Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 1, с. 68 – 73 © 2026 г. 10 января

Конструкция зеркальных пар орбифолдов Калаби–Яу типа Берглунда–Хубша

С. С. Алешин*, А. А. Белавин+*[1)]

+Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, 142432 Черноголовка, Россия

*Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича, 127051 Москва, Россия

Поступила в редакцию 29 октября 2025 г.
После переработки 13 ноября 2025 г.
Принята к публикации 13 ноября 2025 г.

В этой работе мы предлагаем алгоритм построения орбифолдов многообразий Калаби–Яу типа Берглунда–Хубша. Данный подход позволяет получить все зеркальные пары для многообразий Калаби–Яу этого типа. В качестве примера рассмотрена одна из моделей типа Ферма, для которой были найдены все ее орбифолды и их зеркальные пары, а также для каждого орбифолда было найдено число поколений кварков и лептонов, а также число типов частиц, участвующих только в гравитационном взаимодействии, т.е. частиц темной материи.

DOI: 10.7868/S3034576626010095

1. Введение. Гетеротическая струна в 10-мерном пространстве-времени была предложена в [1] в качестве подхода к объединению Квантовой Теории Гравитации и Теории Великого Объединения Калибровочных взаимодействий.

После этого в [2] была выдвинута идея получения теории гетеротической струны в 4-мерном пространстве-времени путем компактификации 6 измерений 10-мерного пространства-времени на многообразия Калаби–Яу.

Затем Д. Гепнер выдвинул гипотезу [3, 4] об эквивалентности компактификации 6-ти измерений на многообразия Калаби–Яу и компактификации на $N = 2$ суперконформной теории с центральным зарядом $c = 9$. Это сделало возможным построение точно решаемых моделей Гетеротической струны в 4-мерном Пространстве–Времени.

Важный класс точно решаемых моделей гетеротической струны, рассмотренных ранее Д. Гепнером [3, 4], соответствует произведениям $N = 2$ минимальных моделей с полным центральным зарядом $c = 9$. Конструкция этих моделей гетеротической струны включает компактификацию на многообразия Калаби–Яу, которые принадлежат специальному случаю CY многообразий типа Берглунда–Хубша.

В работе [5] разработан метод явного построения моделей гетеротической струны, компактифицированной на произведение тора алгебры Ли $E(8) \times SO(10)$, а также общих многообразий Калаби–Яу и их орбифолдов типа Берглунда–Хубша. В отличие от подхода Гепнера, в работе [5] компактификация рассмотрена для произвольного многообразия Калаби–Яу типа Берглунда–Хубша. Построение использует комбинаторный подход Батырева–Борисова [6], а также конструкцию вертексов физических состояний свободными бозонными и фермионными полями.

Однако в работе [5] не был предъявлен способ нахождения данных для каждого конкретного случая зеркальной пары орбифолдов, что нужно знать, в частности, для вычисления числа типов темной материи (т.е. синглетов по отношению к калибровочной группе $E(8)\times E(6)$). Этой проблеме посвящена настоящая работа.

В данной работе нами разработан общий алгоритм поиска всех орбифолдов многообразий Калаби–Яу типа Берглунда–Хубша и их зеркальных пар. Сформулирована явная конструкция для нахождения всех допустимых деформаций и групп, задающих орбифолды и их зеркальные пары. Это знание необходимо для конструкции, соответствующей данному Калаби–Яу модели Гетеротической струны.

Как известно, с феноменологической точки зрения важно уметь строить многообразия Калаби–Яу с топологией, задающей число поколений кварков и лептонов, равным трем. Предлагаемый нами подход построения орбифолдов многообразий Калаби–Яу может помочь в поиске таких моделей. На примере одной из моделей типа Ферма мы демонстрируем наш алгоритм в действии. Для этой модели для каждого орбифолда мы находим число поколений и

[1)]e-mail: belavin@itp.ac.ru

число частиц, участвующих только в гравитационном взаимодействии (синглетов), т.е. частиц темной материи.

Рассмотрим класс многообразий Калаби–Яу типа Берглунда–Хубша, которые могут быть построены как гиперповерхности во взвешенном проективном пространстве с весами $\mathbf{k} := (k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$

$$\mathbb{P}^4_{\mathbf{k}} = \Big\{(x_1, ..., x_5) \in \mathbb{C}^5 \backslash \{0\} \ \Big| \ x_i \sim \lambda^{k_i} x_i, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}\Big\}$$

при этом выполнены следующие условия:

$$W_0 := \sum_{i=1}^{5} \prod_{j=1}^{5} x_j^{A_{ij}} = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{5} A_{ij} k_j = d, \tag{2}$$

$$d = \sum_{i=1}^{5} k_i. \tag{3}$$

Здесь A_{ij} – целая обратимая матрица, соотношение (2) является условием квазиоднородности для полинома W_0, соотношение (3) является условием того, что гиперповерхность имеет первый класс Черна, равный нулю, это условие является необходимым требованием для многообразий Калаби–Яу.

Перейдем к конструкции орбифолдов для многообразия Калаби–Яу. Для этого определим максимальную группу диагональных симметрий

$$Aut(A) := \Big\{(\alpha_1, ..., \alpha_5) \in (\mathbb{C}^*)^5 \ \Big| \ W_0(\alpha_1 \cdot x_1, ..., \alpha_5 \cdot x_5) = W_0(x_1, ..., x_5)\Big\}. \tag{4}$$

Можно показать, что для любого многочлена одного из атомарных типов (Ферма, Петля, Цепь), а также для любого многочлена, являющегося комбинацией таких типов, верно, что $|\alpha_i| = 1$. Тогда $\alpha_i = e^{2\pi i \theta_i}$ и для выполнения условия инвариантности полинома в (4) нужно, чтобы было выполнено

$$\sum_{j=1}^{5} A_{ij} \theta_j \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

откуда следует, что генераторы группы $Aut(A)$ имеют вид

$$\Big(e^{2\pi i B_{1j}}, ..., e^{2\pi i B_{5j}}\Big), \quad j \in \overline{1,5}, \tag{6}$$

где $B_{ij} := (A^{-1})_{ij}$, тогда для произвольного $(\alpha_1, ..., \alpha_5) \in Aut(A)$ найдутся такие целые m_j, $j \in \overline{1,5}$, что

$$\alpha_i = \exp\Big(2\pi i \sum_{j=1}^{5} B_{ij} m_j\Big), \quad \forall\, i \in \overline{1,5}. \tag{7}$$

Из определения (4) и соотношения (7) следует, что элемент $(\alpha_1, ..., \alpha_5) \in Aut(A)$ действует

$$x_i \mapsto \alpha_i \cdot x_i = \exp\Big(2\pi i \sum_{j=1}^{5} B_{ij} m_j\Big) x_i. \tag{8}$$

Рассмотрим в $Aut(A)$ подгруппу, сохраняющую $\prod_{i=1}^{5} x_i$

$$G^{\max}_{\mathrm{adm}} = \Big\{p \in Aut(A) \ \Big| \ p \prod_{i=1}^{5} x_i = \prod_{i=1}^{5} x_i\Big\}. \tag{9}$$

Такая группа называется максимальной допустимой группой. В качестве своей подгруппы группа $G^{\max}_{\mathrm{adm}}$ содержит квантовую группу

$$J_A := <(e^{\frac{2\pi i}{d} k_1}, ..., e^{\frac{2\pi i}{d} k_5})>. \tag{10}$$

Для того чтобы задавать орбифолды, мы будем рассматривать допустимые группы G (подгруппы $G^{\max}_{\mathrm{adm}}$) такие, для которых выполнено $J_A \subseteq G \subseteq G^{\max}_{\mathrm{adm}}$.

Тогда для семейства $\mathcal{Q}$ Калаби–Яу многообразий

$$\mathcal{Q} := \Big\{(x_1, ..., x_5) \in \mathbb{P}^4_{\mathbf{k}} \ \Big| \ W_0(x) + \sum_{l=1}^{h} \varphi_l \prod_{i=1}^{5} x_i^{S_{li}} = 0\Big\}$$

орбифолд X определяется как

$$X := \mathcal{Q}/\widetilde{G}, \quad \text{где} \quad \widetilde{G} := G/J_A, \tag{11}$$

где допустимые деформации типа $\prod_{i=1}^{5} x_i^{S_{li}}$ (l – номер деформации)для многообразий Калаби–Яу типа Берглунда–Хубша [7] должны удовлетворять условиям из работы [8].

2. Алгоритм поиска орбифолдов Калаби–Яу и их зеркальных пар. Определим теперь шаги алгоритма построения орбифолдов многообразий Калаби–Яу типа Берглунда–Хубша и их зеркальных пар.

На первом шаге мы находим все допустимые деформации исходного полинома W_0.

Для этого необходимо решить уравнение

$$\sum_{i=1}^{5} k_i S_i = d \tag{12}$$

с одним из ограничений на допустимые деформации в зависимости от типа полинома W_0:

$$\text{Ферма}: \quad 0 \le S_i \le A_{ii} - 2, \quad \forall\, i \in \overline{1,5}, \tag{13}$$

$$\text{Петля}: \quad 0 \le S_i \le A_{ii} - 1, \quad \forall\, i \in \overline{1,5}. \tag{14}$$

Для типа "Цепь" должно быть выполнено хотя бы одно из трех условий (15)–(17):

$$0 \le S_i \le A_{ii} - \delta_{1i} - 1, \quad i \in \overline{1,5}, \tag{15}$$

либо условие

$$\begin{gathered} S_1 = A_{11} - 1, \quad S_2 = 0, \\ 0 \le S_j \le A_{jj} - \delta_{3j} - 1, \quad j = 3,4,5, \end{gathered} \tag{16}$$

либо условие

$$\begin{gathered} S_1 = A_{11} - 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = A_{33} - 1, \\ S_4 = 0, \quad 0 \le S_5 \le A_{55} - 2. \end{gathered} \tag{17}$$

Также можно рассмотреть смешанный случай.

На втором шаге мы находим все элементы максимальной допустимой группы $G^{\max}_{\mathrm{adm}}$. Для этого перепишем (9) в удобном для их поиска виде

$$G^{\max}_{\mathrm{adm}} = \Big\{ (e^{2\pi i g_1}, ..., e^{2\pi i g_5}) \in (\mathbb{C}^*)^5 \ \Big| \ \sum_{j=1}^{5} A_{ij} g_j \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^{5} g_i \in \mathbb{Z} \Big\}. \tag{18}$$

Элемент $(e^{2\pi i g_1}, ..., e^{2\pi i g_5})$ группы $(\mathbb{C}^*)^5$ является элементом $G^{\max}_{\mathrm{adm}}$ тогда и только тогда, когда найдутся такие $n_j \in \mathbb{Z}$, что выполнены условия

$$g_i = \sum_{j=1}^{5} B_{ij} n_j, \tag{19}$$

$$\sum_{i,j=1}^{5} B_{ij} n_j \in \mathbb{Z}, \tag{20}$$

$$0 \le n_j < \max_{i \in \overline{1,5}} A_{ij}. \tag{21}$$

На третьем шаге для каждого элемента группы $f_q = (e^{2\pi i g_{q,1}}, ..., e^{2\pi i g_{q,5}}) \in G^{\max}_{\mathrm{adm}}$, где q – номер элемента в группе, мы находим все деформации $\varphi_l \prod_{j=1}^{5} x_j^{S_{lj}}$ из множества всех допустимых деформаций, найденных на первом шаге, на которые f_q действует инвариантно.

Таким образом, для каждого элемента группы нужно для всех допустимых деформаций проверить условие

$$\sum_{j=1}^{5} g_{q,j} S_{lj} \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Для элемента группы f_q будем обозначать множество всех таких S_l, для которых выполено условие инвариантности (22) как R_q (в дальнейшем элементы S_l, задающие деформации, будем также называть деформациями). Выберем из найденного списка множеств R_q все не совпадающие и перенумеруем их так, что они составят набор R_i, $i \in \overline{1,N}$.

Затем, находим все возможные типы пересечений множеств R_i (пусть их число равно P) и добавим найденные типы пересечений к списку R_i.

На четвертом шаге, используя условия инвариантности (22) для каждого множества R_i, мы находим все элементы группы $G^{\max}_{\mathrm{adm}}$, которые инвариантно действуют на деформации, заданные с помощью любого элемента из R_i. Множество всех таких элементов группы для каждого подмножества деформаций R_i образует подгруппу $G^i_{\mathrm{adm}} \subseteq G^{\max}_{\mathrm{adm}}$, задающую орбифолд для R_i. Найденные пары R_i и G^i_{adm}, $i \in \overline{1, N+P}$ задают все орбифолды для модели с полиномом W_0.

На пятом шаге мы находим для зеркального полинома (заданного матрицей A^T) список всех его допустимых деформаций и максимальную группу его инвариантности $G^{\max,T}_{\mathrm{adm}}$. Мы будем называть максимальной зеркальной.

На шестом шаге мы находим для каждого R_i все такие зеркальные деформации T, для которых выполнено условие целочисленного спаривания

$$(S,T) := \sum_{i,j=1}^{5} S_i B_{ij} T_j \in \mathbb{Z} \quad \forall\, S \in R_i. \tag{23}$$

Обозначим множество всех таких зеркальных деформаций T как L_i. Найдем для каждого L_i все элементы группы $G^{\max,T}_{\mathrm{adm}}$, которые инвариантно действуют на каждый элемент из L_i. Все эти элементы образуют подгруппу $G^{T,i}_{\mathrm{adm}} \subseteq G^{\max,T}_{\mathrm{adm}}$. Найденные L_i, $G^{T,i}_{\mathrm{adm}}$ задают зеркальный орбифолд к орбифолду R_i, G^i_{adm}.

На этом шаге мы получаем все зеркальные пары (R_i, L_i), орбифолдов многообразия Калаби–Яу типа Берглунда–Хубша.

Теперь мы можем вычислить число поколений и число типов материи (темной материи), участвующей только в гравитационном взаимодействии, т.е. синглетов, которые не участвуют в калибровочных $E(8) \times E(6)$ взаимодействиях.

В работе [5] было показано, что вершинные операторы для частиц синглетного представления алгебры $E(8) \times E(6)$ могут быть трех типов: первый тип включают пары элементов многогранника Батырева и его зеркала, спаривание которых равно нулю

$$(S,T) = 0,\ \forall\, S \in R_i\ \forall\, T \in L_i. \tag{24}$$

Второй тип – точки многогранника Батырева и третий тип – точки зеркального многогранника Батырева.

Число поколений для зеркальной пары с номером i равно разности числа точек в зеркальных парах многогранников Батырева

$$N_{\mathrm{gen}} = ||L_i| - |R_i||. \tag{25}$$

3. Пример. Далее мы применим описанный выше алгоритм в качестве примера для случая многообразий Калаби–Яу, заданных полиномом типа Ферма с матрицей $A = \mathrm{diag}(2, 4, 6, 18, 36)$ во взвешенном проективном пространстве с весами $k = (18, 9, 6, 2, 1)$.

Найдем допустимые деформации из условий:

$$\sum_{i=1}^{5} k_i S_i = d, \tag{26}$$

$$0 \leq S_i \leq A_{ii} - 2, \quad \forall\, i \in \overline{1, 5}, \tag{27}$$

добавим к ним деформацию $x_1x_2x_3x_4x_5$. Всего для рассматриваемой модели есть 125 деформаций

$$\begin{gathered}
x_4x_5^{34},\ x_4^2x_5^{32},\ x_4^3x_5^{30},\ x_4^4x_5^{28},\ x_4^5x_5^{26},\ x_4^6x_5^{24},\ x_4^7x_5^{22},\\
x_4^8x_5^{20},\ x_4^9x_5^{18},\ x_4^{10}x_5^{16},\ x_4^{11}x_5^{14},\ x_4^{12}x_5^{12},\ x_4^{13}x_5^{10},\\
x_4^{14}x_5^{8},\ x_4^{15}x_5^{6},\ x_4^{16}x_5^{4},\ x_3x_5^{30},\ x_3x_4x_5^{28},\ x_3x_4^2x_5^{26},\\
x_3x_4^4x_5^{22},\ x_3x_4^5x_5^{20},\ x_3x_4^6x_5^{18},\ x_3x_4^7x_5^{16},\ x_3x_4^8x_5^{14},\\
x_3x_4^9x_5^{12},\ x_3x_4^{10}x_5^{10},\ x_3x_4^{11}x_5^{8},\ x_3x_4^{12}x_5^{6},\ x_3x_4^{13}x_5^{4},\\
x_3x_4^{14}x_5^{2},\ x_3x_4^{15},\ x_3^2x_5^{24},\ x_3^2x_4x_5^{22},\ x_3^2x_4^2x_5^{20},\\
x_3^2x_4^3x_5^{18},\ x_3^2x_4^4x_5^{16},\ x_3^2x_4^5x_5^{14},\ x_3^2x_4^6x_5^{12},\ x_3^2x_4^7x_5^{10},\\
x_3^2x_4^8x_5^{8},\ x_3^2x_4^9x_5^{6},\ x_3^2x_4^{10}x_5^{4},\ x_3^2x_4^{11}x_5^{2},\ x_3^2x_4^{12},\\
x_3^3x_5^{18},\ x_3^3x_4x_5^{16},\ x_3^3x_4^2x_5^{14},\ x_3^3x_4^3x_5^{12},\ x_3^3x_4^4x_5^{10},\\
x_3^3x_4^5x_5^{8},\ x_3^3x_4^6x_5^{6},\ x_3^3x_4^7x_5^{4},\ x_3^3x_4^8x_5^{2},\ x_3^3x_4^{9},\ x_3x_4^3x_5^{24},\\
x_3^4x_5^{12},\ x_3^4x_4x_5^{10},\ x_3^4x_4^2x_5^{8},\ x_3^4x_4^3x_5^{6},\ x_3^4x_4^4x_5^{4},\\
x_3^4x_4^5x_5^{2},\ x_3^4x_4^{6},\ x_2x_5^{27},\ x_2x_4x_5^{25},\ x_2x_4^2x_5^{23},\\
x_2x_4^3x_5^{21},\ x_2x_4^4x_5^{19},\ x_2x_4^5x_5^{17},\ x_2x_4^6x_5^{15},\ x_2x_4^7x_5^{13},\\
x_2x_4^8x_5^{11},\ x_2x_4^9x_5^{9},\ x_2x_4^{10}x_5^{7},\ x_2x_4^{11}x_5^{5},\ x_2x_4^{12}x_5^{3},\\
x_2x_4^{13}x_5,\ x_2x_3x_5^{21},\ x_2x_3x_4x_5^{19},\ x_2x_3x_4^2x_5^{17},\ x_2x_3x_4^3x_5^{15},\\
x_2x_3x_4^4x_5^{13},\ x_2x_3x_4^5x_5^{11},\ x_2x_3x_4^6x_5^{9},\ x_2x_3x_4^7x_5^{7},\ x_2x_3x_4^8x_5^{5},\\
x_2x_3x_4^9x_5^{3},\ x_2x_3x_4^{10}x_5,\ x_2x_3^2x_5^{15},\ x_2x_3^2x_4x_5^{13},\ x_2x_3^2x_4^2x_5^{11},\\
x_2x_3^2x_4^3x_5^{9},\ x_2x_3^2x_4^4x_5^{7},\ x_2x_3^2x_4^5x_5^{5},\ x_2x_3^2x_4^6x_5^{3},\ x_2x_3^2x_4^7x_5,\\
x_2x_3^3x_5^{9},\ x_2x_3^3x_4x_5^{7},\ x_2x_3^3x_4^2x_5^{5},\ x_2x_3^3x_4^3x_5^{3},\ x_2x_3^3x_4^4x_5,\\
x_2x_3^4x_5^{3},\ x_2x_3^4x_4x_5,\ x_2^2x_5^{18},\ x_2^2x_4x_5^{16},\ x_2^2x_4^2x_5^{14},\\
x_2^2x_4^3x_5^{12},\ x_2^2x_4^4x_5^{10},\ x_2^2x_4^5x_5^{8},\ x_2^2x_4^6x_5^{6},\ x_2^2x_4^7x_5^{4},\\
x_2^2x_4^8x_5^{2},\ x_2^2x_4^{9},\ x_2^2x_3x_5^{12},\ x_2^2x_3x_4x_5^{10},\ x_2^2x_3x_4^2x_5^{8},\\
x_2^2x_3x_4^3x_5^{6},\ x_2^2x_3x_4^4x_5^{4},\ x_2^2x_3x_4^5x_5^{2},\ x_2^2x_3x_4^{6},\ x_2^2x_3^2x_5^{6},\\
x_2^2x_3^2x_4x_5^{4},\ x_2^2x_3^2x_4^2x_5^{2},\ x_2^2x_3^2x_4^{3},\ x_2^2x_3^{3},\ x_1x_2x_3x_4x_5.
\end{gathered} \tag{28}$$

Из условий (18)–(21) были найдены все 864 элемента максимальной допустимой группы $G_{\mathrm{adm}}^{\max}$. Затем для каждого элемента группы $(e^{2\pi i g_{q,1}}, \ldots, e^{2\pi i g_{q,5}}) \in G_{\mathrm{adm}}^{\max}$ было найдено множество R_q всех деформаций, для которых выполнено условие инвариантности (22).

Оказалось, что для рассматриваемой модели существует всего $N = 16$ различных типов множеств, будем обозначать их R_i. В таблице 1 перечислены элементы группы $g_i \in G_{\mathrm{adm}}^{\max}$, задающие множества деформаций R_i. Каждый элемент g_i имеет в качестве множества всех деформаций, на которые он действует инвариантно, множество деформаций R_i.

Таблица 1. Элементы группы $g_i \in G_{\mathrm{adm}}^{\max}$, задающие множества деформаций R_i

i	$g_i \in G_{\mathrm{adm}}^{\max}$
1	$(e^{2\pi i\frac{1}{2}}, e^{2\pi i\frac{1}{4}}, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{1}{18}}, e^{2\pi i\frac{1}{36}})$
2	$(1, 1, 1, e^{2\pi i\frac{1}{18}}, e^{2\pi i\frac{17}{18}})$
3	$(1, 1, 1, e^{2\pi i\frac{1}{9}}, e^{2\pi i\frac{8}{9}})$
4	$(1, 1, 1, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{5}{6}})$
5	$(1, 1, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, 1, e^{2\pi i\frac{5}{6}})$
6	$(1, 1, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{1}{18}}, e^{2\pi i\frac{7}{9}})$
7	$(1, 1, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{2}{3}})$
8	$(1, 1, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{2}{9}}, e^{2\pi i\frac{11}{18}})$
9	$(1, e^{2\pi i\frac{1}{4}}, 1, 1, e^{2\pi i\frac{3}{4}})$
10	$(1, e^{2\pi i\frac{1}{4}}, 1, e^{2\pi i\frac{1}{18}}, e^{2\pi i\frac{25}{36}})$
11	$(1, e^{2\pi i\frac{1}{4}}, 1, e^{2\pi i\frac{1}{9}}, e^{2\pi i\frac{23}{36}})$
12	$(1, e^{2\pi i\frac{1}{4}}, 1, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{7}{12}})$
13	$(1, e^{2\pi i\frac{1}{4}}, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, 1, e^{2\pi i\frac{7}{12}})$
14	$(1, e^{2\pi i\frac{1}{4}}, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{1}{18}}, e^{2\pi i\frac{19}{36}})$
15	$(1, e^{2\pi i\frac{1}{4}}, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{5}{12}})$
16	$(1, e^{2\pi i\frac{1}{4}}, e^{2\pi i\frac{1}{6}}, e^{2\pi i\frac{2}{9}}, e^{2\pi i\frac{13}{36}})$

Например, множество R_{15} состоит из 29-ти элементов

$$\begin{gathered}
(0,0,0,3,30),\quad (0,0,0,6,24),\ (0,0,0,9,18),\\
(0,0,0,12,12),\ (0,0,0,15,6),\ (0,0,1,1,28)\\
(0,0,1,4,22),\quad (0,0,1,7,16),\ \ (0,0,1,10,10),\\
(0,0,2,2,20),\quad (0,0,2,5,14),\ \ (0,0,2,8,8),\\
(0,0,2,11,2),\quad (0,0,3,0,18),\ \ (0,0,3,3,12),\\
(0,0,3,6,6),\quad (0,0,3,9,0),\quad (0,0,4,1,10),\\
(0,0,4,4,4),\quad (0,2,0,0,18),\ \ (0,2,0,3,12),\\
(0,2,0,6,6),\quad (0,2,0,9,0),\quad (0,2,1,1,10),\\
(0,2,1,4,4),\quad (0,2,2,2,2),\quad (0,2,3,0,0),\\
(0,0,1,13,4),\quad (1,1,1,1,1).
\end{gathered} \tag{29}$$

Затем находим все возможные типы пересечений множеств R_i. Они перечилены в колонке R_{16+i} табл. 2.

Следующим шагом мы находим для каждого множества деформаций R_i с помощью условия (22) все элементы максимальной допустимой группы, которые инвариантно действуют на любую деформацию, заданную с помощью элемента из R_i. Множество всех таких элементов группы для каждого подмножества деформаций R_i образует подгруппу $G^i_{\text{adm}} \subseteq G^{\max}_{\text{adm}}$, задающую орбифолд для R_i. Мощности множеств R_i и порядки групп G^i_{adm} указаны в табл. 2.

Заметим, что так как в моделях типа Ферма $A = A^T$, то множество всех зеркальных деформаций совпадает с множеством допустимых исходных деформаций. Также и множество орбифолдов для зеркала совпадает с множеством орбифолдов для исходной модели.

С помощью условия (23) находим подмножества зеркальных деформаций L_i. Далее, действуя аналогично шагам вычисления групп G^i_{adm}, находим все группы $G^{T,i}_{\text{adm}}$, $i \in \overline{1,16}$. Мощности множеств L_i и порядки групп $G^{T,i}_{\text{adm}}$ указаны в табл. 2. Например, множество L_{15} состоит из 34-х элементов

$$
\begin{array}{lll}
(1,1,1,1,1) & & \\
(0,0,0,2,32) & (0,0,0,4,28), & (0,0,0,6,24) \\
(0,0,0,8,20), & (0,0,0,10,16), & (0,0,0,12,12) \\
(0,0,0,14,8), & (0,0,0,16,4), & (0,0,2,0,24) \\
(0,0,2,2,20), & (0,0,2,4,16), & (0,0,2,6,12) \\
(0,0,2,8,8), & (0,0,2,10,4), & (0,0,2,12,0) \\
(0,0,4,0,12), & (0,0,4,2,8), & (0,0,4,4,4) \\
(0,0,4,6,0), & (0,1,1,1,19), & (0,1,1,3,15) \\
(0,1,1,5,11), & (0,1,1,7,7), & (0,1,1,9,3) \\
(0,1,3,1,7), & (0,1,3,3,3), & (0,2,0,0,18) \\
(0,2,0,2,14), & (0,2,0,4,10), & (0,2,0,6,6) \\
(0,2,0,8,2), & (0,2,2,0,6), & (0,2,2,2,2),
\end{array} \tag{30}
$$

а соответствующая группа, задающая орбифолд, имеет порядок $|G^{T,15}_{\text{adm}}| = 144$.

Сравнивая множества зеркальных деформаций L_i и множества типов пересечений, видим, что для множеств выполнено $L_i = R_{16+i}$, тогда группа, задающая орбифолд R_{16+i}, совпадает с группой для множества зеркальных деформаций L_i, найденной ранее. Из этого следует, что полный набор зеркальных пар для рассматриваемой модели состоит из

$$(R_i, L_i) \quad \text{и} \quad (L_i, R_i), \quad i \in \overline{1,16}. \tag{31}$$

Порядки групп для всех орбифолдов перечислены в табл. 2.

Заметим, что для рассматриваемого примера существует еще один способ получить тот же набор 32 зеркальных пар. А именно, нужно для каждого

Таблица 2. Мощности множеств деформаций R_i и их зеркал L_i, а также порядки соответствующих групп G^i_{adm} и $G^{T,i}_{\text{adm}}$, задающие орбифолды

i	$\lvert R_i\rvert$	$\lvert G^i_{\text{adm}}\rvert$	R_{16+i}	$\lvert L_i\rvert$	$\lvert G^{T,i}_{\text{adm}}\rvert$
1	125	36	$R_2 \cap R_5 \cap R_9$	9	864
2	22	216	$R_8 \cap R_{12}$	51	144
3	43	108	$R_4 \cap R_6 \cap R_9$	27	288
4	64	72	$R_5 \cap R_{10}$	17	432
5	23	216	$R_4 \cap R_{14}$	45	144
6	62	72	$R_6 \cap R_{11}$	15	432
7	22	216	$R_6 \cap R_9$	43	144
8	67	72	$R_2 \cap R_{13}$	15	432
9	64	72	$R_6 \cap R_{10}$	13	432
10	25	216	$R_4 \cap R_9$	39	144
11	22	216	$R_6 \cap R_{12}$	39	144
12	75	72	$R_2 \cap R_9$	13	432
13	22	216	$R_8 \cap R_9$	36	144
14	85	72	$R_2 \cap R_5$	12	432
15	29	216	$R_4 \cap R_6$	34	144
16	66	72	$R_5 \cap R_9$	12	432

элемента группы и зеркальной группы найти множества деформаций и зеркальных деформаций, на которые они действуют инвариантно, и оставить из них только различные множества. Таких окажется в данном случае по 16 с каждой стороны. Затем для каждого из полученных множеств надо найти допустимую подгруппу симметрии, которая задает этот орбифолд. После чего, для каждого из полученных орбифолдов с помощью условия (23) надо найти зеркальный орбифолд. Оказывается, что построенные таким образом 32 зеркальные пары совпадают с зеркальными парами, полученными с помощью шагов 4–6 из главы 2. Интересно понять, верен ли этот факт в общем случае.

Найдем теперь число поколений и число синглетов для теорий, компактифицированных на найденные нами орбифолды Калаби–Яу. Для синглетов первого типа нужно найти число деформаций и зеркальных деформаций, которые удовлетворяют условию синглета, т.е. спаривание которых равно нулю. Число синглетов второго и третьего типов могут быть найдены из (32) и (33) соответственно, как число точек в соответствующих многогранниках Батырева. Для орбифолдов Калаби–Яу типа Ферма они находятся из соотношений

$$N_{\text{singlets}} = |R_i|, \tag{32}$$

$$N_{\text{singlets}} = |L_i|. \tag{33}$$

Число поколений находится из (25). Результаты для чисел поколений N_{gen} и синглетов N_{singlets} для орбифолдов нашего примера собраны в табл. 3.

Таблица 3. Число поколений N_{gen} и синглетов N_{singlets}. Номер позиции числа в векторе колонки N_{singlets} соответствует типу синглета

i	N_{gen}	N_{singlets}	i	N_{gen}	N_{singlets}
1	116	$(6, 125, 9)$	9	51	$(8, 64, 13)$
2	29	$(19, 22, 51)$	10	14	$(6, 25, 39)$
3	16	$(15, 43, 27)$	11	17	$(4, 22, 39)$
4	47	$(11, 64, 17)$	12	62	$(2, 75, 13)$
5	22	$(11, 23, 45)$	13	14	$(12, 22, 36)$
6	47	$(6, 62, 15)$	14	73	$(6, 85, 12)$
7	21	$(9, 22, 43)$	15	5	$(13, 29, 34)$
8	52	$(19, 67, 15)$	16	54	$(4, 66, 12)$

А. Белавин благодарен Д. Гепнеру, М. Джибладзе, Г. Кошевому и А. Литвинову за полезные обсуждения.

Финансирование работы. Работа С. Алешина выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России для Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института проблем передачи информации имени А. А. Харкевича Российской академии наук FFNU 2025-0036. Работа А. Белавина выполнена в рамках государственного задания FFWR-2024-0012.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. D. J. Gross, J. A. Harvey, E. J. Martinec, and R. Rohm, “The Heterotic String”, Phys. Rev. Lett. **54**, 502 (1985).
2. P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger, and E. Witten, “Vacuum configurations for superstrings”, Nucl. Phys. B **258**, 46 (1985).
3. D. Gepner, “Exactly Solvable String Compactifications on Manifolds of SU(N) Holonomy”, Phys. Lett. B **199**, 380 (1987).
4. D. Gepner, “Space-Time Supersymmetry in Compactified String Theory and Superconformal Models”, Nucl. Phys. B **296**, 757 (1988).
5. A. Belavin, “Free field construction of heterotic string compactified on Calabi–Yau manifolds of Berglund–Hubsch type in the Batyrev–Borisov combinatorial approach”, Nucl. Phys. B **1018**, 117055 (2025).
6. L. A. Borisov, “Berglund-Hubsch mirror symmetry via vertex algebras”, Commun. Math. Phys. **320**, 73 (2013).
7. M. Kreuzer and H. Skarke, “On the classi cationof quasihomogeneous functions”, Commun. Math. Phys. **150**, 137 (1992).
8. M. Kreuzer, “The Mirror map for invertible LG models”, Phys. Lett. B **328**, 312 (1994).