотности поперечного электрического тока:

$$j_H = e\sum_{\mathbf{p}} v_y \delta f^a_{\mathbf{p}}. \quad (24)$$

Далее мы опускаем объемные вычисления, как не представляющие общефизического интереса, но приводим несколько пояснений. Интегрирование по угловой переменной $\varphi_{\mathbf{p}}$ в (24) тривиально, в то время как интегрирование по $\varphi_{\mathbf{q}}$ и $\varphi_{\mathbf{k}}$ выполняется с помощью фильтрующего свойства дельта-функций. Отметим, что при этом удобно использовать тождество:

$$\delta(\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_2} - \omega_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}) = 2(\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_2})\Theta(\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_2})\delta\left[(\varepsilon_{\mathbf{p}_1} - \varepsilon_{\mathbf{p}_2})^2 - \omega^2_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2}\right], \tag{25}$$

где Θ – функция Хевисайда. В настоящей работе мы анализируем поведение холловской проводимости в низкочастотном пределе, $\omega\tau \ll 1$. Данное условие автоматически согласовано с условием применимости квазиклассического приближения, $\omega \ll \Delta$, так как в указанном приближении квазичастицы должны быть хорошо определены и удовлетворять условию $1/\tau \ll \Delta$ (критерий $\Delta\tau \gg 1$, используемый при выводе кинетического уравнения для обычного сверхпроводника [30], остается справедливым и в p_x+ip_y-сверхпроводнике, обладающим поверхностью Ферми цилиндрической формы и ненулевой энергетической щелью). Кроме того, в низкочастотном пределе мнимая часть проводимости мала по сравнению с вещественной, $\sigma''_H/\sigma'_H \sim \omega\tau \ll 1$, и мы ею пренебрегаем.

Искомое выражение для недиагональной компоненты тензора проводимости принимает вид:

$$\sigma'_H = \sigma_D \frac{\tau\nu^2 g_1^2 g_2 (k_B T)^6}{2\hbar(cp_0)^4} F\left(\frac{\Delta}{k_B T}\right), \tag{26}$$

где $\sigma_D = e^2\nu v^2\tau/2$ – друдевская проводимость электронного газа в нормальном состоянии и восстановлены постоянные Планка и Больцмана. Общий знак выражения определяется симметрией параметра порядка и меняется на противоположный при смене состояния: $p_x + ip_y \to p_x - ip_y$, т.е. при $\Delta e^{i\varphi_{\mathbf{p}}} \to \to \Delta e^{-i\varphi_{\mathbf{p}}}$. Безразмерная функция F зависит от отношения параметра порядка к температуре и принимает максимальное значение при температуре, удовлетворяющей условию $\Delta/T \approx 1.3$ (рис. 2). При приближении температуры системы к абсолютному нулю, т.е. в области $\Delta/T \gg 1$, роль процессов рассеяния квазичастиц на фононах резко подавляется. Помимо сильной степенной зависимости от температуры, заключенной в числителе выражения (26), сама функция F стремится к нулю с экспоненциальной скоростью, $F \propto e^{-\Delta/T}$. С физической точки зрения экспоненциально быстрое подавление эффекта связано с тем, что в пределе нулевой температуры в системе отсутствуют надщелевые элементарные возбуждения. Поэтому такое поведение фононного вклада в поперечный отклик не является специфическим и любой другой механизм skew-рассеяния в $p_x + ip_y$ сверхпроводнике, в том числе на примесях, должен иметь подобную асимптотику. В обратном предельном случае, $\Delta/T \approx \Delta/T_c \ll 1$, холловская проводимость также стремится к нулю, а соответствующая асимптотика функции F имеет вид: $F \approx [49-2.3\ln(\Delta/T)](\Delta/T)^2$. Причина состоит в том, что именно параметр порядка в $p_x + ip_y$ сверхпроводнике нарушает инвариантность системы к обращению времени, и в нормальном состоянии условия для поперечного отклика системы отсутствуют.

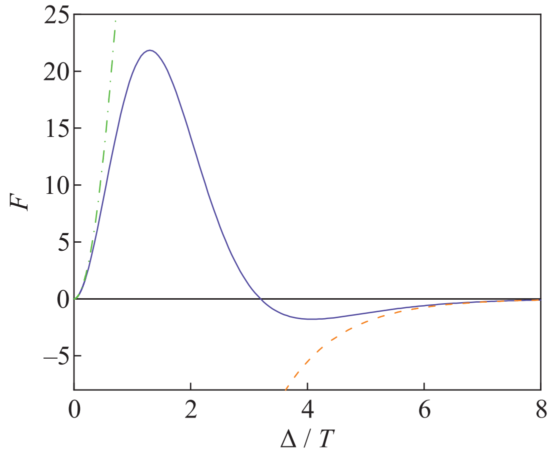

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость функции F от отношения параметра порядка к температуре, Δ/T. Зеленая штрих-пунктирная и оранжевая штриховая кривые обозначают асимптотики функции $F(\Delta/T)$

В заключение сравним поведение фононного и примесного вкладов вблизи критической температуры. В работе [17] получено следующее выражение для холловской проводимости:

$$\sigma_H^{imp} = \sigma_D \frac{7\pi}{12\sqrt{3}} \delta_n \frac{\Delta}{T}, \tag{27}$$

где $\delta_n = -\pi\nu u_0$, $|\delta_n| \ll 1$ – фазовый сдвиг при рассеянии нормальных электронов на примесях. В эксперименте доступны два параметра, способных повлиять на относительный вклад двух механизмов. Прежде всего, это температура: вблизи критической точки вклад фононов растет с большей скоростью, $\sigma'_H/\sigma_H^{imp} \propto \Delta/T$. Во-вторых, это качество образцов, точнее, их удельное сопротивление в нормальной фазе: уменьшение удельного сопротивления усиливает роль фононного механизма, $\sigma'_H/\sigma_H^{imp} \propto \tau$, поэтому при некоторой чистоте образца фононный механизм skew-рассеяния должен стать доминирующим. Интересно отметить, что роль примесного механизма в поперечном отклике p-сверхпроводника может быть ослаблена и без значительного снижения удельного сопротивления: выражение (27) нечетно по примесному потенциалу, поэтому при наличии в системе как отталкивающих, так и притягивающих примесных центров следует ожидать частичной или полной компенсации примесных вкладов. Отметим, что в случае сильных примесей итоговая зависимость холловской проводимости от знака примесного потенциала так же нечетна [18].

Авторы выражают благодарность В. М. Ковалеву за ценные замечания при подготовке работы.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 24-22-00174, https://rscf.ru/project/24-22-00174/.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. A. Burkov, "Anomalous Hall effect in Weyl metals", Phys. Rev. Lett. **113**, 187202 (2014).
2. J. W. McIver, B. Schulte, F.-U. Stein, T. Matsuyama, G. Jotzu, G. Meier, and A. Cavalleri, "Light-induced anomalous Hall effect in graphene", Nat. Phys. **16**, 38 (2020).
3. C.-C. Tseng, X. Ma, Z. Liu, K. Watanabe, T. Taniguchi, J.-H. Chu, and M. Yankowitz, "Anomalous Hall effect at half filling in twisted bilayer graphene", Nat. Phys. **18**, 1038 (2022).
4. P. D. Sacramento, M. A. N. Araújo, V. R. Vieira, V. K. Dugaev, and J. Barnaś, "Anomalous Hall effect in superconductors with spin-orbit interaction", Phys. Rev. B **85**, 014518 (2012).
5. M. D. E. Denys and P. M. R. Brydon, "Origin of the anomalous Hall effect in two-band chiral superconductors", Phys. Rev. B **103**, 094503 (2021).
6. E. R. Schemm, W. J. Gannon, C. M. Wishne, W. P. Halperin, and A. Kapitulnik, "Observation of broken time-reversal symmetry in the heavy-fermion superconductor UPt_3", Science **345**, 190 (2014).
7. E. R. Schemm, R. E. Baumbach, P. H. Tobash, F. Ronning, E. D. Bauer, and A. Kapitulnik, "Evidence for broken time-reversal symmetry in the superconducting phase of URu_2Si_2", Phys. Rev. B **91**, 140506(R) (2015).
8. X. Gong, M. Kargarian, A. Stern, D. Yue, H. Zhou, X. Jin, V. M. Galitski, V. M. Yakovenko, and J. Xia, "Time-reversal symmetry-breaking superconductivity in epitaxial bismuth/nickel bilayers", Sci. Adv. **3**, e1602579 (2017).
9. E. M. Levenson-Falk, E. R. Schemm, Y. Aoki, M. B. Maple, and A. Kapitulnik, "Polar Kerr Effect from Time-Reversal Symmetry Breaking in the Heavy-Fermion Superconductor $PrOs_4Sb_{12}$", Phys. Rev. Lett. **120**, 187004 (2018).
10. V. L. Vadimov and A. S. Mel'nikov, "Laser pulse probe of the chirality of Cooper pairs", Phys. Rev. B **96**, 184523 (2017).
11. Y. Maeno, H. Hashimoto, K. Yoshida, S. Nishizaki, T. Fujita, J. G. Bednorz, and F. Lichtenberg, "Superconductivity in a layered perovskite without copper", Nature **372**, 532 (1994).
12. A. P. Mackenzie and Y. Maeno, "The superconductivity of Sr_2RuO_4 and the physics of spin-triplet pairing", Rev. Mod. Phys. **75**, 657 (2003).
13. J. Xia, Y. Maeno, P. T. Beyersdorf, M. M. Fejer, and A. Kapitulnik, "High Resolution Polar Kerr Effect Measurements of Sr_2RuO_4: Evidence for Broken Time-Reversal Symmetry in the Superconducting State", Phys. Rev. Lett. **97**, 167002 (2006).
14. Y. Maeno, A. Ikeda, and G. Mattoni, "Thirty years of puzzling superconductivity in Sr_2RuO_4", Nat. Phys. **20**, 1712 (2024).
15. R. M. Lutchyn, P. Nagornykh, and V. M. Yakovenko, "Frequency and temperature dependence of the anomalous ac Hall conductivity in a chiral $p_x + ip_y$ superconductor with impurities", Phys. Rev. B **80**, 104508 (2009).
16. E. J. König and A. Levchenko, "Kerr Effect from Diffractive Skew Scattering in Chiral $p_x \pm ip_y$ Superconductors", Phys. Rev. Lett. **118**, 027001 (2017).
17. S. Li, A. V. Andreev, and B. Z. Spivak, "Anomalous transport phenomena in $p_x + ip_y$ superconductors", Phys. Rev. B **92**, 100506(R) (2015).
18. P. A. Ioselevich and P. M. Ostrovsky, "Optical Properties of $p_x + ip_y$ Superconductors with Strong Impurities", Письма в ЖЭТФ **110**, 812 (2019) [P. A. Ioselevich and P. M. Ostrovsky, "Optical Properties of $p_x + ip_y$ Superconductors with Strong Impurities", JETP Lett. **110**, 804 (2019)].
19. C. Gorini, U. Eckern, and R. Raimondi, "Spin Hall Effects Due to Phonon Skew Scattering", Phys. Rev. Lett. **115**, 076602 (2015).
20. C. Xiao, Y. Liu, M. Xie, S. A. Yang, and Q. Niu, "Theory of the phonon side-jump contribution in anomalous Hall effect", Phys. Rev. B **99**, 245418 (2019).
21. M. M. Glazov and L. E. Golub, "Valley Hall effect caused by the phonon and photon drag", Phys. Rev. B **102**, 155302 (2020).
22. М. В. Боев, А. В. Снегирев, "Долинный эффект Холла в двумерной электрон-экситонной системе", Письма в ЖЭТФ **121**, 113 (2025) [M. V. Boev and A. V. Snegirev, "Valley Hall Effect in a Two-Dimensional Electron–Exciton System", JETP Lett. **121**, 103 (2025)].

23. S. K. Lyo, "Ferromagnetic Hall Effect in an Electron-Phonon Gas", Phys. Rev. B **8**, 1185 (1973).
24. О. В. Кибис, "Новые эффекты электрон-фононного взаимодействия в квазидвумерных структурах в магнитном поле", ЖЭТФ, **115**, 959 (1999) [O. V. Kibis, "Novel effects of electron-phonon interaction in quasi-two-dimensional structures located in a magnetic field", J. Exp. Theor. Phys. **88**, 527 (1999)].
25. D. Lawton, A. Nogaret, M. V. Makarenko, O. V. Kibis, S. J. Bending, and M. Henini, "Electrical rectification by magnetic edge states", Physica E **13**, 699 (2002).
26. A. G. Aronov, Yu. M. Gal'perin, V. L. Gurevich, and V. I. Kozub, "The Boltzmann-equation description of transport in superconductors", Adv. Phys. **30**, 539 (1981).
27. Л. В. Келдыш, "Диаграммная техника для неравновесных процессов", ЖЭТФ **47**, 1515 (1964) [L. V. Keldysh, "Diagram Technique for Nonequilibrium Processes", Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965)].
28. H. Haug and A.-P. Jauho, *Quantum Kinetics in Transport and Optics of Semiconductors* (Springer Berlin, Heidelberg, 2008).
29. Р. О. Зайцев, *Введение в современную кинетическую теорию*, КомКнига, М. (2007) [in Russian] [R. O. Zaitsev, *Introduction to modern kinetic theory* (URSS editorial, Moscow, 2014)].
30. А. Г. Аронов, В. Л. Гуревич, "Теория отклика чистых сверхпроводников на медленно изменяющееся возмущение", ФТТ **16**, 2656 (1974) [A. G. Aronov and V. L. Gurevich, "Response of a pure superconductor to a slowly varying perturbation", Sov. Phys. Solid State **16**, 1722 (1974)].
31. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Добросвет, М. (2006) [in Russian] [A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, (Dover Publications, N.Y., 2003)].