Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 3, с. 196 – 206

Снижение измерительной сложности при понижении ранга для томографии поляризационных кутритов в естественном базисе

Д. Р. Чупахин[+], Н. А. Борщевская[+*1)], Б. И. Бантыш[*], К. Г. Катамадзе[×], С. П. Кулик[+], Ю. И. Богданов[*]*

[+]*Центр квантовых технологий Физического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

[*]*Национальный исследовательский центр "Курчатовский институт", 123182 Москва, Россия*

[×]*Technology Innovation Institute, 9639 Abu Dhabi, UAE*

Поступила в редакцию 18 ноября 2025 г.
После переработки 12 декабря 2025 г.
Принята к публикации 12 декабря 2025 г.

Исследована томография поляризационных кутритов в схеме измерений в естественном поляризационном базисе с минимальным числом перестраиваемых элементов. Проведен теоретический анализ информационной полноты протоколов для состояний различного ранга с использованием анализа матрицы информации и методов сжимающей томографии; результаты подтверждены экспериментально. Показано существование протокола с пятью измерениями, обеспечивающего полную реконструкцию произвольных (в том числе смешанных) состояний, и установлено, что более экономные по числу измерений схемы обеспечивают полную реконструкцию для чистых состояний. Полученные протоколы демонстрируют высокую точность восстановления тестовых состояний в условиях ограниченного набора поворотов измерительного базиса.

DOI: 10.7868/S3034576626020067

1. Введение. Квантовые информационные технологии рассматриваются как один из наиболее перспективных путей развития вычислений и связи [1, 2]. Базовой единицей кодирования квантовой информации является кубит, однако переход к многомерным системам (кудитам) – уже на уровне кутритов ($d = 3$) и куквартов ($d = 4$) – может улучшать эффективность и помехоустойчивость коммуникационных и вычислительных протоколов, а также расширять функциональные возможности устройств [3–6]. Надежная эксплуатация таких протоколов требует точной диагностики на всех этапах – измерения (томографии) квантовых состояний в используемом гильбертовом пространстве.

Рост размерности d ведет к росту необходимого числа измерений: в частности, для полной томографии смешанного состояния размерности d можно использовать набор из $d + 1$ взаимно несмещенных базисов [7, 8]. Вместе с тем, если заранее известны ограничения на ранг состояния (например, если состояние чистое), число необходимых измерений можно существенно сократить: к этому ведут как результаты по томографии с априорной информацией [9], так и методы сжатого восстановления (compressed sensing) [10] и адаптивной сжимающей томографии [11–13]. Для чистых состояний известны как нижние и верхние границы на число исходов/базисов [14, 15], так и явные конструкции на ограниченном числе ортонормированных базисов [16, 17].

При этом практическая реализация далеко не всегда позволяет осуществить произвольные измерения; реальные схемы часто жестко ограничены классом доступных преобразований (поворотов) измерительного базиса. Поэтому задача разработки экспериментально реализуемых протоколов измерений и анализа их информационной полноты при заданных ограничениях – нетривиальная исследовательская проблема.

В настоящей работе мы рассматриваем задачу разработки полного протокола томографии с минимальным числом измерений для квантовых состояний разного ранга на примере поляризационного состояния двух фотонов в одной моде, образующего поляризационный кутрит в "естественном" (стандартном) поляризационном базисе $\{|HH\rangle, |HV\rangle, |VV\rangle\}$ [18–23], без использования постселекции куквартов. При этом мы ограничиваем наш анализ протоколами, которые могут быть реализованы в наиболее простой измерительной схеме с минимальным числом перестраиваемых элементов.

Идеи предыдущей работы [24], где рассматривался единственный протокол и полностью смешанные

1)e-mail: bornad@quantum.msu.ru

квантовые состояния, здесь расширены на состояния произвольного ранга, что позволило предложить новые протоколы томографии кутритов, находящихся в чистом состоянии, с меньшим числом измерений. Кроме того, в настоящей работе теоретическое исследование дополнено рассмотрением вопроса информационной полноты исследуемых протоколов.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 формулируется понятие полноты квантового протокола и приводятся методы ее анализа, применявшиеся в работе. В разделе 3 описываются исследуемые протоколы томографии. Далее в разделе 4 приводится схема экспериментальной установки, на которой была проведена апробация рассмотренных протоколов, подтверждающая справедливость и практическую применимость предложенного теоретического подхода. Раздел 5 содержит основные выводы статьи.

2. Критерии полноты протоколов томографии. Для томографии неизвестного квантового состояния производят определенный набор измерений, называемый протоколом томографии, а затем, на основе результатов измерений восстанавливают параметры квантового состояния. Будем рассматривать протоколы, состоящие из полного набора базисных измерений. Каждое такое измерение дает один из d исходов, которые мы будем нумеровать индексом i (где d – размерность системы). При этом для однозначного восстановления параметров квантового состояния нужно проводить измерения в нескольких базисах. Номер базиса мы будем обозначать индексом β.

Вероятность наблюдать исход i при протокольном измерении β обозначим $p_{\beta,i} = \mathrm{Tr}(P_{\beta,i}\rho)$, где $P_{\beta,i}$ является соответствующим проектором. Тогда можно составить следующее матричное уравнение:

$$p = B \cdot \mathrm{vec}(\rho). \tag{1}$$

Здесь p – столбец, составленный из вероятностей $p_{\beta,i}$, B – матрица, каждая строка которой соответствует вытянутой в строку матрице проектора $P_{\beta,i}$, а $\mathrm{vec}(\rho)$ – операция вытягивания матрицы плотности ρ в столбец.

Согласно [14, 16, 25], будем считать информационно полным такой протокол, с помощью которого можно достоверно различить два любых состояния, т.е.:

$$\forall\, \rho^A, \rho^B \in \mathcal{S},$$
$$\begin{cases} p^A_{\beta,i} = \mathrm{Tr}(\rho^A P_{\beta,i}), \\ p^B_{\beta,i} = \mathrm{Tr}(\rho^B P_{\beta,i}), \\ p^A_{\beta,i} = p^B_{\beta,i}, \end{cases} \Rightarrow \quad \rho^A = \rho^B. \tag{2}$$

Здесь S в общем случае – полное гильбертово пространство квантовых состояний, но в случае наличия некоторой априорной информации о состоянии, например, ограничение его ранга r, это множество можно сузить до S_r.

Для кутритов с рангом $r = d$, где d – размерность пространства (в рассматриваемом случае кутритов $d = 3$), необходимым и достаточным критерием информационной полноты протокола является отсутствие нулевых сингулярных значений матрицы B из формулы (1). Для $r < d$ данный критерий является лишь достаточным. Однако можно использовать условие, предложенное в работе [26] в качестве необходимого. Согласно этому условию, если матрица информации не имеет ровно r^2 нулевых собственных значений, то протокол считается неполным. При этом сама матрица информации задается в виде (см. Приложение Б):

$$H = 2n \sum_{\kappa} \frac{(\Lambda_\kappa |c\rangle)(\Lambda_\kappa |c\rangle)^\dagger}{\gamma_\kappa}, \tag{3}$$

где n – объем выборки, $|c\rangle$ – очищенный вектор состояния, $\gamma_\kappa = \langle c|\, \Lambda_\kappa\, |c\rangle$ – вероятность рассматриваемого исхода κ, $\Lambda_\kappa = [P_{\beta,i}]^\dagger_\kappa [P_{\beta,i}]_\kappa$ – оператор интенсивности процесса. Это означает, что если состояние кутрита восстанавливается с рангом 1 (как чистое состояние), то матрица информации должна иметь ровно одно нулевое собственное значение, для ранга 2 (частично смешанного) – четыре нулевых собственных значения и для ранга 3 (полностью смешанного) – девять нулевых собственных значений, чтобы протокол мог быть информационно полным.

Достаточное условие полноты протокола томографии для заданного ранга представлено в работах [11–13], описывающих метод адаптивной сжимающей томографии. Суть подхода состоит в следующем. Сначала из всего множества квантовых состояний заданного ранга S_r случайным образом выбирается некоторое состояние ρ_r (метод генерации случайного состояния заданного ранга описан в Приложении В). Затем для выбранного состояния и исследуемого протокола вычисляется набор вероятностей всех исходов измерения $\{p_{\beta,j}\}$. Затем рассматривается множество квантовых состояний S_p, дающих при измерении тот же набор вероятностей. Для каждого состояния из этого множества можно рассчитать среднее значение некоторой наблюдаемой, определяемой случайной эрмитовой матрицей Z: $f(\rho) = \mathrm{Tr}\{Z\rho\}$. Далее параметры состояния $\rho_r \in$ $\in S_p$ варьируются таким образом, чтобы максимизировать или минимизировать значение этой функции (получив значения $f_{\max}$ и $f_{\min}$ соответственно). Для численной реализации задач выпуклой оптимизации мы используем пакет `CVXPY` [27], где в качестве оптимизатора применяем алгоритм `SCS` (*Splitting Conic Solver*), с точностью $\epsilon = 10^{-6}$, подходящий для решения задач выпуклой оптимизации.

Критерием полноты исследуемого протокола является близость к нулю функции $S_{\text{cvx}} = (f_{\max} - f_{\min})/(f_{\max,1} - f_{\min,1})$, где $f_{\max,1}$ и $f_{\min,1}$ рассчитываются для редуцированного протокола, состоящего только из одного (первого) измерения. Фактически, из условия $S_{\text{cvx}} = 0$ следует, что состояния, удовлетворяющие измеренным значениям вероятности, минимизирующие и максимизирующие функцию f (обозначим их $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$), совпадают, а значит, измеренные вероятности позволяют однозначно восстановить квантовое состояние и протокол является полным. Для того чтобы в явном виде проверить совпадение состояний $\rho_{\max}$ и $\rho_{\min}$, мы, наряду с S_{cvx}, также рассчитывали точность реконструкции $F(\rho_{\max}, \rho_{\min})$ (Fidelity) по формуле

$$F(\rho_1, \rho_2) = \left(\text{Tr}\left\{\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}}\right\}\right)^2. \tag{4}$$

Данный анализ проводился для 500 различных случайно выбранных состояний ρ_r, и для каждого протокола определялось наибольшее значение $S_{\text{cvx}}^{(\max)}$ и минимальное значение $F_{\text{cvx}}^{(\min)}$ (наихудший случай).

3. Анализ полноты протоколов измерения кутрита в естественном базисе. Мы рассматриваем протоколы томографии на основе схемы измерения кутритов в естественном базисе, введенной в работе [24] (рис. 1). Основными ее преимуществами являются простота реализации и минимизация количества поляризационных элементов. Состояние кутрита $|\psi\rangle$ преобразуется набором поляризационных элементов, описываемым унитарной матрицей U, после чего производится измерение в естественном базисе кутрита $\{|HH\rangle, |HV\rangle, |VV\rangle\}$. Измерение осуществляется следующим образом: фотоны попадают на поляризационный светоделитель, в выходных каналах которого установлены детекторы, различающие число фотонов. Если детектор D_H зарегистрировал пару фотонов, то это соответствует проекции на состояние $|HH\rangle$, если детектор D_V зарегистрировал пару фотонов, то это соответствует проекции на состояние $|VV\rangle$, а если каждый детектор зарегистрировал по одному фотону, то это отвечает проекции на состояние $|HV\rangle$.

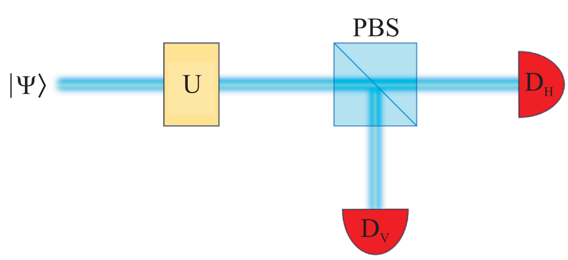


Рис. 1. (Цветной онлайн) Принципиальная схема томографии поляризационного кутрита в естественном базисе. Исследуемое излучение разделяется на два канала поляризационным светоделителем PBS, а в каждом канале установлены детекторы, различающие число горизонтально и вертикально поляризованных фотонов соответственно D_H и D_V. Для измерения в различных базисах перед поляризационным светоделителем устанавливается некоторый поляризационный элемент U

Преобразование состояния кутрита с комплексными амплитудами c_{HH}, c_{HV}, c_{VV} поляризационным элементом, описываемым унитарной матрицей $U = \begin{pmatrix} w & v \\ -v^* & w^* \end{pmatrix}$, имеет вид [18, 21, 24]:

$$\begin{pmatrix} c_{HH\text{out}} \\ c_{HV\text{out}} \\ c_{VV\text{out}} \end{pmatrix} = \tag{5}$$
$$= \begin{pmatrix} w^2 & \sqrt{2}wv & v^2 \\ -\sqrt{2}wv^* & |w|^2 - |v|^2 & \sqrt{2}w^*v \\ v^{*2} & -\sqrt{2}w^*v^* & w^{*2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{HH\text{in}} \\ c_{HV\text{in}} \\ c_{VV\text{in}} \end{pmatrix}.$$

Частным случаем такого поляризационного преобразователя является фазовая пластинка $\text{WP}(\delta, \alpha)$, вносящая разность фаз δ, повернутая под углом α, для которой $w = \cos(\delta) + \text{i}\sin(\delta)\cos(2\alpha)$, $v = \text{i}\sin(\delta)\cos(2\alpha)$.

В исследуемых протоколах использовались фазовые пластины $\lambda/2$ (HWP), $\lambda/4$ (QWP) и $\lambda/8$ (EWP), для которых мы введем соответствующие преобразования:

$$\text{HWP}(\alpha) = \text{WP}(\pi; \alpha), \quad \text{QWP}(\alpha) = \text{WP}(\pi/2; \alpha), \\ \text{EWP}(\alpha) = \text{WP}(\pi/4; \alpha). \tag{6}$$

Протоколы A5 и A4 с пластинкой $\lambda/4$. Начнем рассмотрение с ранее предложенного нами в работе [24] протокола. Он включает пять измерений с одной четвертьволновой пластиной, устанавливаемой под углами $\{0, 1, 3, 5, 7\} \times \pi/8$. Далее будем называть его $A5$. Аналогичным образом и все последующие протоколы будут иметь обозначение в форме буквы с числом, соответствующим количеству измерений.

Как установлено в [24], все сингулярные значения матрицы B этого протокола положительны, поэтому данный протокол является информационно полным для реконструкции состояний кутрита любого ранга от чистого до полностью смешанного. Расчеты методом сжимающей томографии также показали, что для него выполняется достаточный критерий информационной полноты.

При анализе протокола $A5$ для состояний ранга 1 были получены значения $S_{\rm cvx}$ и $F_{\rm cvx}$, приведенные на рис. 2. Из него можно заметить, что при $m = 4$ параметр $S_{\rm cvx} = 0$, что свидетельствует о том, что данный протокол может сохранять информационную полноту, даже при исключении последнего измерения, что далее проверяется на экспериментальных данных. Аналогичные графики были получены, если последним измерением выбирать $\{0, 1, 5, 7\} \times \pi/8$. В качестве примера в табл. 1 и рис. 3 мы привели протокол $A4$, в котором было отброшено измерение QWP$(\pi/8)$.

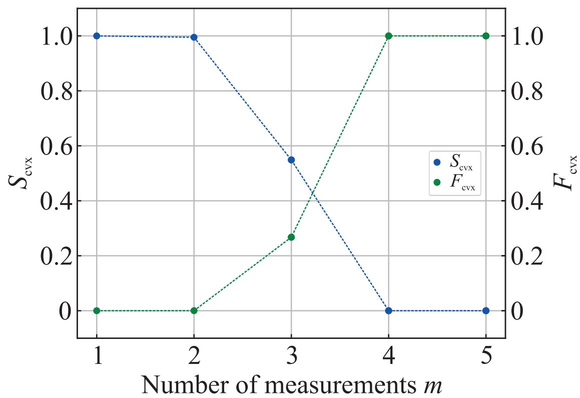


Рис. 2. (Цветной онлайн) Анализ полноты протокола $A5$ и его редуцированных вариантов, для которых используются только первые m измерений, для состояния ранга 1. График зависимости $S_{\rm cvx}$ и $F_{\rm cvx}$ от количества измерений m для соответствующего набора углов $\{1, 0, 3, 5, 7\} \times \pi/8$

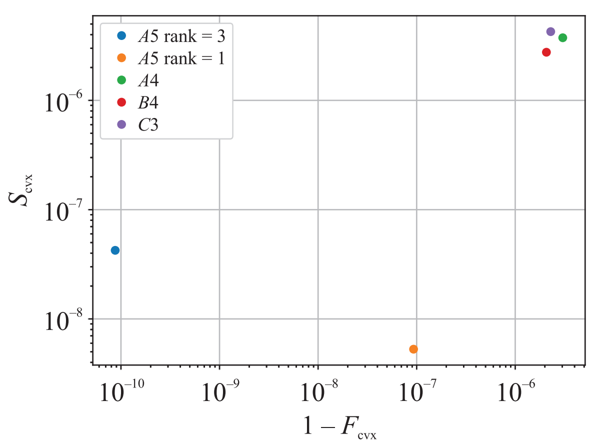


Рис. 3. (Цветной онлайн) Значения $S_{\rm cvx}$ и $F_{\rm cvx}$ для исследуемых протоколов

Протокол $B4$ с пластинкой $\lambda/8$. Далее проанализируем протокол, представленный в работе [28], который мы обозначим как $B4$. Он может быть преобразован к виду измерений в естественном базисе (рис. 1) с четырьмя измерениями, соответствующими следующим поляризационным преобразованиям кутрита U: 1) I – единичное преобразование, соответствующее измерению в базисе $\{|H\rangle, |V\rangle\}$; 2) HWP$(\pi/8)$, соответствующее измерению в базисе $\{|D\rangle, |A\rangle\}$; 3) HWP$(\pi/8)$EWP(0); 4) EWP$(\pi/4)$. Для этого протокола авторы вывели аналитическую связь между вероятностями различных исходов измерения и коэффициентами, описывающими чистое состояние кутрита, что доказывает его полноту для состояний ранга 1. Это подтверждается и анализом полноты на основе метода сжимающей томографии.

Оптимальный протокол $C3$ с пластинкой $\lambda/8$. Также нами был разработан протокол с минимальным количеством измерений для реконструкции кутрита, находящегося в чистом состоянии. Он включает всего три положения пластинки $\lambda/8$ под углами $\{\pi/3, \pi/8, \pi/16\}$ и также удовлетворяет достаточному критерию полноты. Для наглядности, значения $S_{\rm cvx}$ и $F_{\rm cvx}$, демонстрирующие достаточное условие полноты всех исследуемых протоколов, представлены на рис. 3. Полное описание всех протоколов и их параметров также приведено в сводной табл. 1.

Сводные значения $S_{\rm cvx}$ и $F_{\rm cvx}$ на рис. 3 и в табл. 1 служат ориентиром для выбора протокола в зависимости от предполагаемого ранга и желаемого числа измерений. Эти теоретические оценки далее сопоставляются с экспериментальными значениями Fidelity в разделе 4.

Отметим, что для всех протоколов также выполнен и необходимый критерий полноты [26].

4. Экспериментальная апробация протоколов. Для экспериментальной апробации исследуемых протоколов была использована та же установка, что и в работе [24], схема которой представлена на рис. 4. Установка позволяет приготавливать и реконструировать следующий набор тестовых состояний:

$$\begin{aligned}
&|\phi_1\rangle = |HH\rangle, \quad |\phi_2\rangle = |VV\rangle, \\
&|\phi_3\rangle = |AA\rangle, \quad |\phi_4\rangle = |DD\rangle, \\
&|\phi_5\rangle = |RR\rangle, \quad |\phi_6\rangle = |LL\rangle, \\
&|\phi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|HH\rangle - \mathrm{i}\,|VV\rangle\right), \\
&|\phi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|DD\rangle + \mathrm{i}\,|AA\rangle\right), \\
&|\phi_9\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|RR\rangle - \mathrm{i}\,|LL\rangle\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Таблица 1. Сравнительная таблица исследуемых протоколов

Protocol	Theoretical description	Experimental implementation	Rank	$S_{\text{cvx}}^{(\max)}$	$1-F_{\text{cvx}}^{(\min)}$	$\langle F_{\text{exp}}\rangle$
$A5$	QWP at angles $\{0,1,3,5,7\}\times\pi/8$	QWP at angles $\{0,1,3,5,7\}\times\pi/8$	1	$4.2\cdot10^{-9}$	$8.6\cdot10^{-8}$	0.9935
			3	$9.8\cdot10^{-8}$	$7.7\cdot10^{-11}$	0.9807
$A4$	QWP at angles $\{0,3,5,7\}\times\pi/8$	QWP at angles $\{0,3,5,7\}\times\pi/8$	1	$4.3\cdot10^{-6}$	$3.6\cdot10^{-6}$	0.9851
$B4$	1) I – identity transformation 2) HWP($\pi/8$) 3) HWP($\pi/8$)EWP(0) 4) EWP($\pi/4$)	1) HWP(0) 2) HWP($\pi/8$) 3) HWP($\pi/8$)QWP($-\pi/4$) HWP($\pi/16$) QWP($-\pi/4$) 4) Same as 3), but with the input states raplaced[1)]	1	$2.6\cdot10^{-6}$	$2.1\cdot10^{-6}$	0.9940
$C3$	1) EWP($\pi/3$) 2) EWP($\pi/8$) 3) EWP($\pi/16$)	1) QWP($\pi/12$) HWP($\pi/48$) QWP($\pi/12$) 2) QWP($3\pi/8$) HWP($7\pi/16$) QWP($3\pi/8$) 3) QWP($5\pi/16$) HWP($3\pi/8$) QWP($5\pi/16$)	1	$3.2\cdot10^{-6}$	$3.6\cdot10^{-6}$	0.9950

[1)] Для реализации измерения 4) брались данные измерения 3) со следующей заменой входных состояний: $|\phi_1\rangle\leftrightarrow|\phi_4\rangle$, $|\phi_2\rangle\leftrightarrow|\phi_3\rangle$, $|\phi_5\rangle\leftrightarrow|\phi_6\rangle$, $|\phi_7\rangle\leftrightarrow|\phi_8\rangle$.

Матрицы плотности этих состояний образуют базис в пространстве всех матриц плотности кутрита, т.е. любое смешанное состояние ρ может быть представлено в виде суммы

$$\rho=\sum_{j=1}^{9}a_j\,|\phi_j\rangle\langle\phi_j|, \tag{8}$$

где a_j – действительные коэффициенты разложения. Таким образом, возможность реконструкции этих состояний доказывает возможность использования протокола томографии для всех возможных квантовых состояний заданного ранга.

Подробное описание схемы можно найти в работе [24]. Отличие состоит лишь в том, что в измерительной части в качестве элемента U использовались фазовые пластины, установленные под разными углами, в соответствии с описанием исследованных протоколов. В отсутствие фазовой пластины $\lambda/8$ использовались эквивалентные комбинации полуволновой и четвертьволновой пластин – см. детали в табл. 1.

Для реконструкции квантового состояния мы использовали метод максимального правдоподобия совместно с корневой параметризацией матрицы плотности (см. Приложение A). Корневая параметризация позволяет выбирать ранг r матрицы плотности. В частности, выбор $r=1$ позволяет оптимизировать функцию правдоподобия лишь по множеству чистых квантовых состояний. Точность приготовления квантовых состояний будем определять по формуле (4).

В ходе эксперимента было приготовлено каждое из 9 базисных состояний (7). Для каждого состояния при каждом протокольном измерении было проведено 10 повторений с временем накопления 30 с, что соответствует объему выборки $\sim10^4$. Значение Fidelity F_{exp} считалось по формуле (4) между матрицами плотности приготовленного состояния и восстановленного.

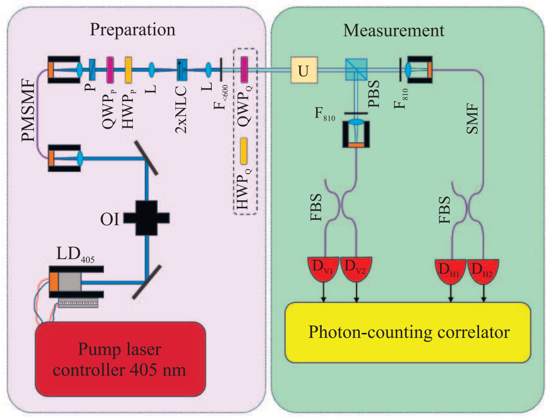


Рис. 4. (Цветной онлайн) Схема экспериментальной установки по приготовлению и томографии поляризационных кутритов в естественном базисе.
LD_{405} – узкополосный диодный лазер на длине волны 405 нм; DG – дифракционная решетка; OI – оптический изолятор; PMSMF – одномодовое оптическое волокно, сохраняющее поляризацию; P – поляризатор; L – линза; 2xNLC – пара нелинейно-оптических кристаллов BiBO толщиной 0.5 мм со скрещенными оптическими осями; $F_{<600}$, F_{810} – фильтр, блокирующий излучение с длиной волны меньше 600 нм и фильтр с центром на длине волны 810 нм и шириной 10 нм; QWP_P, QWP_Q – четвертьволновые фазовые пластинки; HWP_P, HWP_Q – полуволновые фазовые пластинки; PBS – поляризационный светоделитель; U – соответствующее протокольное преобразование; SMF – одномодовое оптическое волокно; FBS – волоконные светоделители 50:50; D_{H1}, D_{H2}, D_{V1}, D_{V2}, – однофотонные детекторы на основе кремниевых лавинных фотодиодов

Значения F_{exp}, полученные при реконструкции всех 9 чистых состояний каждым из протоколов, показаны на рис. 1А и в табл. 1В Приложения В, а средние значения приведены в сводной табл. 1. Для всех протоколов значения Fidelity лежат не ниже 0.97, что говорит о возможности использования любого из протоколов. В то же время, протоколы с меньшим числом измерений демонстрируют более высокие значения точности реконструкции, что указывает на доминирующий вклад систематических, а не статистических ошибок в общую ошибку точности реконструкции. Иными словами, при выбранном объеме выборки статистическая составляющая ошибки уже мала по сравнению с систематическими эффектами, такими как несовершенная юстировка оптических элементов, медленные дрейфы параметров установки во времени. Тогда сокращение числа измерений и, как следствие, уменьшение общего времени проведения эксперимента приводят к снижению накопления систематических погрешностей и, соответственно, к росту наблюдаемой точности реконструкции для редуцированных протоколов. Заметим, что такая зависимость точности реконструкции от числа измерений обусловлена именно особенностями соотношения статистических и систематических погрешностей в рассматриваемых условиях эксперимента и не должна интерпретироваться как общее правило для любых протоколов.

Дополнительно была исследована возможность томографии смешанных состояний с использованием протокола $A5$. Для начала была проведена реконструкция чистых состояний $\{|\phi_j\rangle\}$ с использованием модели состояния ранга 2 и 3. Результаты представлены в табл. 1В Приложения В. Можно заметить, что при переходе от модели ранга 1 к модели ранга 2 средняя точность реконструкции снижается с 0.99 до 0.98, что свидетельствует о небольших отклонениях приготовленных состояний от заданных. В то же время дальнейшее увеличение ранга модели до 3 не влияет на значения точности реконструкции, поскольку в приготовительной схеме использовалось лишь два кристалла, а значит, даже в случае неполной интерференции, ранг приготовленного состояния не может быть больше 2, и модель с рангом 3 избыточна.

Чтобы оценить эффективность протокола $A5$ для томографии смешанных состояний, были сгенерированы данные, соответствующие результатам измерения состояний рангов 2 и 3. Для этого случайным образом генерировались матрицы плотности, каждая матрица представлялась в виде разложения (8), а данные измерений комбинировались из результатов измерений состояний $\{|\phi_j\rangle\}$ в соотношении, определяемом коэффициентами a_j. Для каждого ранга были сгенерированы результаты измерений 10000 матриц, была проведена их томография и рассчитаны значения Fidelity. Полученные распределения Fidelity представлены на рис. 5, 2В. Видно, что с

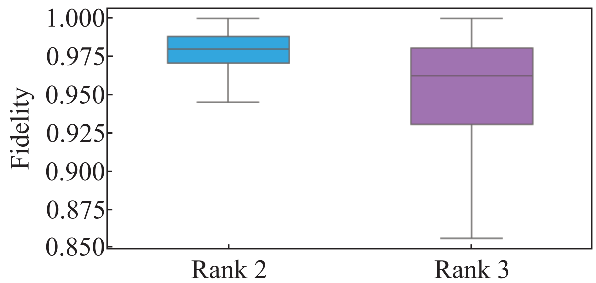


Рис. 5. (Цветной онлайн) Распределения значений F при томографии состояния для протокола $A5$ для состояний рангов 2 и 3

увеличением ранга точность протокола снижается, поскольку растет число параметров, которые необходимо восстановить, но даже для ранга 3 среднее значение Fidelity составляет 0.96, что подтверждает возможность использования данного протокола для томографии смешанных состояний.

5. Заключение. В работе исследован вопрос о полноте протоколов томографии для поляризационных кутритов различных рангов. Показано, что протокол $A5$, состоящий из пяти измерений, представленный в работе [24], является полным для состояний любого ранга. Протокол $B4$, состоящий из четырех измерений, является полным лишь для чистых состояний, как и было заявлено его авторами [28]. Оказалось, что протокол $A5$ также можно редуцировать до протокола $A4$, состоящего из четырех измерений, который является полным для чистых состояний. Более того, был найден протокол $C3$, состоящий всего из трех измерений, который также является полным для чистых состояний. Все исследованные протоколы были апробированы в эксперименте и продемонстрировали высокую точность восстановления тестовых состояний, причем ошибки, по-видимому, связаны скорее с приготовительной, чем с измерительной частью.

Результаты работы могут быть напрямую использованы для отладки квантовых схем, использующих поляризационные кутриты, а подходы, использованные в работе, могут быть применены в задачах томографии кудитов произвольной природы.

Авторы выражают благодарность М. В. Федорову за плодотворные обсуждения.

Приложение А. Алгоритм томографии с использование функции правдоподобия

Рассмотрим серию измерений, где в течение интервала времени t было приготовлено n пар фотонов, $k_{\beta,i}$ – количество зафиксированных событий ($k_{\beta,0}$ – количество раз, когда не зарегистрированы фотоны; $k_{\beta,1}$ – количество раз, когда регистрировалось состояние $|HH\rangle$; $k_{\beta,2}$ – состояние $|HV\rangle$; $k_{\beta,3}$ – состояние $|VV\rangle$), причем $n = k_{\beta,0} + k_{\beta,1} + k_{\beta,2} + k_{\beta,3}$. Вероятности исходов независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами $\lambda_{\beta,i}$ [24]:

$$f(k_{\beta,i}) = \frac{(\lambda_{\beta,i})^{k_{\beta,i}}}{k_{\beta,i}!} \cdot e^{-\lambda_{\beta,i}}, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (\text{A.1})$$

Пусть ρ_0 есть результат решения уравнения (1) методом псевдо-инверсии относительно эмпирических вероятностей $\hat{p}_{\beta,i} = k_{\beta,i}/\sigma_i$. Рассмотрим спектральное разложение $\rho_0 = UDU^\dagger$, где U – унитарная матрица собственных векторов, D – диагональная матрица действительных собственных значений ρ_0 (мы предполагаем, что собственные значения упорядочены по не возрастанию). Приравняем все отрицательные элементы матрицы D к нулю и составим матрицу $\tilde{\psi}_0 = U\sqrt{D}$. Обозначим первые r столбцов данной матрицы как ψ_0 и выполним нормировку $\psi_0 \to \psi_0/\sqrt{\mathrm{Tr}\{\psi_0^\dagger \psi_0\}}$. Матрица $\psi_0\psi_0^\dagger$ является нулевым приближением матрицы плотности.

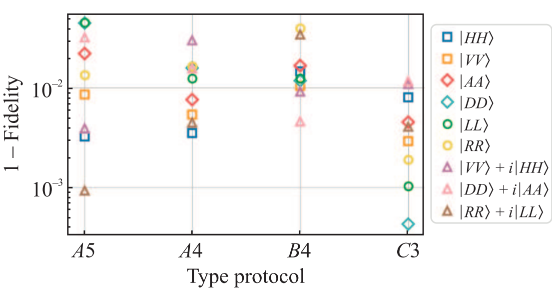


Рис. 1А. (Цветной онлайн) Экспериментальные результаты на основе изучаемых протоколов при восстановлении с рангом 1

Матрица ψ_0, в свою очередь, является хорошим нулевым приближением для более точного метода максимального правдоподобия. Ввиду (A.1) функция правдоподобия определяется произведением пуассоновских вероятностей:

$$\mathrm{L}(\psi) = \prod_\beta \prod_{i=1}^{d} f(k_{\beta,i}|\lambda_{\beta,i}(\psi)),$$
$$\lambda_{\beta,i}(\psi) = \sigma_i \mathrm{Tr}\{P_{\beta,i}\psi\psi^\dagger\}.$$

Более удобно рассмотреть логарифмическое правдоподобие (логарифм от функции правдоподобия):

$$\ln(\mathrm{L}(\psi)) = \ln\left(\prod_\beta \prod_{i=1}^{d} f(k_{\beta,i}|\lambda_{\beta,i}(\psi))\right) \propto$$
$$\propto \sum_\beta \sum_{i=1}^{d} [k_{\beta,i} \cdot \ln \lambda_{\beta,i} - \lambda_{\beta,i}].$$

Слагаемое $\ln(k_{\beta,j}!)$ не влияет на положение экстремума, поэтому им можно пренебречь. Приравняв минимум этой функции к нулю, получим:

$$\sum_\beta \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{k_{\beta,i}}{\lambda_{\beta,i}} - 1\right) \cdot \sigma_i \cdot P_{\beta,i} \cdot \psi = 0.$$

Произведем замену:

$$A(\psi) = \sum_\beta \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{k_{\beta,i}}{p_{\beta,i}}\right) \cdot P_{\beta,i}, \quad Q = \sum_\beta \sum_{i=1}^{d} \sigma_i \cdot P_{\beta,i}.$$

Тогда получим нелинейное уравнение $Q^{-1}A(\psi)\psi = \psi$, которое можно решить относительно ψ с помощью метода простых итераций. Результирующая матрица плотности ранга не более r тогда вычисляется по формуле $\rho = \psi\psi^\dagger/\mathrm{Tr}\{\psi^\dagger\psi\}$. Такая корневая параметризация гарантирует физичность получаемой матрицы плотности.

Приложение Б. Процедура очищения состояния и матрица информации

Для начала рассмотрим алгоритм процедуры очищения состояния [29]. Пусть матрица плотности ρ ранга r и размерности $d \times d$. Если c_κ и μ_κ ее собственные векторы и ненулевые собственные значения соответственно, тогда вместо исходной матрицы плотности можно рассматривать “очищенный” вектор состояния вида:

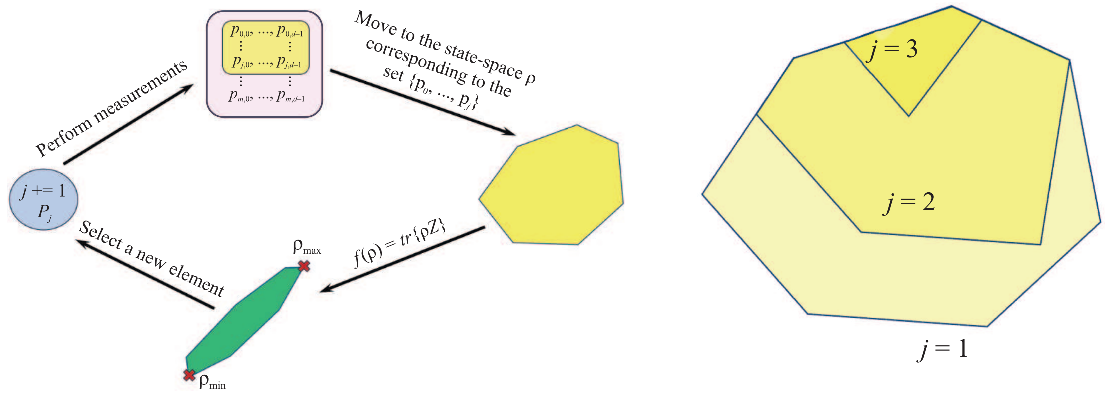
$$|c\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_1}c_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\mu_r}c_r \end{pmatrix}.$$

Амплитуду квантового процесса для чистого состояния ($r = 1$) можно представить в виде:

$$M_\kappa = X_\kappa |c\rangle\,,$$

где X_κ – κ-ая строка для протокольного измерения P. В случае очищенного состояния данная строка обобщается следующим образом:

$$X_\kappa^l = |e^l\rangle^\dagger \otimes X_\kappa,$$



(a) (b)

Рис. 1В. (Цветной онлайн) Интерационный процесс адаптивной сжимающей томографии: (a) – Схема итерационного процесса; (b) – уменьшение гиперплоскости в зависимости от итерации i

где $|e^l\rangle$ – ортонормированные базисные состояния. Для ранга r положим:

$$|e^1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |e^2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$|e^{r-1}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; |e^r\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

На основе амплитуды квантового процесса можно построить интенсивность генерации событий (ожидаемое количество событий в схеме в единицу времени):

$$\gamma_\kappa = M_\kappa^\dagger M_\kappa = \langle c|\,\Lambda_\kappa\,|c\rangle\,,$$

откуда получаем оператор интенсивности процесса:

$$\Lambda_\kappa = \sum_{l=1}^{r} \left(X_\kappa^l\right)^\dagger X_\kappa^l.$$

Отметим, что при времени экспозиции t_κ для нашего эксперимента верно следующее равенство $\lambda_\kappa = \gamma_\kappa t_\kappa$. Теперь перейдем от комплексных векторов и матриц к действительным следующим образом:

$$c \to \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(c) \\ \mathrm{Im}(c) \end{pmatrix}, \quad M \to \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(M) \\ \mathrm{Im}(M) \end{pmatrix},$$

$$X_\kappa^l \to \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(X_\kappa^l) & -\mathrm{Im}(X_\kappa^l) \\ \mathrm{Im}(X_\kappa^l) & \mathrm{Re}(X_\kappa^l) \end{pmatrix}.$$

Расхождение между точным вектором состояния и его реконструкцией следует интерпретировать как проявление статистических флуктуаций, неизбежно возникающих из-за фундаментально вероятностной природы квантовой механики. Количественная характеристика уровня таких флуктуаций задается матрицей полной информации, которая вводится в работах [21, 29], которая в наших обозначениях соответствует формуле (3). Если ввести разность $|dc\rangle$ между точным и реконструированным векторами, тогда уровень статистических флуктуаций описывается с помощью:

$$2\,\langle dc|\,H\,|dc\rangle = \chi^2(2dr - r^2).$$

Тогда если протокол является полным, то симметричная действительная матрица H имеет ровно $2dr - r^2$ положительных собственных значений. При этом оставшиеся r^2 собственных значений равны нулю.

Приложение В. Алгортим адаптивной сжимающей томографии

Приведем ниже алгоритм адаптивной сжимающей томографии, изложенный в публикациях [11–13].

Будем проверять полноту протокола $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$, состоящего из m измерений, для состояния с известным рангом r. Для начала выберем произвольное измерение P_j, здесь j будет означать номер итерации процесса, поэтому изначально $j = 1$. Сгенерируем матрицу плотности ρ ранга r и размерности $d \times d$, а также произволь-

Table 1B. Fidelity для исследуемых протоколов

Rank	$\|HH\rangle$	$\|VV\rangle$	$\|AA\rangle$	$\|DD\rangle$	$\|RR\rangle$	$\|LL\rangle$	$\|VV\rangle + \mathrm{i}\cdot\|\mathrm{HH}\rangle$	$\|DD\rangle + \mathrm{i}\cdot\|\mathrm{AA}\rangle$	$\|RR\rangle - \mathrm{i}\cdot\|\mathrm{LL}\rangle$
Fidelity of the protocol $A5$									
1	0.9968	0.9915	0.9928	0.9908	0.9939	0.9935	0.9961	0.9874	0.9991
2	0.9968	0.9915	0.9781	0.9554	0.9866	0.9550	0.9961	0.9682	0.9991
3	0.9968	0.9915	0.9781	0.9554	0.9866	0.9550	0.9961	0.9682	0.9991
Fidelity of the protocol $A4$									
1	0.9965	0.9946	0.9925	0.9843	0.9835	0.9876	0.9702	0.9844	0.9955
Fidelity of the protocol $B4$									
1	0.9985	0.9949	0.9909	0.9954	0.9910	0.9921	0.9937	0.9955	0.9938
Fidelity of the protocol $C3$									
1	0.9920	0.9971	0.9955	0.9994	0.9981	0.9989	0.9891	0.9884	0.9959

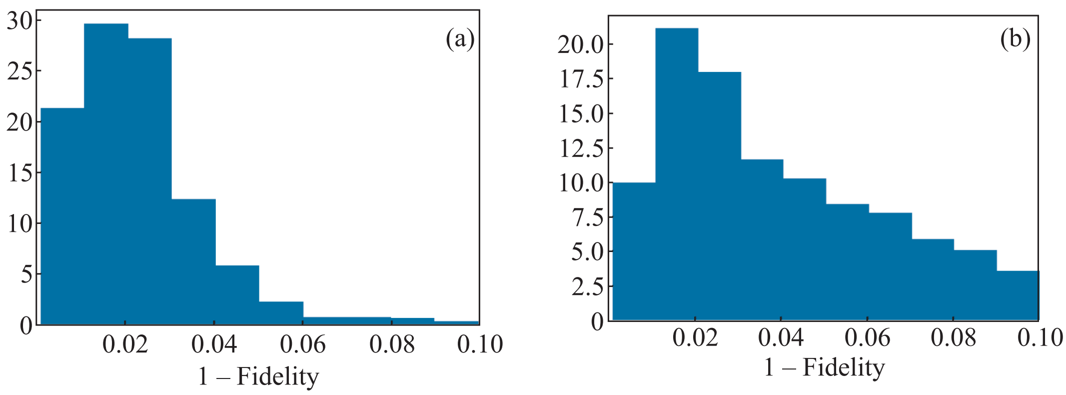


Рис. 2B. (Цветной онлайн) Распределения значений $1 - F$ при томографии состояния для протокола $A5$: (a) – Томография для состояния ранга 2; (b) – томография для состояния ранга 3

ную комплексную матрицу Z размерности $d \times d$, которая пригодится в дальнейшем. Для численного моделирования использовалась функция, генерирующая случайные матрицы заданного ранга r с размерностью $d \times d$. Элементы матрицы $Q \in \mathbb{C}^{r\times d}$ задаются как сумма случайных независимых нормально распределенных вещественной и мнимой частей: $Q_{ab} = X_{ab} + i\,Y_{ab}$, где $X_{ab}, Y_{ab} \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$. Полученная положительно определенная матрица строится в виде

$$\rho = \frac{Q^\dagger Q}{\mathrm{Tr}\{Q^\dagger Q\}},$$

это гарантирует, что ρ имеет единичный след и заданный ранг r. В качестве начальных условий алгоритма используется 500 таких матриц. Распишем итеративный процесс (см. рис. 1B):

1. Посчитаем для выбранного P_j и матрицы плотнотности ρ частоты измерения $\sum_{l=0}^{d-1} k_{lj} = 1$.

2. Используя данные частоты k_{lj} и метод максимального правдоподобия, получим восстановленную матрицу плотности R.

3. Введем функцию $f(R) = \mathrm{Tr}\{ZR\}$ и $s_{\mathrm{cvx}} = (f_{\max,j} - f_{\min,j})/(f_{\max,1} - f_{\min,1})$. Можно доказать, что при $f_{\max,j} = f_{\min,j}$ протокол является информационно полным. Поэтому при $s_{\mathrm{cvx}} = 0$ (но для численного вычисления $s_{\mathrm{cvx}} \approx 0$) протокол является полным. Считаем s_{cvx}.

4. Если $s_{\mathrm{cvx}} \approx 0$, то можно остановить итеративный процесс, если нет, то выбирается другое измерение и пункты (1)–(3) повторяются уже для набора $\{P_1, ..., P_{j+1}\}$.

Замечания:

1. Изначальная матрица плотности ρ генерируется случайно, но с заданным рангом r. Для это генерируется матрица A размерностью $r \times d$, после чего получим матрицу плотности $\rho = \frac{A^\dagger A}{\mathrm{Tr}\{A^\dagger A\}}$.

2. Матрица Z должна быть полноранговой, чтобы избежать каких-то критических случаев, например,

   (a) $Z = 1/d$. В таком случае $f(\rho) = 1$ для любого ρ.

(b) $Z = |\psi\rangle\langle\psi|$, где $|\psi\rangle$ может быть таким чистым состоянием, что для любого ρ, $s_{\text{cvx}} = 0$.

Для избежания такив случаев Z рекомендуется делать полноранговой.

3. Можно с помощью этропии определять, какое P_{j+1} выбрать следующим. Для этого можно использовать энтропию фон-Неймана $S(\rho^*) = -\mathrm{Tr}\{\rho^* \log(\rho^*)\}$ или линейную энтроию $S(\rho^*) = 1 - \mathrm{Tr}\{(\rho^*)^2\}$. Тогда в итерационном алгоритме добавятся пункт (5), где сначала нужно будет найти ρ_a^*, при котором будет минимальное $S(\rho_a^*)$. А далее выбирается P_{j+1}, который является самым близким к собственному базису ρ_a^*. Данный способ лучше применять в многочастичных системах. Так как это упрощает экспериментальную реализацию полученных базисов, но при этом может увеличить их количество, а соответственно, и время измерения.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств гранта Российского научного фонда # 22-12-00263-П, `https://rscf.ru/project/22-12-00263/`. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th anniversary edition (Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom 2010).
2. H. J. Kimble, “The quantum internet”, Nature **453**, 1023 (2008).
3. M. Erhard, R. Fickler, M. Krenn, and A. Zeilinger, “Experimental greenbergerhornezeilinger entanglement beyond qubits”, Phys. Rev. Lett. **123**(7), 070505 (2019).
4. M. Ringbauer, M. Meth, L. Postler, R. Stricker, R. Blatt, Ph. Schindler, and Th. Monz, “A universal qudit quantum processor with trapped ions”, Nat. Phys. **18**(9), 1053 (2022).
5. Y. Jo, T. Jeong, N. H. Park, Z. Kim, D.-G. Im, K. Park, and Y. S. Ihn, “Security analysis of qutrit quantum secret sharing with linear optical correlation measurement”, Sci. Rep. **15**, 19836 (2025).
6. I. V. Zalivako, A. S. Nikolaeva, A. S. Borisenko, A. E. Korolkov, P. L. Sidorov, K. P. Galstyan, N. V. Semenin, V. N. Smirnov, M. A. Aksenov, K. M. Makushin, E. O. Kiktenko, A. K. Fedorov, I. A. Semerikov, K. Yu. Khabarova, and N. N. Kolachevsky, “Towards a Multiqudit Quantum Processor Based on a $^{171}\mathrm{Yb}^+$ Ion String: Realizing Basic Quantum Algorithms”, Quantum Reports **7**(2), 19 (2025).
7. W. K. Wootters and B. D. Fields, “Optimal statedetermination by mutually unbiased measurements”, Ann. Physics **191**, 363 (1989).
8. T. Durt, B.-G. Englert, I. Bengtsson, and K. Życzkowski, “On mutually unbiased bases”, Int. J. Quantum Inf. **8**(4), 535 (2010).
9. T. Heinosaari, L. Mazzarella, and M. M. Wolf, “Quantum tomography under prior information”, Commun. Math. Phys. **318**, 355 (2013).
10. D. Gross, Y.-K. Liu, S. T. Flammia, S. Becker, and J. Eisert, “Quantum state tomography via compressed sensing”, Phys. Rev. Lett. **105**(15), 150401 (2010).
11. D. Ahn, Y. S. Teo, H. Jeong, F. Bouchard, F. Hufnagel, E. Karimi, D. Koutnỳ, J. Řeháček, Z. Hradil, G. Leuchs, and L. L. Sánchez-Soto, “Adaptive compressive tomography with no a priori information”, Phys. Rev. Lett. **122**(10), 100404 (2019).
12. D. Ahn, Y. S. Teo, H. Jeong, D. Koutný, J. Řeháček, Z. Hradil, G. Leuchs, and L. L. Sánchez-Soto, “Adaptive compressive tomography: A numerical study”, Phys. Rev. A **100**(1), 012346 (2019).
13. Y. S. Teo, G. I. Struchalin, E. V. Kovlakov, D. Ahn, H. Jeong, S. S. Straupe, S. P. Kulik, G. Leuchs, and L. L. Sánchez-Soto, “Objective compressive quantum process tomography”, Phys. Rev. A **101**(2), 022334 (2020).
14. S. T. Flammia, A. Silberfarb, and C. M. Caves, “Minimal informationally complete measurements for pure states”, Found. Phys. **35**, 1985 (2005).
15. Y. Wang and J. Shang, “Pure state really informationally complete with rank-1 povm”, Quantum Information Processing **17**, 51 (2018).
16. C. Carmeli, T. Heinosaari, J. Schultz, and A. Toigo, “How many orthonormal bases are needed to distinguish all pure quantum states?”, Eur. Phys. J. D **69**, 1 (2015).
17. C. Carmeli, T. Heinosaari, M. Kech, J. Schultz, and A. Toigo, “Stable pure state quantum tomography from five orthonormal bases”, Europhysics Letters **115**(3), 30001 (2016).
18. A. V. Burlakov, M. V. Chekhova, O. A. Karabutova, D. N. Klyshko, and S. P. Kulik, “Polarization state of a biphoton: Quantum ternary logic”, Phys. Rev. A **60**(6), R4209 (1999).
19. A. V. Burlakov, L. A. Krivitski, S. P. Kulik, G. A. Maslennikov, and M. V. Chekhova, “Measurement of Qutrits”, Opt. Spectrosc. **94**(5), 684 (2002).
20. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, S. P. Kulik, G. A. Maslennikov, A. A. Zhukov, C. H. Oh, and M. K. Tey, “Qutrit State Engineering with Biphotons”, Phys. Rev. Lett. **93**(23), 230503 (2004).

21. Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, L. A. Krivitsky, S. P. Kulik, A. N. Penin, A. A. Zhukov, L. Ch. Kwek, Ch. H. Oh, and M. K. Tey, "Statistical reconstruction of qutrits", Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics **70**(4), 042303 (2004).
22. B. P. Lanyon, T. J. Weinhold, N. K. Langford, J. L. O'Brien, K. J. Resch, A. Gilchrist, and A. G. White, "Manipulating Biphotonic Qutrits", Phys. Rev. Lett. **100**(6), 060504 (2008).
23. S. P. Kulik and S. S. Straupe, "Entanglement of biphoton-based qutrits and ququarts", Laser Phys. **24**(9), 94007 (2014).
24. N. A. Borshchevskaya, D. R. Chupakhin, B. I. Bantysh, K. G. Katamadze, S. P. Kulik, and Yu. I. Bogdanov, "Tomography of polarization qutrits in the standard basis", Radiophys. Quantum Electron. **67**(1), 64 (2024).
25. J. Finkelstein, "Pure-state informationally complete and really complete measurements", Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics **70**(5), 052107 (2004).
26. Yu. I. Bogdanov, "Unified statistical method for reconstructing quantum states by purification", JETP **108**(6), 928 (2009).
27. S. Diamond and S. Boyd, "CVXPY: A pythonembedded modeling language for convex optimization", J. Mach. Learn. Res. **17**(83), 1 (2016).
28. M. V. Fedorov, C. C. Mernova, and K. V. Sliporod, "A protocol of measurements providing direct, complete and single-valued recover of all a-priori unknown parameters of biphoton polarization qutrits", arXiv preprint arXiv:2401.15137 (2024).
29. Yu. I. Bogdanov, "Statistical inverse problem: root approach", arXiv preprint quant-ph/0312042 (2003).