Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 2, с. 140 – 148 © 2026 г. 25 января

Диэлектрическая проницаемость антиферромагнитных мультиферроиков с циклоидальным порядком спинов при магнитоэлектрическом эффекте, связанным с коллинеарной составляющей спинов

П. Андреев[1)]

Кафедра общей физики, физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 17 сентября 2025 г.
После переработки 1 декабря 2025 г.
Принята к публикации 1 декабря 2025 г.

Рассмотрен вклад магнитоэлектрического эффекта в уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта в случае когда поляризация среды вызвана параллельной составляющей соседних спинов. Результат представлен для ферромагнитных и антиферромагнитных материалов. Дано сравнение с вкладом магнитоэлектрического эффекта в уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта, когда поляризация среды вызвана перпендикулярной составляющей спинов. Выведена дисперсионная зависимость спиновых волн в антиферромагнетиках с циклоидальным равновесным порядком спинов. Аналитически получена диэлектрическая проницаемость антиферромагнитных мультиферроиков в случае, когда магнетоэлектрический эффект обусловлен коллинеарной составляющей спинов.

DOI: 10.7868/S3034576626010192

I. Введение. Коллективные возбуждения являются фундаментальными явлениями в физике твердого тела и других сплошных средах. Большинство коллективных возбуждений или соответствующих им квазичастиц рассматриваются на фоне однородного равновесного состояния. В мультиферроиках, в средах, проявляющих взаимовлияние магнитных, диэлектрических, упругих и других свойств, возникают условия для формирования периодических равновесных структур намагниченности. Спиновые волны в таких системах малоизученны (см. [1], где частично рассмотрен этот вопрос). Поэтому в данной работе аналитически рассмотрена дисперсионная зависимость спиновых волн в антиферромагнитных мультиферроиках с циклоидальным порядком спинов.

Исследование диэлектрического отклика антиферромагнитных мультиферроиков второго рода, т.е. сред, в которых возникновение или изменение электрического дипольного момента обусловлено спиновыми эффектами, привело к экспериментальному открытию новых коллективных возбуждений, называемых электромагнонами [2]. Поэтому наряду с дисперсионной зависимостью спиновых волн в периодических равновесных структурах важно получить связь динамической поляризации среды с возмущениями электрического поля. Существует несколько механизмов формирования поляризации среды спиновыми эффектами [3]. В данной работе рассмотрен один из известных механизмов, обусловленный коллинеарной составляющей спинов. Соответствующий электрический дипольный момент группы магнитных и немагнитных ионов представлен в обзоре [3] (см. рис. 2), а макроскопическая поляризация представлена, к примеру, в обзоре [4] (см. уравнения (3), (9) и (10)). В литературе известна спин-токовая модель формирования электрического дипольного момента мультиферроика для систем с неколлинеарными спинами (см. [5] или обзор [3], также рис. 2). Позднее, в работах [6] и [7], было предложено обобщение спин токовой модели. Во-первых, был установлен коэффициент пропорциональности между поляризацией среды и спиновым током. Во-вторых, было показано, что спин-токовая модель приводит к формированию электрического дипольного момента мультиферроика для систем с коллинеарными спинами. Выведено, что электрический дипольный момент мультиферроика с коллинеарными спинами обусловлен взаимодействием Дзялошинского–Мория. Выведено обобщение формулы для макроскопической поляризации [7], известное из обсуждения в работе [4], а именно получено дополнительное слагаемое, связанное с пространственной неоднородностью поляризации. Это обобщение рассмотрено как для ферромаг-

1) e-mail: andreevpa@my.msu.ru

нетиков, так и для антиферромагнетиков [7]. Как показано ниже, именно это дополнительное слагаемое приводит к ненулевому моменту силы в уравнении Ландау–Лифшица и использовано в данной работе для вычисления диэлектрической проницаемости.

Примеры вычисления фазовых диаграмм антиферромагнетиков можно найти в работе [8]. Там показана возможность существования равновесных структур более сложного вида, в сравнении с рассмотренными нами ниже. Однако, там изучены их равновесные свойства, а возмущения равновесия рассмотрены только для фаз с коллинеарным порядком, что, тем не менее, позволяет обнаружить условия неустойчивости и оценить границы этих фаз.

Отметим, что в работах [9] (дисперсионная зависимость спиновых и электромагнитных волн на фоне ферромагнитной спиральной структуры), [10] (дополнительно учтены акустические волны, включая акустический эффект Фарадея) уже рассматривались спиновые волны на фоне спиральных магнитных равновесных структур. Однако, там не учитывался магнитоэлектрический эффект и рассмотрена одна из двух использованных ниже форм взаимодействия Дзялошинского–Мория.

Особым аспектом динамики намагниченности в мультиферроиках являются электромагноны [2, 11]. Примером наблюдения электромагнонов в циклоидальной магнитной фазе является $TbMnO_3$ [12]. Однако этот тип возмущений не затрагивается в представленных ниже результатах.

II. Спин-токовая модель в системе коллинеарных спинов. Спин-токовая модель предложена в работе [5] для случая, когда поляризация возникает в системе неколлинеарных спинов. Ее обобщение на режим, когда поляризация формируется за счет параллельной составляющей спинов, выполнено в работах [6] и [7]. Рассмотрим эти результаты с целью дальнейшего развития этого подхода.

A. Магнитоэлектрический эффект для ферромагнетика. Известно, что в системе параллельных спинов или при наличии их параллельной составляющей в мультиферроиках возникает электрический дипольный момент (см., к примеру, обзорную работу [3], рис. 2):

$$\hat{\mathbf{d}}_{ij} = \mathbf{\Pi}_{ij}(\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j), \tag{1}$$

где вводится векторная константа $\mathbf{\Pi}_{ij}$. Как и в работе [3], мы предполагаем, что константа $\mathbf{\Pi}_{ij}$ является функцией расстояния между спинами.

Отметим, что в контексте другого механизма формирования электрической поляризации, связанной с перпендикулярными составляющими спинов, существует спин токовая модель [13] (она также обсуждается в обзоре [3], см. также рис. 2 и уравнение (14)). Формально эта модель сводиться к тому, что поляризация среды P^μ пропорциональна тензору спинового тока $P^\mu \sim \varepsilon^{\mu\alpha\beta} J^{\alpha\beta}$, где $J^{\alpha\beta}$ – тензор спинового тока, первый индекс относиться к спину, второй индекс относиться к импульсу, и $\varepsilon^{\mu\alpha\beta}$ – абсолютно антисимметричный единичный тензор третьего ранга (символ Леви–Чивита), по повторяющемуся греческому индексу подразумевается суммирование.

В работах [6, 7] проанализирована природа спин токовой модели. Авторы показали, что баланс сил электрического диполь-дипольного взаимодействия и спин-орбитального взаимодействия (силы, действующей на движущийся магнитный ион (его магнитный момент) в электрическом поле окружающих ионов), существующий как в равновесном состоянии, так и при наличии возмущений, приводит к электрической поляризации среды в виде

$$P^\mu = \frac{\gamma}{c} \varepsilon^{\mu\alpha\beta} J^{\alpha\beta}, \tag{2}$$

где γ – это гиромагнитное отношение, c – скорость света в вакууме. В работах [6, 7] установлен вид коэффициента пропорциональности в спин токовой модели.

Спин-токовая модель (2) не подразумевает конкретного вида спинового тока. Таким образом, спиновые токи разной природы могут приводить к формированию поляризации среды. Использование эффективного спинового тока, обусловленного обменным взаимодействием Гейзенберга (спинового тока магнонов, не сопровождающегося перемещением ионов), приводит к поляризации, обусловленной неколлинеарными спинами [3] (см. уравнения (15)–(18)), [13]. Авторы [13] рассматривают спиновый ток, ассоциированный с отдельными ионами, и получают электрический дипольный момент, ассоциированный с парой соседних магнитных ионов. Авторы [6, 7] рассматривают макроскопическую модель, получают поляризацию среды, которая известна по работам [14, 15], и устанавливают электрический дипольный момент, приводящий к полученному макроскопическому выражению.

Более детально проговорим условие баланса сил в уравнении баланса импульса, которое требует компенсации силы, вызванной спин-орбитальным взаимодействием (взаимовлиянием зарядов ионов и спиновых токов различной природы) при произвольной неоднородности локального электрического поля системы зарядов ионов. В частности, действие локальных спиновых токов на заряды может приводить к смещению этих зарядов и формированию электрических дипольных моментов. Это дает дополнительную силу, которая может, требуемым образом, компенсировать силу спин-орбитального взаимодействия. Таким образом, формируемый в системе дипольный момент самосогласованным образом компенсирует силу, его вызывающую. Это приводит к формированию равновесного состояния с ненулевым электрическим дипольным моментом. Это происходит даже в отсутствии внешнего электрического поля, способного деформировать решетку и вызывать дополнительный дипольный момент, который только косвенно связан со спинами среды (к примеру, через деформацию, приводящую к изменению обменных интегралов и, таким образом, к изменению моментов сил обменного взаимодействия). Условием баланса является уравнение (2), выражающее спинтоковую модель формирования поляризации среды.

Однако рассмотрение эффективного спинового тока, обусловленного взаимодействием Дзялошинского–Мория, приводит к поляризации, обусловленной коллинеарными спинами [6, 7]. Отметим, что взаимодействие Дзялошинского–Мория $\hat{H} = (-1/2)\sum_{i,j,j\neq i}\mathbf{D}_{ij}\cdot[\hat{\mathbf{S}}_i\times\hat{\mathbf{S}}_j]$ может быть обусловлено двумя механизмами и поэтому константа Дзялошинского состоит из двух слагаемых [1] (см. уравнение (14)), [16] (см. текст после уравнения (2)):

$$\mathbf{D}_{ij} = \gamma(r_{ij})\mathbf{r}_{ij} + \beta(r_{ij})[\mathbf{r}_{ij}\times\boldsymbol{\delta}], \tag{3}$$

где $\gamma(r_{ij})$ и $\beta(r_{ij})$ – изотропные функции расстояния между ионами, $\boldsymbol{\delta}$ – это вектор смещения немагнитного иона лиганда (чаще всего это ион кислорода) относительно линии расположения двух соседних магнитных ионов. В работах [6] и [7] рассмотрена вторая часть константы Дзялошинского, связанная с ионом лиганда. Первая часть приводит к симметричному спиновому току и не индуцирует поляризацию среды. Итого, возникает поляризация среды вида [6] (см. уравнение (13), момент силы и соответствующий спиновый ток представлены уравнениями (9) и (10)), [7] (см. уравнение (17), момент силы и соответствующий спиновый ток представлены уравнениями (36), (44) и (39), (45)):

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \boldsymbol{\delta}[c_0(\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}) + c_2(\mathbf{S}\cdot\triangle\mathbf{S})], \tag{4}$$

которая, в частности, пропорциональна вектору смещения немагнитного иона лиганда $\boldsymbol{\delta}$, входящего в константу Дзялошинского. Уравнение (4) является частным примером формального разложения 1 в [17]. Здесь возникают две константы c_0 и c_2. Приведем связь констант c_0 и c_2 с векторным коэффициентом в дипольном моменте (1) и коэффициентом β, входящим в константу Дзялошинского (3). Константы c_0 и c_2 возникают как интегралы от функции $\mathbf{\Pi}_{ij}$: $c_0\boldsymbol{\delta} = \int\mathbf{\Pi}_{ij}(r_{ij})d^3r_{ij}$ и $c_2\boldsymbol{\delta} = (1/6)\int r_{ij}^2\mathbf{\Pi}_{ij}(r_{ij})d^3r_{ij}$ и могут быть рассмотрены как моменты функции $\beta(r)$, определяющей вид константы $\mathbf{D}_{ij} = \beta(r_{ij})[\mathbf{r}_{ij}\times\boldsymbol{\delta}]$ (см. уравнение (17) в [7]). Представим связь функции $\mathbf{\Pi}_{ij}(r_{ij})$ из [3] (см. рис. 2) и функции $\beta(r)$, входящей в структуру константы $\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial r} = \frac{\gamma}{c}r\beta(r)\boldsymbol{\delta}$, или упрощенной формы, которая справедлива для нулевого порядка $\mathbf{\Pi} = -\frac{\gamma}{3c}r^2\beta(r)\boldsymbol{\delta}$. Отметим, что первое слагаемое, пропорциональное c_0, которое в форме свободной энергии можно найти в обзоре [4] (см. уравнение (9) при $\gamma = 1$), не дает вклада в момент силы. Только второе слагаемое дает вклад магнитоэлектрического эффекта в уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта.

B. Магнитоэлектрический эффект для антиферромагнетика. При рассмотрении антиферромагнетика из двух сортов атомов/ионов A и B мы выбираем их чередующееся расположение $ABAB$ и так же, как и для ферромагнетиков, используем формулу (1) для электрического дипольного момента, связанного с парой соседних спинов, которые, естественно, относятся к разным сортам частиц.

Уравнение баланса импульса (аналог уравнения Навье–Стокса), из которого возникает соотношение между поляризацией среды и спиновым током (2), выводится для каждого сорта атомов отдельно. В итоге возникают выражения для парциальных поляризаций $\mathbf{P}_A$ и $\mathbf{P}_B$ (см. уравнения (22) и (23) в [7]). Полная поляризация определяет динамику системы через плотность энергии $\mathcal{E} = -((\mathbf{P}_A+\mathbf{P}_B)\cdot\mathbf{E}) = -(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E})$ аддитивным образом относительно парциальных поляризаций. Приведем ее, следуя работе [7] (см. уравнение (24)):

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\delta}[2c_{0,AB}(\mathbf{S}_A\cdot\mathbf{S}_B) + c_{2,AB}(S_A^\nu\triangle S_B^\nu + S_B^\nu\triangle S_A^\nu)]. \tag{5}$$

Вообще говоря, вектор смещения лиганда связан с позициями пар магнитных ионов в кристалле, его тоже можно обозначать индексами ij. Для других пар ионов нужно рассматривать свой вектор смещения, вообще говоря, не совпадающий по величине или направлению с первым. Пример можно найти в работе [18].

III. Модель: уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта. *Рассмотрим вклад поляризации в момент силы для ферромагнетика.* Полученное выше выражение для поляризации (4) может быть использовано для построения соответствующей плотности энергии $\mathcal{E} = -(\mathbf{P}\cdot\mathbf{E})$ и дальнейшего получения вклада магнетоэлектрического эффекта в уравнение эволюции плотности спина $\partial_t \mathbf{S} \mid_{\mathbf{E}} = \gamma[\mathbf{S}\times\mathbf{H}_{\text{ eff}}]$ через вычисление вариационной производной

$$\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\mathbf{S}} = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mathbf{S}} - \partial_\beta\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial(\partial_\beta\mathbf{S})} + \triangle\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial(\triangle\mathbf{S})}\right) \tag{6}$$

вплоть до производной по лапласиану плотности спина $\triangle\mathbf{S}$, так как плотность энергии содержит $\triangle\mathbf{S}$ через поляризацию среды (4).

Для удобного анализа антиферромагнитного случая представим уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта для ферромагнетика

$$\partial_t\mathbf{S} = A[\mathbf{S}\times\triangle\mathbf{S}] + \kappa[\mathbf{S}\times S_z\mathbf{e}_z] + \frac{1}{3}g_{(\gamma)}[\mathbf{S}\times curl\mathbf{S}] + \\ + \frac{1}{3}g_{(\beta)}\left((\mathbf{S}\cdot[\boldsymbol{\delta}\times\nabla])\mathbf{S} - \frac{1}{2}[\boldsymbol{\delta}\times\nabla]S^2\right) + 2c_2\left((\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\times \right. \\ \left. \times[\mathbf{S}\times\triangle\mathbf{S}] + (\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))[\mathbf{S}\times\partial^\nu\mathbf{S}]\right) + a[\mathbf{S}\times\partial_t\mathbf{S}], \tag{7}$$

которое, соответственно, содержит изотропное обменное слагаемое (пропорционально константе A), вклад энергии анизотропии, обусловленный недиагональностью Гамильтониана Гейзенберга (т.е. использованием X, Y, Z модели на микроскопическом уровне, пропорционален константе κ), взаимодействие Дзялошинского–Мория (состоящее из двух частей соответствующих двум частям константы Дзялошинского, которые пропорциональны константам $g_{(\gamma)}$ и $g_{(\beta)}$), вклад магнетоэлектрического эффекта (пропорционален константе c_2), и учет затухания в форме, предложенной Гильбертом (пропорционально константе a). Предпоследнее слагаемое содержит скалярное произведение операторов градиента ∂^ν, которые действуют на векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{S}$, входящие в разные векторные структуры внутри одного слагаемого, поэтому использованы тензорные обозначения в векторной формуле.

Первое слагаемое в правой части уравнения (7) описывает обменное взаимодействие, заданное на микроскопическом уровне Гамильтонианом Гейзенберга. Его коэффициент A представляет собой интеграл от обменного интеграла $U_0(r)$, рассматриваемого как функция относительного расстояния взаимодействующих магнитных ионов $A = \int r^2 U_0(r) d^3r/6$. Второе слагаемое описывает вклад энергии анизотропии одноосного кристалла, с осью анизотропии, направленной параллельно оси z. Его коэффициент κ связан с дополнительным вкладом к Гамильтониану Гейзенберга в X, Y, Z модели в одноосном режиме $H = U_0\mathbf{S}_1\cdot\mathbf{S}_2 + \tilde{\kappa}S_1^z S_2^z$, где $\tilde{\kappa}(r) \equiv U_{zz}(r) - U_0(r)$, причем $\kappa = \int\tilde{\kappa}(r)d^3r$. Слагаемые, описывающие взаимодействие Дзялошинского–Мория, содержат коэффициенты $g_{(\gamma)} = \int r^2\gamma(r)d^3r$ и $g_{(\beta)} = \int r^2\beta(r)d^3r$, содержащие функции из константы Дзялошинского (3), греческие буквы в скобках указывают на функцию в подынтегральном выражении. Последнее слагаемое описывает затухание Гильберта коэффициентом $a < 0$. Слагаемые, пропорциональные c_2, описывают магнитоэлектрический эффект, рассмотренный выше, и коэффициент c_2 описан после уравнения (4).

Для сравнения представим поляризацию среды, обусловленную системой неколлинеарных спинов (их перпендикулярными составляющими) [14, 15, 17]

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \sigma[\mathbf{S}(\nabla\cdot\mathbf{S}) - (\mathbf{S}\cdot\nabla)\mathbf{S}], \tag{8}$$

и соответствующий момент сил, дающий магнетоэлектрический эффект для систем неколлинеарных спинов [19, 20]

$$\mathbf{T} = -\sigma\Big[[\mathbf{E}\times\nabla]S^2 - 2(\mathbf{S}\cdot[\mathbf{E}\times\nabla])\mathbf{S} - \\ - S^2(\nabla\times\mathbf{E}) + \mathbf{S}(\mathbf{S}\cdot[\nabla\times\mathbf{E}])\Big]. \tag{9}$$

Коэффициент σ может быть представлен через обменный интеграл (см. [7]) или через разность энергий и гибридизацию между p-орбиталью и d-орбиталью (см. уравнение (20) [3]). Сравнение уравнений (7) и (9) показывает особенности проявления магнитоэлектрического эффекта в системах с коллинеарными и неколлинеарными спинами.

Рассмотрим модель антиферромагнетика. Макроскопические уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта для двухкомпонентного антиферромагнетика записываются для векторов $\mathbf{L} = \mathbf{S}_A - \mathbf{S}_B$ и $\mathbf{M} = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B$. Для $\mathbf{L}$ уравнение имеет следующий вид:

$$\partial_t L^\alpha = -g_{0u}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}L^\beta M^\gamma + \kappa\varepsilon^{\alpha\beta z}M^\beta L^z + \\ + A\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}M^\beta\triangle L^\gamma + \frac{1}{3}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\gamma\mu\nu}\Big[M^\beta\hat{g}L^\nu\Big] + \\ + 2c_0\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}M^\beta(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})L^\gamma + 2c_2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}M^\beta\times \\ \times[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle L^\gamma + (\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu L^\gamma] + a\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}M^\beta\partial_t L^\gamma, \tag{10}$$

где первое слагаемое описывает обменное взаимодействие, заданное на микроскопическом уровне Гамильтонианом Гейзенберга. Его коэффициент представляет собой интеграл от обменного интеграла $g_{0u,AB} = -g_{0u,AA} = -g_{0u} \equiv -\int U_0(r)d^3r$. Смысл остальных слагаемых такой же, как и в уравнении (7). Взаимодействие Дзялошинского–Мория записано в компактной форме, используя оператор

$\hat{g} = g_{(\gamma)}\partial^\mu + g_{(\beta)}\varepsilon^{\mu\sigma\lambda}\delta^\lambda\partial^\sigma$. Также использовано приближение $c_{2,AB} = -c_{2,AA} = -c_{2,BB} \equiv -c_2$, $A \equiv \equiv g_{2u}/6$. В этой работе параметр смещения $\boldsymbol{\delta}$ берется одним и тем же, как для внутриподрешеточного, так и межподрешеточного взаимодействий. Их отличия можно учесть, но это приведет к усложнению модели, а на данном этапе важно обозначить основные следствия магнитоэлектрического эффекта. По сравнению с уравнением для ферромагнетика, уравнение (10) содержит пространственно однородный вклад обменного взаимодействия, представленный первым слагаемым, пропорциональный g_{0u} (см. [21], уравнение (74.8)). Сравнивая с константой пространственно неоднородного обменного взаимодействия A или константой анизотропии κ, можно написать $g_{0u} = = \int U_0(r)d^3r$. Приведем второе уравнение системы

$$\partial_t M^\alpha = \kappa\varepsilon^{\alpha\beta z}L^\beta L^z + A\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}L^\beta\triangle L^\gamma + \\ + \frac{1}{3}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\gamma\mu\nu}\left[L^\beta\hat{g}L^\nu\right] + 2c_2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}L^\beta \times \\ \times[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle L^\gamma + (\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu L^\gamma] + a\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}L^\beta\partial_t L^\gamma. \quad (11)$$

Смысл слагаемых такой же, как и в уравнении (7). При выводе вклада магнитоэлектрического эффекта в уравнения (10) и (11) было использовано выражение для поляризации (5) и процедура варьирования плотности энергии (6). Более подробно этот вывод обсуждается в Приложении А.

IV. Спиновые волны в циклоидальных антиферромагнетиках.

А. Случай коллинеарных спинов. Для более четкой интерпретации дисперсионной зависимости спиновых волн, распространяющихся в структурах с периодическим порядком, приведем вклад магнитоэлектрического эффекта и сравним вклады двух видов взаимодействия Дзялошинского–Мория в случае, когда равновесные спины коллинеарные.

Рассмотрим режим "легкая ось". Ось анизотропии параллельна оси z. Запишем равновесное состояние в виде $\mathbf{L}_0 = L_0\mathbf{e}_z$, $\mathbf{M}_0 = 0$, $L_0 = \text{const}$. Для возмущений малой амплитуды $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \delta\mathbf{L}$, $\mathbf{M}1 = 0 + \delta\mathbf{M}$, распространяющихся вдоль оси x (т.е. перпендикулярно оси анизотропии), $\delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_a e^{-\imath\omega t+\imath kx}$, $\delta\mathbf{M} = \mathbf{M}_a e^{-\imath\omega t+\imath kx}$, получим, что связанные колебания $\delta L_x \neq 0$ и $\delta L_y \neq 0$, в отсутствии взаимодействия Дзялошинского–Мория и магнитоэлектрического эффекта, дают одну ветвь волновых возмущений $\omega^2 = (\kappa + g_{0u})L_0^2(\kappa + Ak^2)$ ($\kappa > 0$, $g_{0u} > 0$, $A > 0$, см. [21], уравнения (74.13) и (74.15)). Тогда как взаимодействие Дзялошинского–Мория снимает вырождение $\omega^2 = (\kappa + g_{0u})L_0^2[\kappa + Ak^2 \pm (g_{(\beta)}\delta/3)k_x]$ и приводит к двум ветвям спектра, для каждой из которых имеется линейный вклад проекции волнового вектора k_x. Переменный знак слагаемого $\pm(g_{(\beta)}\delta/3)k_x$, может компенсироваться переменным знаком проекции волнового вектора k_x. Однако при фиксированном направлении распространения проявляется различие фазовых и групповых скоростей двух волн. В этом режиме возмущения $\delta L_z = 0$ отсутствуют.

Простейший вид спектра антиферромагнетика, полученный для типа материала "легкая ось" $\omega^2 = = (\kappa + g_{0u})L_0^2(\kappa + Ak^2) \approx (\kappa + g_{0u})L_0^2 Ak^2$ можно приближенно сравнить с ферромагнетиком типа "легкая плоскость", так как имеет безщелевой спектр (при рассмотрении минимальной модели, включающей энергию анизотропии и обменное взаимодействие): $\omega_F^2 = AS_0^2k^2[\mid \kappa \mid + Ak^2] \approx \mid \kappa \mid AS_0^2k^2$ при замене $\kappa + g_{0u} \to \mid \kappa \mid$.

При учете магнитоэлектрического эффекта рассмотрим возмущения малой амплитуды $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + + \delta\mathbf{L}$, $\mathbf{M} = 0 + \delta\mathbf{M}$, распространяющихся в произвольном направлении $\mathbf{k}$ $\delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_a e^{-\imath\omega t+\imath\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, $\delta\mathbf{M} = = \mathbf{M}_a e^{-\imath\omega t+\imath\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. И получим дисперсионную зависимость

$$\omega^2 = (\kappa + g_{0u} + 2c_0(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E}_0))L_0^2\Big[\kappa + (A + 2c_2(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E}_0))k^2 \\ \pm\frac{1}{3}(g_{(\gamma)}k_z + g_{(\beta)}(\delta_x k_y - \delta_y k_x)) + \imath\omega a\Big], \quad (12)$$

$a < 0$. Здесь видна роль магнитоэлектрического эффекта как механизма управления обменным интегралом путем изменения постоянного электрического поля. Возмущения электрического поля здесь не рассматриваются.

Рассмотрим режим "легкая плоскость". Ось анизотропии параллельна оси z. Запишем равновесное состояние в виде $\mathbf{L}_0 = L_0\mathbf{e}_x$, $\mathbf{M}_0 = 0$, $L_0 = \text{const}$. Для возмущений малой амплитуды $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \delta\mathbf{L}$, $\mathbf{M} = = 0 + \delta\mathbf{M}$, без учета взаимодействия Дзялошинского–Мория и магнитоэлектрического эффекта, получим $\delta L_x = 0$, возмущения $\delta L_y \neq 0$ дают дисперсионную зависимость вида $\omega^2 = g_{0u}AL_0^2k^2$, возмущения $\delta L_z \neq 0$ дают дисперсионную зависимость вида $\omega^2 = = g_{0u}L_0^2[\mid \kappa \mid + Ak^2]$ ($\kappa < 0$, $g_{0u} > 0$, $A > 0$). Отметим, также, что ферромагнетик типа "легкая плоскость" имеет безщелевой спектр (при рассмотрении минимальной модели, включающей энергию анизотропии и обменное взаимодействие, а также длинноволновой предел): $\omega_F^2 = AS_0^2k^2[\mid \kappa \mid + Ak^2] \approx \mid \kappa \mid AS_0^2k^2$, подобный возмущениям $\delta L_y \neq 0$ при замене $g_{0u} \to \mid \kappa \mid$ и $L_0 \to S_0$. Однако возмущения $\delta L_z \neq 0$ имеют сходство с ферромагнетиком типа "легкая ось", где также существует щель в спектре, хотя форма спектра отличается $\omega_F = S_0[\kappa + Ak^2]$ ($\kappa > 0$).

При учете магнитоэлектрического эффекта и взаимодействия Дзялошинского–Мория рассмотрим возмущение малой амплитуды $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \delta\mathbf{L}$, $\mathbf{M} = 0 + \delta\mathbf{M}$, распространяющихся в произвольном направлении $\mathbf{k}$, получим, что взаимодействие Дзялошинского–Мория приводит к гибридизации спектров, описанных выше

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \omega_1^2(\mathbf{k}) & -\frac{\imath}{3} g_D g_{0u} L_0^2 \\ \frac{\imath}{3} g_D g_{0u} L_0^2 & \omega^2 - \omega_2^2(\mathbf{k}) \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

где $g_D = g_{(\gamma)} k_x + g_{(\beta)}(\delta_y k_z - \delta_z k_y)$, $\omega_1^2(\mathbf{k}) = (g_{0u} + 2c_0 \times \times (\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{E}_0)) L_0^2 (A + 2c_2(\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{E}_0)) k^2$, $\omega_2^2(\mathbf{k}) = (g_{0u} + 2c_0 \times \times (\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{E}_0)) L_0^2 [|\kappa| + (A + 2c_2(\boldsymbol{\delta} \cdot \mathbf{E}_0)) k^2]$.

Отметим, что взаимодействие Дзялошинского–Мория в данном случае проявляется четным образом, т.е. его вклад не зависит от того, в положительном или отрицательном направлении оси x или y или z (но знак проекции даст вклад при распространении под углом к одной из осей):

$$\omega^4 - \omega^2(\omega_1^2(\mathbf{k}) + \omega_2^2(\mathbf{k})) + \omega_1^2(\mathbf{k})\omega_2^2(\mathbf{k}) - \frac{1}{9} g_D^2 g_{0u}^2 L_0^4 = 0. \tag{14}$$

B. Циклоидальный равновесный порядок. Рассмотрим циклоидальный равновесный порядок

$$\mathbf{L}_0 = L_b \cos(qx)\mathbf{e}_x + L_c \sin(qx)\mathbf{e}_y, \tag{15}$$

$\mathbf{M}_0 = 0$, условия его возможности, в рамках приведенной модели, и далее рассмотрим его возмущения.

Равновесие представленного вида требует рассмотрения веществ, у которых отсутствует один из типов взаимодействия Дзялошинского–Мория $g_{2(\gamma)} = 0$. Второй тип взаимодействия Дзялошинского–Мория, содержащий вектор смещения лиганда, позволяет получить циклоиду заданного вида при $\boldsymbol{\delta} \parallel \mathbf{e}_y$. Более того, коэффициенты циклоиды должны быть связаны как $L_c = \pm L_b$. Как следствие этого, получаем выражения для производных от проекций равновесной плотности спина $\partial_x L_{0x} = \mp q L_{0y}$, $\partial_x L_{0y} = \pm q L_{0x}$, и $L_{0x}^2 + L_{0y}^2 = L_b^2 = \text{const}$.

Приведем линеаризованные уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта для двухкомпонентного антиферромагнетика

$$-\imath\omega\delta L^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\delta M^\beta \Big[(g_{0u} - Aq^2 - 2(c_0 + c_2 q^2)\delta \cdot E_{0y}) L_0^\gamma(x) - \frac{1}{3}\varepsilon^{\gamma z \nu} g_{(\beta)} \delta \cdot \partial_x L_0^\nu(x)\Big], \tag{16}$$

и

$$-\imath\omega\delta M^\beta = \varepsilon^{\beta\sigma\lambda} L_0^\sigma(x) \Big[\kappa\delta^{\lambda z}\delta L_z + Aq^2\delta L^\lambda + A\triangle\delta L^\lambda - \frac{1}{3}\varepsilon^{\lambda z\mu} g_{(\beta)}\delta \cdot \partial_x \delta L^\mu + 2c_2\Big(\delta \cdot E_{0y}\triangle\delta L^\lambda + \partial^\delta(\delta \cdot \delta E_y) \cdot \partial^\delta L_0^\gamma + q^2(\delta \cdot E_{0y})\delta L^\lambda\Big) - \imath\omega a \delta L^\lambda\Big] - \frac{1}{3}\varepsilon^{\beta\sigma\lambda}\varepsilon^{\lambda z\mu} g_{(\beta)}\delta \cdot \partial_x L_0^\mu(x). \tag{17}$$

Возмущения $\delta L_z \neq 0$ дают дисперсионную зависимость вида (без магнитоэлектрического эффекта и затухания Гильберта) $\omega^2 = [g_{0u} - Aq^2 \pm (g_{(\beta)}\delta/3)q] \times \times L_b^2[|\kappa| + A(k^2 - q^2) \pm (g_{(\beta)}\delta/3)q]$ ($\kappa < 0$, $g_{0u} > 0$, $A > 0$). В предельном случае $q \to 0$ и $L_b \to L_0$ мы получаем переход к коллинеарному режиму.

Далее, учитывая вклад магнитоэлектрического эффекта в динамику δL_z, мы получаем, что статическое электрическое поле дает вклад в дисперсионную зависимость, приводя к эффективному сдвигу константы обменного взаимодействия, как и в однородном случае:

$$\omega^2 \delta L_z = L_b^2 \Big(g_{0u} + 2c_0\delta \cdot E_{0y} - (A + 2c_2\delta \cdot E_{0y})q^2 \pm \frac{1}{3} g_{(\beta)} q\delta\Big) \times \Big[\Big(-\kappa - (A + 2c_2\delta \cdot E_{0y})q^2 \pm \frac{1}{3} g_{(\beta)} q\delta + \imath\omega a\Big)\delta L_z - (A + 2c_2\delta \cdot E_{0y})\triangle\delta L_z\Big]. \tag{18}$$

Так как это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, то можно использовать преобразование Фурье по пространственной координате (выполнить замену лапласиана $\triangle$ на $-k^2$) и, сократив на δL_z, получить дисперсионную зависимость. Отметим, что данное уравнение без переменных коэффициентов получено из линеаризованных уравнений путем алгебраических преобразований без дополнительных упрощений. Устойчивость системы требует того, чтобы было отрицательное значение константы анизотропии $\kappa < 0$, в соответствии с однородным случаем. Однако вклад неколлинеарного равновесного порядка приводит к уменьшению минимальной частоты, возникающей при $k = 0$. Из уравнения (18) видно, что динамическая часть электрического поля не влияет на δL_z, в отличие от других проекций δL_x и δL_y (16) (ниже показано, что δL_z не дает вклада в возмущения поляризации). Таким образом, представленная мода не дает вклада в отклик среды (для равновесия в виде плоской циклоиды, для конических структур ситуация, вероятно, изменится).

Перейдем к рассмотрению связанной динамики δL_x и δL_y. Для получения уравнения с постоянными коэффициентами и последующего вывода дисперсионной зависимости, после преобразования коэффициентов соответствующих уравнений введем вспомогательную функцию

$$\delta f = L_{0y}\delta L_x - L_{0x}\delta L_y. \qquad (19)$$

Тождественные преобразования позволяют получить следующее уравнение для этой функции (и возмущения электрического поля)

$$\omega^2\delta f = L_b^2\left(g_{0u}+2c_0\delta\cdot E_{0y}-(A+2c_2\delta\cdot E_{0y})q^2\pm\frac{1}{3}g_{(\beta)}q\delta\right)\times$$
$$\times[-(A+2c_2\delta\cdot E_{0y})\triangle\delta f+\imath\omega a\delta f\pm 2c_2 q\delta\cdot L_b^2\partial_x\delta E_y]. \qquad (20)$$

Полученное уравнение с постоянными коэффициентами может быть сведено к алгебраическому уравнению, используя преобразование Фурье. Пренебрегая вкладом возмущения электрического поля, получаем дисперсионное уравнение для спиновых волн:

$$\omega^2 = L_b^2\left(g_{0u}+2c_0\delta\cdot E_{0y}-(A+2c_2\delta\cdot E_{0y})q^2\pm\frac{1}{3}g_{(\beta)}q\delta\right)\times$$
$$\times((A+2c_2\delta\cdot E_{0y})k^2+\imath\omega a). \qquad (21)$$

Это уравнение позволяет получить дисперсионную зависимость спиновых волн $\omega_{0f}(k)$. При учете возмущения электрического поля можно получить дисперсионную зависимость связанных электромагнитных и спиновых волн, аналогично работам [9, 10]. Однако ниже мы ограничиваемся получением динамического комплексного тензора диэлектрической проницаемости (в нашем случае он сводиться к единственному элементу ε_{yy}).

В уравнении (21) видно, что постоянное электрическое поле модифицирует константу пространственно неоднородного обменного взаимодействия ($A + 2c_2\delta\cdot E_{0y}$) и константу пространственно однородного обменного взаимодействия ($g_{0u} + 2c_0\delta\cdot E_{0y}$). А главное, что спиральная равновесная структура влияет на вид коэффициента g_{0u}, через вклад волнового вектора равновесной циклоидальной спирали. Эта модификация возникает, как за счет обменного взаимодействия, так и за счет взаимодействия Дзялошинского–Мория.

Отметим, что при пренебрежении $g_{(\gamma)}$ и выборе направления распространения волны вдоль оси Ox две волновые моды не влияют друг на друга, в соответствии с однородным случаем, рассмотренным выше.

V. Диэлектрическая проницаемость мультиферроиков. Рассмотрение антиферромагнетиков с конфигурацией $AABB$ при получении вклада магнитоэлектрического эффекта в уравнение эволюции спина требует использования поляризации вида $\mathbf{P}_{\sum} = \mathbf{P}_{AA} + \mathbf{P}_{BB} + \mathbf{P}_{AB}$. При использовании приближений $c_{0,AB} = -c_{0,AA} = -c_{0,BB} = -c_0$ и $c_{2,AB} = -c_{2,AA} = -c_{2,BB} = -c_2$ выражение для поляризации $\mathbf{P}_{\sum}$ можно упростить до $\mathbf{P}_{\sum} = \boldsymbol{\delta}[c_0\mathbf{L}^2 + c_2\mathbf{L}\cdot\triangle\mathbf{L}]$. Получим выражение для равновесной поляризации $\mathbf{P}_{0,\sum} = \boldsymbol{\delta}\cdot L_b^2[c_0 - q^2c_2]$, и для ее возмущения в линейном по малой амплитуде режиме $\delta\mathbf{P}_{\sum} = \boldsymbol{\delta}c_2(\mathbf{L}_0\cdot\triangle\delta\mathbf{L}) = \boldsymbol{\delta}c_2(\pm 2q\partial_x\delta f)$. Оно выражается через введенную выше функцию δf, которая позволяет описать возмущения δL_x и δL_y. Говоря о соотношении констант c_0 и c_2 для разных подсистем, отметим, что в антиферромагнетике обменный интеграл гамильтониана Гейзенберга отрицателен (положителен) для атомов/ионов с противоположно (одинаково) направленными спинами. Аналогичное предположение сделано для констант β и γ во взаимодействии Дзялошинского–Мория, в уравнениях (10) и (11), а также для констант c_0 и c_2. Тем более, что константы c_0 и c_2 пропорциональны константе β, с учетом индексов AA и AB, как показано выше, в разделе 2.

Введем диэлектрическую проницаемость $\delta P_{y,\sum} = (\varepsilon_{yy} - 1)\delta E_y/4\pi$, для которой получается явный вид:

$$\varepsilon_{yy} = 1 - 16\pi\tilde{g}_{0u}\frac{(c_2\delta\cdot qk_x)^2L_b^4}{\omega^2-\omega_{0f}^2}, \qquad (22)$$

где $\tilde{g}_{0u} = \left(g_{0u}+2c_0\delta\cdot E_{0y}-(A+2c_2\delta\cdot E_{0y})q^2\pm\frac{1}{3}g_{(\beta)}q\delta\right)$. Отметим, что возмущения поляризации определяются только вторым порядком разложения c_2, тогда как равновесная поляризация определяется нулевым и вторым порядком разложения c_0 и c_2.

Наряду с тем, что в резонансном отклике антиферромагнетика участвует одна из двух собственных волн, мы получили, что постоянная составляющая внешнего электрического поля позволяет варьировать вклад обменного взаимодействия. Хотя происходит одновременное изменение двух констант $g_{0u} + 2c_0\delta\cdot E_{0y}$ и $A + 2c_2\delta\cdot E_{0y}$. Более того, большая величина электрического поля может повлиять на значения самих констант g_{0u} и A, и это приведет к наложению эффектов. Такое поведение дает контролируемое управление свойствами системы через приложение электрического поля в системах с рассмотренным типом магнитоэлектрического эффекта.

VI. Заключение. Представлено подробное обсуждение спин токовой модели поляризации мультиферроика для систем коллинеарных спинов (или когда основной вклад в поляризацию обусловлен параллельными составляющими спинов) для ферромагнетиков и антиферромагнетиков. Получены соответствующие выражения для поляризации среды.

Рассмотрен вклад магнитоэлектрического эффекта в уравнения эволюции плотностей спинов.

На основе представленной модели изучены дисперсионные зависисимости спиновых волн на фоне циклоидального порядка равновесной плотности спинов антиферромагнетиков. Обсуждается влияние двух типов взаимодействия Дзялошинского–Мория на возможность формирования циклоидального равновесного порядка. Вычислена динамическая диэлектрическая проницаемость как функция частоты такого класса систем.

Показано, что только одна из спиновых волн (имеющая бесщелевой спектр) дает вклад в диэлектрическую проницаемость. Также показано, что циклоидальное равновесие влияет на дисперсионную зависимость спиновых волн, существующих в антиферромагнетиках, а именно вклад волнового вектора циклоиды возникает за счет пространственно неоднородного обменного взаимодействия и взаимодействия Дзялошинского–Мория. При этом дополнительный вклад пространственно неоднородного обменного взаимодействия $\sim A$ является отрицательным и уменьшает вклад энергии анизотропии и пространственно однородного обменного взаимодействия $\sim g_{0u}$. Дополнительный, т.е. связанный с волновым вектором циклоиды, вклад взаимодействия Дзялошинского–Мория оказывается знакопеременным. Вклады пространственно однородного и пространственно неоднородного обменного взаимодействия получают зависящие от постоянного электрического поля сдвиги, вызванные магнитоэлектрическим эффектом.

Приложение А. Магнитоэлектрический эффект для антиферромагнетиков

Рассмотрим подробнее вклад магнитоэлектрического эффекта в уравнения эволюции спина в антиферромагнетике. В случае расположения спинов $ABAB$ поляризация, связанная с парой соседних спинов, определяется связью ионов разного сорта. Поэтому поляризация определяется уравнением (5). Получим соответствующий вклад в уравнение эволюции спина частиц сорта A: $\partial_t \mathbf{S}_A \;|_{\mathbf{E}}= \gamma[\mathbf{S}_A \times \times \mathbf{H}_{\mathrm{eff},A}]$ через вычисление вариационной производной $\mathbf{H}_{\mathrm{eff},A} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\delta\mathcal{E}}{\delta\mathbf{S}_A}$ вплоть до производной по лапласиану плотности спина $\triangle\mathbf{S}$, так как плотность энергии содержит $\triangle\mathbf{S}_A$ через поляризацию среды (4). В итоге получим

$$\partial_t S_A^\alpha \;|_E= 2c_{0,AB}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}S_A^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})S_B^\gamma +$$

$$+2c_{2,AB}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}S_A^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle S_B^\gamma+(\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu S_B^\gamma]. \quad (A.1)$$

Перейдем к переменным $\mathbf{L} = \mathbf{S}_A - \mathbf{S}_B$ и $\mathbf{M} = = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B$. Для вектора $\mathbf{L}$ получим

$$\partial_t L^\alpha \;|_E= c_{2,AB}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}L^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle M^\gamma+(\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu M^\gamma]+$$

$$+c_{2,AB}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}M^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle L^\gamma+(\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu L^\gamma]. \quad (A.2)$$

Также, для вектора $\mathbf{M}$ получим

$$\partial_t M^\alpha \;|_E= c_{2,AB}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}M^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle M^\gamma+(\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu M^\gamma]+$$

$$+c_{2,AB}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}L^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle L^\gamma+(\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu L^\gamma]. \quad (A.3)$$

В случае расположения спинов $AABB$ поляризация, связанная с парой соседних спинов, определяется связью как ионов одного сорта AA и BB, так и ионов разного сорта AB. Поэтому для полной поляризации нужно учесть уравнение (8) для сортов AA и BB, наряду с уравнением (5), рассмотренным выше. Это приведет к дополнительному вкладу

$$\partial_t\mathbf{S}_A|_E = 2c_{0,AB}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}S_A^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})S_B^\gamma +$$

$$+2c_{2,AA}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}S_A^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle S_A^\gamma+(\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu S_A^\gamma]+$$

$$+2c_{2,AB}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}S_A^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle S_B^\gamma+(\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu S_B^\gamma]. \quad (A.4)$$

Однако этот вклад (при условии $c_{2,AB} = -c_{2,AA} = = -c_{2,BB} \equiv -c_2$) приводит к более простому вкладу магнитоэлектрического эффекта в уравнения эволюции векторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$. Для вектора $\mathbf{L}$ получим

$$\partial_t L^\alpha \;|_E= 2c_{0,AB}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}M^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})L^\gamma +$$

$$+2c_2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}M^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle L^\gamma+(\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu L^\gamma]. \quad (A.5)$$

Также, для вектора $\mathbf{M}$ получим

$$\partial_t M^\alpha \;|_E= 2c_2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}L^\beta[(\boldsymbol{\delta}\cdot\mathbf{E})\triangle L^\gamma+(\boldsymbol{\delta}\cdot(\partial^\nu\mathbf{E}))\cdot\partial^\nu L^\gamma]. \quad (A.6)$$

Финансирование работы. Работа поддержана Российским научным фондом в рамках гранта # 25-22-00064.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. R. S. Fishman, T. Room, and R. de Sousa, "Normal modes of a spin cycloid or helix", Phys. Rev. B **99**, 064414 (2019).
2. A. Pimenov, A. Mukhin, V. Ivanov, V. D. Travkin, A. M. Balbashov, and A. Loidl, "Possible evidence for electromagnons in multiferroic manganites", Nature Phys. **2**, 97 (2006).

3. Y. Tokura, S. Seki, and N. Nagaosa, “Multiferroics of spin origin”, Rep. Prog. Phys. **77**, 076501 (2014).
4. S. Dong, J.-M. Liu, S.-W. Cheong, and Z. Ren, “Multiferroic materials and magnetoelectric physics: symmetry, entanglement, excitation, and topology”, Adv. Phys. **64**, 519 (2015).
5. H. Katsura, N. Nagaosa, and A.V. Balatsky, “Spin Current and Magnetoelectric Effect in Noncollinear Magnets”, Phys. Rev. Lett. **95**, 057205 (2005).
6. П.А. Андреев, М.И. Труханова, “Уравнение эволюции электрической поляризации мультиферроиков, пропорциональной векторному произведению спинов ионов ячейки, под влиянием гамильтониана Гейзенберга”, ЖЭТФ **166**, 665 (2024) [P.A. Andreev and M.I. Trukhanova, “Equation of evolution of electric polarization of multiferroics proportional to the vector product of spins of ions of the cell under the influence of the Heisienberg Hamiltonian”, JETP **166**, 645 (2024)].
7. P.A. Andreev and M.I. Trukhanova, “Electric polarization evolution equation for antiferromagnetic multiferroics with the polarization proportional to the scalar product of the spins”, Phys. Scr. **99**, 1059b2 (2024).
8. Z.V. Gareeva, A.F. Popkov, S.V. Soloviov, and A.K. Zvezdin, “Field-induced phase transitions and phase diagrams in $BiFeO_3$-like multiferroics”, Phys. Rev. B **87**, 214413 (2013).
9. I.V. Bychkov, V.D. Buchelnikov, D.A. Kuzmin, and V.V. Shadrin, “Spectrum of the coupled waves in magnetics having the ferromagnetic spiral”, Solid State Phenomena **190**, 257 (2012).
10. I.V. Bychkov, D.A. Kuzmin, and V.G. Shavrov, “Hybridization of electromagnetic, spin and acoustic waves in magnetic having conical spiral ferromagnetic order”, J. Magn. Magn. Mater. **329**, 142 (2013).
11. A.M. Shuvaev, F. Mayr, A. Loidl, A.A. Mukhin, and A. Pimenov, “High-frequency electromagnon in $GdMnO_3$”, Eur. Phys. J. B **80**, 351 (2011).
12. I. Aupiais, M. Mochizuki, H. Sakata, R. Grasset, Y. Gallais, A. Sacuto, and M. Cazayous, “Colossal electromagnon excitation in the non-cycloidal phase of $TbMnO_3$ under pressure”, npj Quantum Mater. **3**, 60 (2018).
13. H. Katsura, A. V. Balatsky, and N. Nagaosa, “Dynamical Magnetoelectric Coupling in Helical Magnets”, Phys. Rev. Lett. **98**, 027203 (2007).
14. A. Sparavigna, A. Strigazzi, and A. Zvezdin, “Electric-field effects on the spin-density wave in magnetic ferroelectrics”, Phys. Rev. B **50**, 2953 (1994).
15. M. Mostovoy, “Ferroelectricity in Spiral Magnets”, Phys. Rev. Lett. **96**, 067601 (2006).
16. Д.И. Хомский, “Мультиферроики и не только: электрические свойства различных магнитных текстур”, ЖЭТФ **159**, 581 (2021) [D.I. Khomskii, “Multiferroics and Beyond: Electric Properties of Different Magnetic Textures”, JETP **132**, 482 (2021)].
17. В.Г. Барьяхтар, В.А. Львов, Д.А. Яблонский, “Теория неоднородного магнитоэлектрического эффекта”, Письма в ЖЭТФ **37**, 565 (1983) [V.G. Bar’yakhtar, V.A. L’vov, and D.A. Yablonskii, “Inhomogeneous magnetoelectric effect”, JETP Lett. **37**, 673 (1983)].
18. A.K. Zvezdin and A.P. Pyatakov, “On the problem of coexistence of the weak ferromagnetism and the spin flexoelectricity in multiferroic bismuth ferrite”, EPL **99**, 57003 (2012).
19. V. Risinggard, I. Kulagina, and J. Linder, “Electric field control of magnoninduced magnetization dynamics in multiferroics”, Sci. Rep. **6**, 31800 (2016).
20. P.A. Andreev, “Regimes of optical transparency and instabilities of collinear dielectric ferromagnetic materials in the presence of the dynamic magnetoelectric effect”, arXiv:2505.07107.
21. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика Том 9, Статистическая физика, часть 2, теория конденсированного состояния* (Физматлит, М., 2001) [in Russian] [L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics: Course of Theoretical Physics* (Butterworth-Heinemann, 1980), v. 9].