Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 3, с. 207 – 212

Четвертая ветвь неустойчивости волны Стокса и зависимость соответствующих инкрементов от нелинейности

А. О. Короткевич[1], *А. О. Прокофьев*

Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 20 ноября 2025 г.
После переработки 9 декабря 2025 г.
Принята к публикации 12 декабря 2025 г.

В рамках массивных вычислений мы достигли четвертой ветви супергармонической неустойчивости волн Стокса. Используя полученные результаты, удалось проверить феноменологические формулы зависимости инкрементов роста, соответствующих разным ветвям неустойчивости, от параметра нелинейности (крутизны, определяемой как отношение высоты волны к ее длине) в области появления новой ветви неустойчивости и вдали от нее. Продемонстрировано, что формулы, одна из которых получена как подгонка методом наименьших квадратов по данным первых трех ветвей неустойчивости, а другая – просто феноменологическая асимптотика, работают также и для четвертой ветви неустойчивости. Приведены скорректированные пределы применимости формул. Эти результаты позволяют не вычислять последующие ветви неустойчивости, если допустима ошибка менее 10 %. Приводятся инкременты роста для всех четырех ветвей неустойчивости.

DOI: 10.7868/S3034576626020079

Введение. Исследование решения волны Стокса (одномерная периодическая волна, распространяющаяся с постоянной скоростью без изменения формы, мы пренебрегаем капиллярностью по сравнению с гравитацией) является классической задачей гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости и, возможно, первым нелинейным решением гидродинамической задачи [1, 2]. Лонгетт–Хиггинс [3] выдвинул гипотезу, что волна Стокса становится нестабильной при приближении к предельной волне Стокса (волна максимальной амплитуды с образованием сингулярности на гребне). В частности, для супергармонической неустойчивости (а именно, неустойчивости возмущения с длиной волны, меньшей, чем период/длина волны Стокса Λ) в каждом экстремуме гамильтониана с ростом крутизны $s = H/\Lambda$, определяемой как отношение максимальной высоты волны H (разница в высоте поверхности между самой глубокой точкой впадины и гребнем) к Λ с ростом крутизны появляется новая ветвь неустойчивости (для первых двух ветвей супергармонической неустойчивости см. [4–6], третья была подтверждена в [7]). В недавней работе [8] было показано, что как субгармоническая, так и супергармоническая неустойчивости становятся одинаково важными при приближении к предельной волне Стокса с крутизной $s_{\max}$.

В недавней работе [7] было представлено подробное исследование супергармонической неустойчивости. Изучалась устойчивость малых возмущений в линейной аппроксимации, поэтому искались решения с экспоненциальным ростом в начале развития неустойчивости, вида $\sim e^{\lambda t}$. Было показано, что для малых скоростей роста возмущения (инкрементов) $\lambda < 1$ сразу после прохождения каждого порога крутизны s_n (здесь n – номер ветви неустойчивости), соответствующего очередному экстремуму гамильтониана и появлению новой ветви неустойчивости, можно предложить универсальную зависимость. Данные из первых трех ветвей супергармонической неустойчивости были использованы для нелинейной подгонки по методу наименьших квадратов следующей формулы:

$$\lambda^2 \approx (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)\ln(x), \qquad (1)$$

где λ – скорость роста неустойчивости, $x = (s_{\max} - s)/(s_{\max} - s_n)$ – безразмерная крутизна, а значения подобранных констант $b_0 = -0.140023$, $b_1 = 0.0366936$, $b_2 = -0.0129251$ и $b_3 = 0.00125835$. В той же статье [7] была представлена следующая наиболее точная на момент публикации оценка крутизны предельной волны Стокса $s_{\max} = 0.141063483980 \pm 10^{-12}$. Крутизны, соответствующие порогам появления новых ветвей супергармонической неустойчивости (экстремумы гамильтониана) для первых че-

[1]e-mail: A.Korotkevich@Skoltech.ru

тырех ветвей, имели следующие значения (табл. 1 в [7]): $s_1 = 0.136603556$, $s_2 = 0.140796584$, $s_3 = 0.141049627$, и $s_4 = 0.141062741$, абсолютная погрешность $\leq 10^{-7}$.

Для больших инкрементов роста $\lambda > 1$, существенно за порогами неустойчивости, было предложено асимптотическое приближение:

$$\lambda^2 \sim 1/(s_{\max} - s), \tag{2}$$

Поскольку эти феноменологические зависимости были получены с использованием данных из первых трех ветвей супергармонической неустойчивости, необходимо проверить их с использованием данных из следующей (четвертой) ветви. Следует отметить, что относительная разница в крутизне между порогом появления четвертой ветви s_4 и крутизной предельной волны Стокса $s_{\max}$ составляет $(s_{\max} - s_4)/s_{\max} \simeq 5.27 \times 10^{-6}$, что меньше 0.001 %, поэтому она является почти предельной волной, что приводит к экстремальным требованиям к количеству точек даже на неоднородной сетке [9].

В этой статье мы приводим первые данные по четвертой ветви неустойчивости волны Стокса. Были рассчитаны темпы роста (инкременты) для двух волн Стокса за пределами порога неустойчивости s_4, доступных в коллекции высокоточных волн Стокса в [10, 11]. Для самой крутой волны относительная разница от предельной волны Стокса была $< 3.59 \times 10^{-6}$. Для обеих волн получено подтверждение, что обе феноменологические зависимости (1) и (2) дают разумные приближения для инкрементов.

Основные уравнения. Здесь мы приведем краткое введение, следуя подходу, использованному в [10, 12] и [7]. Рассмотрим двумерное потенциальное течение (скорость задается формулой $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\Phi$, где Φ – потенциал скорости) идеальной несжимаемой ($\mathrm{div}\mathbf{v} = \Delta\Phi = 0$) жидкости под действием постоянного ускорения свободного падения g, направленного антипараллельно оси y (сверху вниз, в направлении $-\infty$), без учета капиллярности. Жидкость занимает полуплоскость $-\infty < y < \eta(x,t)$, где $\eta(x,t)$ – отклонение поверхности жидкости от невозмущенного состояния, которое представляет собой плоскую поверхность $y = 0$. Рассмотрим периодический случай $-\Lambda/2 < x < \Lambda/2$ (напомним, что Λ – период волны Стокса). Вместо рассмотрения зависимой от времени области, занимаемой жидкостью, удобно ввести зависимое от времени конформное отображение $z(w,t) = x(u,v;t) + \mathrm{i}y(u,v;t)$ фиксированной области (нижней комплексной полуплоскости $\mathbb{C}^-$) новой переменной $w = u + \mathrm{i}v$, $u, v \in \mathbb{C}R$ в зависимую от времени область жидкости в физической комплексной плоскости $z = x + \mathrm{i}y$. Поскольку нас интересуют Λ-периодические решения в x, мы также рассматриваем один пространственный период ($-\pi < u < \pi$ и $-\infty < v < 0$) в плоскости w. Естественно воспользоваться преобразованием Фурье:

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\exp(-\mathrm{i}ku)\,\mathrm{d}u, \tag{3}$$

$$f(u) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \exp(\mathrm{i}ku)\,.$$

Затем можно записать уравнения Танвера–Дьяченко (здесь и далее черта $\bar{f}$ означает комплексное сопряжение):

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \mathrm{i}\,(UR_u - RU_u)\,, \tag{4}$$

$$U = \hat{P}^-(R\bar{V} + \bar{R}V), \quad B = \hat{P}^-(|V|^2), \tag{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \mathrm{i}\,[UV_u - RB_u] + g(R-1). \tag{6}$$

Здесь $\Psi(x,t) = \Phi(x,\eta(x,t),t)$ – потенциал скорости, вычисленный на поверхности жидкости η, остальные введенные обозначения:

$$R \equiv \frac{1}{z_u} \quad \text{и} \quad V \equiv \frac{\mathrm{i}(\Psi + \mathrm{i}\hat{H}\Psi)_u}{z_u}. \tag{7}$$

Эти уравнения были первоначально выведены С. Танвиром в [13] для периодических граничных условий и позже независимо получены А. И. Дьяченко в [14] для бесконечной области с затухающими граничными условиями. Мы также используем преобразование Гильберта $(\hat{H}f(u))_k = \mathrm{i}\,\mathrm{sign}(k)\,f_k$ и оператор проектора любой функции $f(u)$, определяемой рядом Фурье (3) в пространство функций, аналитических в нижней полуплоскости $w \in \mathbb{C}^-$, а именно $\hat{P}^- \equiv \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\hat{H})$.

Волна Стокса является решением уравнений (4)–(6), распространяющимся с постоянной скоростью c без изменения формы, поэтому как R, так и V являются функциями только $u - ct$. Для изучения линейной устойчивости волны Стокса рассмотрим малое возмущение такого решения R, V уравнений (5)–(6) в следующей форме: $R \to R + \delta R$, $V \to V + \delta V$. После линеаризации уравнений (4)–(6) относительно возмущений δR и δV, распространяющихся вместе с волной, целесообразно искать экспоненциальную зависимость возмущений от времени:

$$\begin{aligned} \delta R(u-ct,t) &= e^{\lambda t}\delta R_1(u-ct) + e^{\bar{\lambda} t}\delta R_2(u-ct), \\ \delta V(u-ct,t) &= e^{\lambda t}\delta V_1(u-ct) + e^{\bar{\lambda} t}\delta V_2(u-ct), \end{aligned} \tag{8}$$

где индекс 1 и его комплексное сопряжение 2 используются для того, чтобы отличать различные функции u. $\mathrm{Re}(\lambda)$ – скорость роста возмущения. Тогда:

$$\begin{aligned}\delta\bar{R}(u-ct,t) &= e^{\bar{\lambda}t}\delta\bar{R}_1(u-ct)+e^{\lambda t}\delta\bar{R}_2(u-ct),\\ \delta\bar{V}(u-ct,t) &= e^{\bar{\lambda}t}\delta\bar{V}_1(u-ct)+e^{\lambda t}\delta\bar{V}_2(u-ct).\end{aligned} \quad (9)$$

Динамика общих возмущений может быть представлена как суперпозиция решений с различными λ. Таким образом, наша цель состоит в том, чтобы найти возможные значения для λ. Подставляя (8) и (9) в линеаризованные относительно возмущений уравнения (4)–(6) и собирая слагаемые $\sim e^{\lambda t}$, получаем:

$$\begin{gathered}\lambda\delta R_1 = c(\delta R_1)_u + \\ +\mathrm{i}\left[\delta U_1 R_u + U(\delta R_1)_u - \delta R_1 U_u - R(\delta U_1)_u\right],\\ \lambda\delta\bar{R}_2 = c(\delta\bar{R}_2)_u - \\ -\mathrm{i}\left[\delta\bar{U}_2\bar{R}_u + \bar{U}(\delta\bar{R}_2)_u - \delta\bar{R}_2\bar{U}_u - \bar{R}(\delta\bar{U}_2)_u\right],\\ \lambda\delta V_1 = c(\delta V_1)_u + g\delta R_1 + \\ +\mathrm{i}\left[\delta U_1 V_u + U(\delta V_1)_u - \delta R_1 B_u - R(\delta B_1)_u\right],\\ \lambda\delta\bar{V}_2 = c(\delta\bar{V}_2)_u + g\delta\bar{R}_2 - \\ -\mathrm{i}\left[\delta\bar{U}_2\bar{V}_u + \bar{U}(\delta\bar{V}_2)_u - \delta\bar{R}_2\bar{B}_u - \bar{R}(\delta\bar{B}_2)_u\right],\end{gathered} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}\delta U_1 &= \hat{P}^-(\delta R_1\bar{V} + R\delta\bar{V}_2 + \delta\bar{R}_2 V + \bar{R}\delta V_1),\\ \delta\bar{U}_2 &= \hat{P}^+(\delta\bar{R}_2 V + \bar{R}\delta V_1 + \delta R_1\bar{V} + R\delta\bar{V}_2),\\ \delta B_1 &= \hat{P}^-(\delta V_1\bar{V} + V\delta\bar{V}_2),\\ \delta\bar{B}_2 &= \hat{P}^+(\delta\bar{V}_2 V + \bar{V}\delta V_1).\end{aligned}$$

Здесь $\hat{P}^+(f(u)) \equiv \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\hat{H})f$ – проектор на класс функций, аналитических в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$ w.

Уравнения (10) с учетом периодичности $\delta R_1, \delta\bar{R}_2, \delta V_1, \delta\bar{V}_2$ в u образуют задачу о собственных значениях для собственного вектора

$$\mathbf{x} = (\delta R_1, \delta\bar{R}_2, \delta V_1, \delta\bar{V}_2)^T, \quad (11)$$

где T означает транспонирование.

Численный метод. Для решения в виде волны Стокса мы вычислили R и V в уравнениях (10), используя высокоточные волны Стокса, доступные в [11]. Задача на собственные значения, заданная уравнениями (10), решалась с помощью метода сдвига-инверсии (shift-invert) в сочетании с алгоритмом Арнольди для собственных значений наибольшей величины, в частности использовалась реализация ARPACK-NG (доступна в [15]). Полное описание метода можно найти в [7]. Мы представляем каждую функцию $\delta R_1, \delta\bar{R}_2, \delta V_1, \delta\bar{V}_2$ оборванным рядом Фурье из N гармоник. Алгоритм Арнольди наиболее эффективен при поиске собственных значений наибольшей величины. Предположим, что у нас есть догадка о собственном значении σ. Тогда мы можем рассмотреть модифицированную задачу на собственные значения [16]:

$$(A-\sigma I)^{-1}\mathbf{x} = \nu\mathbf{x}, \quad (12)$$

собственные значения которой ν_j связаны со собственными значениями исходной задачи λ_j простым соотношением:

$$\nu_j = \frac{1}{\lambda_j - \sigma}. \quad (13)$$

Очевидно, что если наша догадка σ достаточно близка к искомому собственному значению λ_j, то величина собственного значения ν_j будет наибольшей.

Расчеты были бы невозможны без применения подхода с неоднородной сеткой, который был впервые введен в [9]. Для нашей задачи этот подход подробнее описан в приложении к [7]. Для примера, разрешение в $N = 45000$ гармоник на неоднородной сетке будет соответствовать $N \sim 10^9$ в случае равномерно распределенных точек. Для удобства ускорение свободного падения $g = 1$ во всех вычислениях.

Основные результаты. Принимая во внимание асимптотическое поведение (2) и значение инкремента для первой ветви неустойчивости $\lambda_{1,s_{\mathrm{last}}} \simeq 8.99799$ для самой крутой волны из [7] с крутизной $s_{\mathrm{last}} = H/\Lambda = 0.1410597062844507$, ближайшей к порогу четвертой ветви неустойчивости $s_4 = 0.141062741$, можно было бы ожидать, что значение коэффициента роста для первой (наиболее сильной) ветви неустойчивости $\lambda_{1,s_4} \approx \lambda_{1,s_{\mathrm{last}}}\sqrt{(s_{\max}-s_{\mathrm{last}})(s_{\max}-s_4)} \simeq 20$. В коллекции волн Стокса доступны только две волны с крутизной, превышающей s_4: $s_{\mathrm{new},1} = 0.1410627532159434$ и $s_{\mathrm{new},2} = 0.1410629773898305$. Соответствующие оценки инкрементов роста для первой ветви супергармонической неустойчивости составляют $\lambda_{1,s_{\mathrm{new},1}} \simeq 20.458$ and $\lambda_{1,s_{\mathrm{new},2}} \simeq 24.571$. В результате мы выбрали оценку для собственных значений $\sigma = 27.0$ для алгоритма сдвига-инверсии. Ограничение по памяти (RAM) на доступных компьютерах составило примерно 2 ТиБ = 2^{41} байт, что позволило использовать максимальное количество гармоник $N = 180224$ на неоднородной сетке. Для проверки сходимости полученного результата относительно разрешения и для оценки количества точных разрядов мантиссы мы также использовали немного меньшее разрешение $N = 163840$. Решение задачи на собственные значения (12) с использованием алгоритма Арнольди для нахождения 64 собственных значений с наибольшими величинами заняло около 40 ч на рабочей станции с 48 вычислительными ядрами (2× AMD EPYC 74F3 на частоте 3.2 ГГц). Заметим, что несмотря на то, что количество гармоник в 4 раза больше, чем для волны с максимальной крутизной из предыдущей работы [7] (где использовалось 128 ГиБ памяти), требования к памяти возрастают в $4^2 = 16$ раз, поскольку вычислялась полная матрица линеаризованной системы (10).

Для обеих доступных волн Стокса невязка уравнений была значительно выше, чем в предыдущей работе [7] – на уровне 10^{-8} из-за ограничения объема памяти, которое не позволяет увеличить число гармоник. Более высокая точность достижима с помощью более совершенного подхода [17], не требующего создания всей матрицы для метода сдвига–инверсии, что позволило бы значительно увеличить N. Таким образом, текущую работу можно считать первым подходом к решению этой задачи. Результаты для обеих волн $s_{\rm new,1}$ и $s_{\rm new,2}$ представлены в табл. 1 и 2. Правилом для выбора собственных значений является требование, чтобы действительная часть была, по крайней мере, на несколько порядков больше, чем мнимая. Учитывая относительно высокую невязку для исходного уравнения, мы ожидали получить сравнительно большие ненулевые мнимые части. Дополнительным способом проверки правильности выбора было наблюдение за тем, остается ли действительная часть практически постоянной при изменении разрешения, что, как можно видеть, всегда подтверждалось.

Таблица 1. Инкременты роста неустойчивости для волны Стокса с крутизной $H/\Lambda = s_{\rm new,1} = 0.1410627532159434$. Левая колонка – номер ветви неустойчивости. Верхние значения в каждой строке относятся к более низкому разрешению $N = 163840$, нижние – к более высокому разрешению $N = 180224$. Крайняя правая колонка показывает относительную разницу в инкременте λ между этими двумя разрешениями

#	Re(λ)	Im(λ)	$\lvert\Delta\lambda\rvert/\lvert\lambda\rvert$
1	20.5179856806 20.5179856816	3.2×10^{-10} 6.0×10^{-11}	5×10^{-11}
2	4.725163039323 4.725163039336	-3.0×10^{-11} -6.5×10^{-11}	3×10^{-12}
3	1.0783329973 1.0783329964	-8.5×10^{-9} -8.4×10^{-9}	9×10^{-10}
4	0.0418722 0.0418706	-1.3×10^{-5} -1.4×10^{-5}	4×10^{-5}

В случае волны с крутизной $H/\Lambda = s_{\rm new,1} = 0.1410627532159434$, как рассчитано выше, оценка максимального инкремента, соответствующего первой ветви супергармонической неустойчивости, с использованием (2) дает $\lambda_{1,s_{\rm new,1}} \simeq 20.46$, в то время как реальное значение в табл. 1 составляет ≈ 20.52, таким образом, относительная разница составляет около 0.3 %, что является хорошей точностью для простой асимптотики.

Аппроксимацию скорости роста второй ветви неустойчивости можно получить следующим образом. Для самой крутой волны $s_{\rm last} = H/\Lambda = 0.1410597062844507$, о которой сообщается в [7] инкремент для второй ветви $\lambda_{2,s_{\rm last}} \simeq 2.0678519897$, таким образом, используя (2), можно приблизительно оценить $\lambda_{2,s_{\rm new,1}} \approx \approx \lambda_{2,s_{\rm last}}\sqrt{(s_{\max}-s_{\rm last})(s_{\max}-s_{\rm new,1})} \simeq 4.7015$. Сравнивая с реальным значением 4.7251630393 в табл. 1, можно утверждать, что относительная точность приближения составляет около 0.3 %, как и для предыдущей ветви.

Полученный в [7] инкремент для третьей ветви неустойчивости для волны Стокса с крутизной $s_{\rm last}$ составлял $\lambda_{3,s_{\rm last}} \simeq 0.439824025$. Не совсем ясно, какую приблизительную формулу тут использовать, поскольку мы находимся на границе применимости формул (1) и (2). Попробуем использовать обе. Используя (2) для $x = (s_{\max}-s_{\rm new,1})/(s_{\max}-s_3)$, получаем $\lambda_{3,s_{\rm new,1}} \approx \lambda_{3,s_{\rm last}}\sqrt{(s_{\max}-s_{\rm last})(s_{\max}-s_{\rm new,1})} \simeq \simeq 0.999997$, что отличается от реального значения 1.07833300 в табл. 1 на 7 %. Используя (1) для $x = (s_{\max}-s_{\rm new,1})/(s_{\max}-s_3)$, можно получить приближение $\lambda_{3,s_{\rm new,1}} \approx 0.6375$, которое отличается на 41 %. Таким образом, можно сделать вывод, что (1) перестает хорошо работать еще до порога $\lambda = 1$, в то время как асимптотическое приближение (2) работает достаточно хорошо уже при $\lambda > 0.5$.

И, наконец, для новой четвертой ветви супергармонической неустойчивости мы можем использовать только формулу (1). Используя значение $x = = (s_{\max}-s_{\rm new,1})/(s_{\max}-s_4)$, получаем приближение $\lambda_{4,s_{\rm new,1}} \approx 0.04368$, которое отличается на 4 % от реального значения 0.04187 в табл. 1.

Для волны с крутизной $H/\Lambda = s_{\rm new,2} = = 0.1410629773898305$, которая значительно дальше от порога четвертой ветви супергармонической неустойчивости s_4, приближение максимальной скорости роста, соответствующей первой ветви супергармонической неустойчивости, с использованием (2) (см. полное описание выше) дает $\lambda_{1,s_{\rm new,2}} \simeq 24.57$, в то время как реальное значение в табл. 2 составляет ≈ 24.65, что соответствует относительной разнице около 0.3 % (как и для $s_{\rm new,1}$).

Таблица 2. Инкременты роста неустойчивости для волны Стокса с крутизной $H/\Lambda = s_{\text{new},2} = 0.1410629773898305$. Как и ранее, левая колонка представляет собой номер ветви неустойчивости; верхние значения в каждой строке относятся к более низкому разрешению $N = 163840$, нижние – к более высокому разрешению $N = 180224$. Крайняя правая колонка показывает относительную разницу в инкременте λ между этими двумя разрешениями

#	Re(λ)	Im(λ)	$\lvert\Delta\lambda\rvert/\lvert\lambda\rvert$
1	24.6467967 24.6467960	5.0×10^{-10} 2.2×10^{-10}	3×10^{-8}
2	5.67667745 5.67667730	-7.4×10^{-11} -2.2×10^{-10}	3×10^{-8}
3	1.300748296 1.300748249	-6.1×10^{-9} 2.2×10^{-9}	4×10^{-8}
4	0.207468119 0.207468162	1.9×10^{-6} 2.3×10^{-6}	2×10^{-7}

Тот же анализ для второй ветви скорости роста неустойчивости с использованием (2) дает $\lambda_{2,s_{\text{new},2}} \approx \approx \lambda_{2,s_{\text{last}}} \sqrt{(s_{\max} - s_{\text{last}})(s_{\max} - s_{\text{new},2})} \simeq 5.647$, в то время как реальное значение в табл. 2 составляет 5.676677, что отличается всего на 0.5 %.

С учетом результатов для $\lambda_{3,s_{\text{new},1}}$, поскольку асимптотика (2) работает намного лучше, чем (1) даже для меньшей крутизны $s_{\text{new},1}$, целесообразно снова использовать ее. Используя (2), получаем $\lambda_{3,s_{\text{new},2}} \approx \lambda_{3,s_{\text{last}}} \sqrt{(s_{\max} - s_{\text{last}})(s_{\max} - s_{\text{new},2})} \simeq \simeq 1.20$, что отличается от реального значения 1.300748 в табл. 2 менее чем на 8 %. Если мы используем результат для $s_{\text{new},1}$ в качестве отправной точки, то приближение намного лучше: $\lambda_{3,s_{\text{new},2}} \approx \approx \lambda_{3,s_{\text{new},1}} \sqrt{(s_{\max} - s_{\text{new},1})(s_{\max} - s_{\text{new},2})} \simeq 1.295$, что отличается всего на 0.4 %. Таким образом, формула (2) работает очень хорошо уже около порога $\lambda \approx 1$.

Для новой четвертой ветви супергармонической неустойчивости мы можем использовать формулу (1) с $x = (s_{\max} - s_{\text{new},2})/(s_{\max} - s_4)$, что дает приближение $\lambda_{4,s_{\text{new},2}} \approx 0.2149$. Сравнивая с реальным значением 0.207468 в табл. 2, мы получаем точность 4 %. В то время как если мы попробуем использовать приближение (2) и результат для $\lambda_{4,s_{\text{new},1}}$ из табл. 1, мы получим очень плохое приближение $0.04187\sqrt{(s_{\max} - s_{\text{new},1})(s_{\max} - s_{\text{new},2})} \simeq 0.050$, что доказывает тот факт, что асимптотика (2) начинает хорошо работать для $\lambda \approx 1$ или, по крайней мере, для $\lambda > 0.5$.

Подводя итог, можно сказать, что мы впервые достигли четвертой ветви супергармонической неустойчивости волны Стокса. Учитывая ограниченные вычислительные ресурсы, эту работу можно считать первым подходом к решению данной задачи. Относительная точность полученных инкрементов новой ветви неустойчивости порядка 10^{-5} и 10^{-7} для двух доступных волн Стокса за пределами порога неустойчивости (относительная разница в крутизне от предельной волны Стокса была менее 3.59×10^{-6}). Это относительно низкая точность по сравнению с предыдущей работой [7], в которой рассматривались только первые три ветви неустойчивости, что требовало примерно в 4 раза меньше гармоник. Тем не менее, нам удалось проверить обе феноменологические асимптотики инкрементов, предложенные в [7], а именно, (2) для $\lambda > 1$ и (1) для $\lambda < 1$. Похоже, что асимптотика (2) работает приемлемо уже для $\lambda > 0.5$ (ошибка менее 10 %) и очень хорошо для $\lambda > 1$ (ошибка менее 0.4 %), в то время как выражение (1) дает вполне разумное приближение скорости роста неустойчивости при начале новой ветви супергармонической неустойчивости волны Стокса ($\lambda < 0.5$). Это означает, что нет необходимости проводить подобные вычисления для последующих (бесконечно многих) ветвей неустойчивости, если допустима ошибка не более 10 %. С момента появления ветви неустойчивости может использоваться формула (1) до значения инкремента $\lambda = 0.5$ и асимптотика (2) для $\lambda > 0.5$.

В качестве следующего шага авторы рассматривают реализацию более совершенных и эффективных с точки зрения памяти алгоритмов, аналогичных [17], которые позволили бы использовать значительно лучшее разрешение, что привело бы к гораздо меньшим ошибкам в представлении невозмущенной волны Стокса. Еще одним необходимым шагом для повышения точности является повышение точности определения положений экстремумов гамильтониана, соответствующих появлению новых ветвей неустойчивости. Имеющиеся в настоящее время значения, приведенные в [7], получены с точностью (по крайней мере) около 7 знаков после запятой, в то время как уже в этой статье мы рассматривали волны Стокса, которые отличаются от предельной волны Стокса примерно на 6 знаков, что может повлиять на анализ асимптотики (1).

Авторы выражают благодарность за предоставленное время в вычислительном центре ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН и Российскому научному фонду за финансирование данного исследования в рамках гранта 25-72-31023. Также авторы выражают благодарность разработчикам FFTW [18], ARPACK-NG [15] и всего проекта GNU [19] за разработку и поддержку этого полезного и свободного программного обеспечения.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет гранта 25-72-31023 Российского научного фонда.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. G. G. Stokes, "On the theory of oscillatory waves", Transactions of the Cambridge Philosophical Society **8**, 441 (1847).
2. G. G. Stokes, "On the theory of oscillatory waves", Mathematical and Physical Papers **1**, 197 (1880).
3. M. Longuet-Higgins and M. Selwyn, "The instabilities of gravity waves of finite amplitude in deep water I. Superharmonics", Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences **360**(1703), 471 (1978).
4. M. Tanaka, "The stability of steep gravity waves", J. Phys. Soc. Jpn. **52**(9), 3047 (1983).
5. P. G. Saffman, "The superharmonic instability of finite-amplitude water waves", J. Fluid Mech. **159**, 169 (1985).
6. M. Longuet-Higgins and M. Tanaka, "On the crest instabilities of steep surface waves", J. Fluid Mech. **336**, 51 (1997).
7. A. O. Korotkevich, P. M. Lushnikov, A. Semenova, and S. A. Dyachenko, "Superharmonic instability of Stokes waves", Stud. Appl. Math. **150**(1), 119 (2023); doi:10.1111/sapm.12535; URL https://doi.org/10.1111/sapm.12535.
8. B. Deconinck, S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and A. Semenova, "The dominant instability of near-extreme Stokes waves", Proceedings of the National Academy of Sciences **120**(32), e2308935120 (2023); doi:10.1073/pnas.2308935120.
9. P. M. Lushnikov, S. A. Dyachenko, and D. A. Silantyev, "New conformal mapping for adaptive resolving of the complex singularities of Stokes wave", Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **473**(2202), 20170198 (2017).
10. S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and A. O. Korotkevich, "Branch cuts of Stokes wave on deep water. Part I: Numerical solution and Padé approximation", Stud. Appl. Math. **137**(4), 419 (2016); doi:10.1111/sapm.12128; URL https://doi.org/10.1111/sapm.12128.
11. S. A. Dyachenko, A. O. Korotkevich, P. M. Lushnikov, A. Semenova, and D. Silantyev, "Collection of Stokes' waves of different amplitude computed with a quadruple and higher precision", http://stokeswave.org. http://stokeswave.org, 2015–2025; http://stokeswave.org.
12. S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and A. O. Korotkevich, "Complex singularity of a Stokes wave", JETP Lett. **98**(11), 675 (2013); doi:10.1134/S0021364013240077; URL https://doi.org/10.1134/S0021364013240077.
13. S. Tanveer, "Singularities in water waves and Rayleigh-Taylor instability", Proc. R. Soc. Lond. A **435**, 137 (1991).
14. A. I. Dyachenko, "On the dynamics of an ideal fluid with a free surface", Dokl. Math. **63**(1), 115 (2001).
15. ARPACK-NG. ARPACK-NG is a collection of Fortran77 subroutines designed to solve large scale eigenvalue problems. *github.com*, 2025; URL https://github.com/opencollab/arpack-ng.
16. Y. Saad, *Numerical methods for large eigenvalue problems*, second edition (Manchester University Press, Philadelphia, 2011).
17. S. A. Dyachenko and A. Semenova, "Canonical conformal variables based method for stability of Stokes waves", Stud. Appl. Math. **150**(3), 705 (2023); doi:https://doi.org/10.1111/sapm.12554.
18. M. Frigo and S. G. Johnson, "The design and implementation of FFTW 3", Proc. IEEE **93**(2), 216 (2005); URL http://fftw.org.
19. GNU Project, http://gnu.org, 1984-2025; URL http://gnu.org.