Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 3, с. 161 – 167

Дискретная Z_4-симметрия в решеточной теории гравитации: симметричная и несимметричная фазы

С. Н. Вергелес[1]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Московский физико-технический институт, Кафедра теоретической физики, 141707 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 19 ноября 2025 г.
После переработки 19 ноября 2025 г.
Принята к публикации 5 декабря 2025 г.

Рассматривается решеточная теория гравитации при сверхвысоких температурах. Определяется глобальное Z_4-преобразование фермионных дираковских и бозонных полей (тетрада и элементы голономии), из которых строится решеточное действие. Это Z_4-преобразование является “корнем” из Z_2- или PT-преобразования, ранее предложенного автором. При самых высоких температурах рассматриваемое действие инвариантно относительно преобразования Z_4, и эта симметрия не нарушена. При понижении температуры Z_4-симметрия нарушается до Z_2-симметрии, причем параметром порядка является Z_2-симметричный вклад в действие, трансформирующийся в длинноволновом пределе в действие Гильберта–Эйнштейна. Z_4-преобразование смешивает частицы и античастицы, так что в Z_4-симметричной фазе исчезает различие между частицами и античастицами (на языке дираковских полей).

DOI: 10.7868/S3034576626020014

1. Введение. Глобальная Z_4-симметрия, реализуемая в континуальной теории гравитации, минимально связанной с дираковским полем, впервые изучалась в [1]. В настоящей работе мы также изучаем Z_4-симметрию, реализуемую в теории гравитации, минимально связанной с дираковским полем. Однако имеются существенные различия между этими двумя подходами. Перечислим их:

1) В работе [1] изучается континуальная теория. Напротив, здесь изучается теория гравитации на решетке (симплициальном комплексе). Разумеется, в длинноволновом пределе решеточная теория трансформируется в обычную континуальную теорию, изучаемую в [1].

2) В работе [1] преобразуются, кроме динамических переменных, также локальные координаты. В нашем случае локальные координаты остаются инвариантными, преобразуются лишь динамические переменные. Это следует уже из того, что на решетке вообще нет координат.

При Z_4-преобразовании частицы и античастицы (на языке дираковских полей) смешиваются, и в Z_4-симметричной фазе различие между ними исчезает. По нашему мнению, стирание различия между частицами и античастицами в Z_4-симметричной фазе и восстановление этого различия в нарушенной фазе является наиболее интересным результатом работы. Возможно, этот факт окажется интересным для понимания механизма возникновения барионной асимметрии на самых ранних этапах эволюции решеточной теории гравитации, описанного в работе [2]. Заметим, что поскольку в работе [3] была доказана унитарность решеточной теории гравитации в сигнатуре Минковского, то предложенный в [2] механизм возникновения барионной асимметрии выходит за рамки чисто модельной спекуляции. Можно также утверждать, что в любой корректной теории гравитации, основанной на идее зернистости пространства-времени на сверхмалых масштабах, выводы работ [2, 3] будут справедливы.

Идея зернистости или дискретности пространства–времени для описания теории гравитации на фундаментальном уровне впервые была сформулирована Т. Редже в [4]. В этой работе дискретизация пространства-времени осуществлялась при помощи симплициального комплекса. Каждому 1-симплексу приписывалась его длина, так что все размеры каждого 2-симплекса (треугольника) были фиксированы. Длины трех сторон каждого треугольника удовлетворяли неравенству треугольника. Таким образом фиксировалась геометрия всего комплекса. Подробное описание исчисления Редже дано в [5]. Подход к дискретной геометрии, аналогичный исчислению Редже, можно также найти в [6, 7].

[1] e-mail: vergeles@itp.ac.ru

Несмотря на очевидную элегантность исчисления Редже, эта теория оказывается весьма неудобной при переходе к квантовой теории. Действительно, независимыми переменными, определяющими действие Редже, являются длины одномерных симплексов, подчиненные большому числу ограничений, а именно, неравенствам треугольников. Более того, введение в теорию полей Дирака создает новую трудность, состоящую в отсутствии ортонормированных базисов в явном виде. Возможно, поэтому вариант дискретной гравитации, основанный на так называемой B-F-теории, вскоре приобрел более интенсивное развитие. B-F-теория разработана на основе действия теории гравитации в форме Палатини (см. ниже (29)). Наиболее характерное свойство B-F-теории состоит в том, что тензор кривизны 2-формы равен нулю. Однако, в то время как B-F-теория действительно описывает гравитацию в трехмерном пространстве, в пространствах более высоких размерностей это не так. Например, в четырехмерном пространстве с действием (29) тензор кривизны не равен нулю. Но это не единственная трудность теории: введение материи также неудобно. Подробное описание дискретной квантовой теории гравитации, основанной на B-F-формализме, можно найти в [8–11].

В отличие от многомерного случая, значительный вычислительный прогресс был достигнут в двумерной дискретной квантовой гравитации [12, 13].

Идея представления тетрады как билинейной формы дираковских полей (кварк-антикварк полей) имеет давние корни (см., например, работы [14–20]). Кроме указанного общего свойства, объединяющего цитируемые работы, между ними имеются и существенные различия. В частности, в работах [14–16] изучаются континуальные теории и определяются фундаментальные лагранжианы, описывающие прегеометрию. Достижение такого подхода в том, что он приводит к теории гравитации Эйнштейна в длинноволновом пределе. Отдельно отметим работу [16], в которой все построение основано на использовании некомпактной комплексной группы $SO(4,C)$. Как тетрада, так и метрический тензор являются, вообще говоря, комплексными числами. В работе [1], так же, как и в настоящей работе, тетрада становится чисто мнимой в результате Z_4-преобразования, если до преобразования она была вещественной. В работах [17–19], как и в настоящей работе, изучается решеточная регуляризация континуальной теории гравитации, причем решеточные модели совпадают. В работе [20] развиваются идеи работ [17–19], но в рамках континуальной теории. Идея представления тетрады как билинейной формы кварк-антикварковых полей представляется нам весьма привлекательной как с эстетической, так и с практической точек зрения. Действительно, в этом случае интегралы по тетрадам в статистической сумме всегда сходятся, поскольку эти интегралы являются интегралами по грассмановым числам, которые равны либо нулю, либо единице. Этот факт дает возможность выполнения высокотемпературного разложения статистической суммы. Если же считать тетрады независимыми бозонными переменными, то для проведения высокотемпературного разложения необходимо наложение ограничений на тетрады вида (1). Поскольку в Евклидовой сигнатуре и элементы группы голономии также численно ограничены, то в обоих случаях высокотемпературное разложение корректно. Поскольку для наших целей природа тетрады не имеет значения, далее этот вопрос не обсуждается.

Мы изучаем модель решеточной гравитации в Евклидовой сигнатуре. Это оправдано тем, что здесь нас интересуют фазовые переходы, а не временная динамика системы.

Работа организована следующим образом.

В пункте 2 мы даем краткое определение решеточной теории гравитации в Евклидовой сигнатуре и выписываем ее длинноволновый предел в сигнатуре Минковского.

В пункте 3 определяется глобальная Z_4-симметрия затравочного решеточного действия, описывается ее Z_2-подгруппа.

В пункте 4 содержатся выводы и соображения о возможных фазах и их свойствах.

2. Определение решеточной теории гравитации. В работах автора [2, 21–27] изучалась решеточная теория гравитации, связанная с дираковскими полями. Приведем ее краткое определение. Поскольку нас интересуют фазовые переходы, то естественно рассматривать теорию именно в случае Евклидовой сигнатуры.

Рассмотрим ориентируемый 4-мерный симплициальный комплекс $\mathfrak{K}$. Мы рекомендуем книгу [28], §§ 2, 4 для ознакомления с определением абстрактных симплициальных комплексов. Предположим, что каждый его 4-симплекс принадлежит такому подкомплексу $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{K}$, который имеет геометрическую реализацию в $\mathbb{R}^4$ без пустот. Вершины обозначаются $a_{\mathcal{V}}$, индексы $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ нумеруют вершины и 4-симплексы $s^4_{\mathcal{W}}$ соответственно. Необходимо использовать локальную нумерацию вершин, принадлежащих заданному 4-симплексу: все 5 вершин 4-симплекса $s^4_{\mathcal{W}}$ нумеруются как $a_{\mathcal{V}(\mathcal{W})i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. В дальнейшем обозначение с дополнительным нижним индексом $(\mathcal{W})$ указывает на принадлежность соответствующей величины 4-симплексу $s^4_{\mathcal{W}}$. Обозначим $\varepsilon_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1}\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2}\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3}\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4}\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5}} = \pm 1$ символ Леви–Чивита. Верхний (нижний) знак зависит от ориентации 4-симплекса $s^4_{\mathcal{W}} = a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1}} a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2}} a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3}} a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4}} a_{\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5}}$. Элемент компактной группы Spin(4) и элемент алгебры Клиффорда

$$\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = \Omega^{-1}_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1} = \exp\left(\omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^{ab}\omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\right) \in \mathrm{Spin}(4), \quad \sigma^{ab} \equiv \frac{1}{4}[\gamma^a\gamma^b],$$
$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\delta^{ab}, \quad a = 1,2,3,4, \quad \gamma^5 \equiv \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4,$$
$$\hat{e}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \equiv e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\gamma^a \equiv -\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{e}_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}\Omega^{-1}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2},$$
$$|e_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}| < 1, \quad |e_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}| \equiv \sqrt{\sum_a (e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2})^2} \tag{1}$$

определены на каждом ориентированном 1-симплексе $a_{\mathcal{V}_1}a_{\mathcal{V}_2}$. По предположению множество переменных $\{\Omega, \hat{e}\}$ является множеством независимых бозонных динамических переменных. Фермионные степени свободы (Дираковские спиноры) определены на вершинах комплекса:

$$\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}, \quad \Psi_{\mathcal{V}}. \tag{2}$$

Множество переменных $\{\Psi^\dagger, \Psi\}$ взаимно независимы, причем спиноры $\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}$ и $\Psi_{\mathcal{V}}$ находятся во взаимной инволюции (или анти-инволюции) относительно операции эрмитова сопряжения.

Введем обозначение

$$\mathcal{R}_{\mathcal{V}_3|\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \equiv \Omega_{\mathcal{V}_3\mathcal{V}_1}\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\Omega_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_3}. \tag{3}$$

Рассмотрим модель с затравочным действием

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_P + \mathfrak{A}_\Psi + \mathfrak{A}_{\Lambda_0}. \tag{4}$$

Здесь $\mathfrak{A}_P$ является решеточным аналогом интеграла класса Понтрягина и $\mathfrak{A}_\Psi$ есть действие дираковского поля, минимально связанного с гравитацией:

$$\mathfrak{A}_P = \frac{1}{5!\cdot 2\pi^2}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{\sigma}\varepsilon_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})} \times$$
$$\times \operatorname{tr}\gamma^5\left\{\mathcal{R}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})|\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})}\mathcal{R}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})|\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})}\right\}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{A}_\Psi = \frac{1}{5\cdot 24^2}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{\sigma}\varepsilon_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})} \times$$
$$\times \operatorname{tr}\gamma^5\left\{\hat{\Theta}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})}\right\}. \tag{6}$$

Каждая σ является одной из 5! перестановок вершин $\mathcal{V}_{(\mathcal{W})i} \longrightarrow \sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})i})$.

$$\hat{\Theta}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \equiv \Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\gamma^a = \hat{\Theta}^\dagger_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \quad \Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = \frac{i}{2}\left(\Psi^\dagger_{\mathcal{V}_1}\gamma^a\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\Psi_{\mathcal{V}_2} - \Psi^\dagger_{\mathcal{V}_2}\Omega_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}\gamma^a\Psi_{\mathcal{V}_1}\right). \tag{7}$$

Можно проверить, что (ср. с (1))

$$\hat{\Theta}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \equiv -\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{\Theta}_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}\Omega^{-1}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}. \tag{8}$$

Вклад в решеточное действие от космологической постоянной имеет вид

$$\mathfrak{A}_{\Lambda_0} = -\frac{1}{5!\cdot 12}\cdot\Lambda_0\cdot\varepsilon_{abcd}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{\sigma}\varepsilon_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})} \times$$
$$\times e^a_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})}e^b_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})}e^c_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})}e^d_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})}. \tag{9}$$

Статистическая сумма представляется интегралом

$$Z = \prod_{1-\text{simplices}} \int_{|e_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}|<1} \prod_a de^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} \int d\mu\{\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\} \times \prod_{\mathcal{V}} \int d\Psi^\dagger_{\mathcal{V}} d\Psi_{\mathcal{V}} \exp(\mathfrak{A}_0). \tag{10}$$

Действие (4), а также интеграл (10), инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\tilde{\Omega}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = S_{\mathcal{V}_1}\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}S^{-1}_{\mathcal{V}_2}, \quad \tilde{\hat{e}}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = S_{\mathcal{V}_1}\,\hat{e}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\,S^{-1}_{\mathcal{V}_1},$$
$$\tilde{\Psi}_{\mathcal{V}} = S_{\mathcal{V}}\Psi_{\mathcal{V}}, \quad \tilde{\Psi^\dagger}_{\mathcal{V}} = \Psi^\dagger_{\mathcal{V}}S^{-1}_{\mathcal{V}}, \quad S_{\mathcal{V}} \in \mathrm{Spin}(4). \tag{11}$$

Проверка этого факта облегчается при использовании соотношения (ср. с соотношением для $\hat{e}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$ в (11))

$$\tilde{\hat{\Theta}}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = S_{\mathcal{V}_1}\hat{\Theta}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}S^{-1}_{\mathcal{V}_1}, \tag{12}$$

которое непосредственно следует из (11).

Для полноты общей картины выпишем предельный вид решеточного действия (4) в инфракрасной области. Переход к длинноволновому пределу возможен для таких конфигураций полей, которые достаточно медленно изменяются при переходах от симплекса к симплексу, т.е. при небольших или значительных перемещения по решетке. В нашей теории именно на этапе перехода к длинноволновому пределу возникает необходимость введения локальных координат. Локальные координаты – это маркеры вершин решетки. Не вдаваясь в подробности, выпишем длинноволновый предел действия (4) в сигнатуре Минковского [2, 21–27]. Переход от Евклидовой сигнатуры к сигнатуре Минковского достигается путем деформации контуров интегрирования в интеграле (10). Нижний индекс (E) указывает на то, что соответствующая величина определена на решетке в Евклидовой сигнатуре, а прежнее обозначение здесь используется для длинноволновых величин в сигнатуре Минковского:

$$\mathfrak{A}_{P(E)} \longrightarrow i\mathfrak{A}_P, \quad \mathfrak{A}_P = \frac{1}{32\pi^2}\varepsilon_{abcd}\int \mathfrak{R}^{ab}\wedge\mathfrak{R}^{cd}$$
$$= \frac{1}{8\pi^2}\int d\left[\varepsilon_{abcd}\left(\omega^{ab}\wedge d\omega^{cd} + \frac{2}{3}\omega^{ab}\wedge\omega^c_e\wedge\omega^{ed}\right)\right],$$
$$\frac{1}{2}\sigma_{ab}\mathfrak{R}^{ab} = \frac{1}{2}\sigma_{ab}\mathfrak{R}^{ab}_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$$
$$= \big(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu + [\omega_\mu,\,\omega_\nu\,]\big)dx^\mu\wedge dx^\nu,$$
$$\omega_\mu \equiv \frac{1}{2}\sigma_{ab}\omega^{ab}_\mu, \tag{13}$$

$$\mathfrak{A}_{\Psi(E)} \longrightarrow i\mathfrak{A}_\Psi, \quad \mathfrak{A}_\Psi = \frac{1}{6}\varepsilon_{abcd}\int \Theta^a\wedge e^b\wedge e^c\wedge e^d,$$
$$\Theta^a = \frac{i}{2}\left[\overline{\Psi}\gamma^a\mathcal{D}_\mu\,\Psi - \left(\overline{\mathcal{D}_\mu\,\Psi}\right)\gamma^a\Psi\right]dx^\mu,$$
$$\mathcal{D}_\mu = (\partial_\mu + \omega_\mu)\,, \quad e^a = e^a_\mu dx^\mu, \tag{14}$$

$$\mathfrak{A}_{\Lambda_0(E)} \longrightarrow i\mathfrak{A}_{\Lambda_0}, \quad \mathfrak{A}_{\Lambda_0} = -2\Lambda_0\int e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3. \tag{15}$$

Все остальные слагаемые при таком переходе будут содержать дополнительные множители в положительной степени $(l_P/\lambda)\longrightarrow 0$, и потому они опускаются. Здесь λ – характерная длина волн физической подсистемы.

3. Z_4-преобразования. Определим действие глобального Z_4-преобразования на фундаментальных переменных на решетке в Евклидовой сигнатуре:

$$\hat{\mathcal{U}}_4^{-1}\Psi_{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{U}}_4 = \mu\Psi_{\mathcal{V}} + \nu U_{PT}(\Psi^\dagger_{\mathcal{V}})^t,$$
$$\hat{\mathcal{U}}_4^{-1}\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{U}}_4 = \mu\Psi^\dagger_{\mathcal{V}} - \nu\Psi^t_{\mathcal{V}}U^{-1}_{PT},$$
$$U_{PT} = i\gamma^1\gamma^3 = U^{-1}_{PT} = U^\dagger_{PT} = -U^t_{PT},$$
$$\hat{\mathcal{U}}_4^{-1}e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{\mathcal{U}}_4 = \pm ie^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \quad \hat{\mathcal{U}}_4^{-1}\omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{\mathcal{U}}_4 = \omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2},$$
$$\mu = \pm i\nu, \quad \nu^2 = \mp i/2 \longrightarrow$$
$$2\mu\nu = 1, \quad \mu^2 - \nu^2 = \pm i, \quad \mu + \nu = 1, \quad \mu - \nu = \pm i. \tag{16}$$

Здесь верхний индекс “t” обозначает транспонирование дираковских матриц и спиноров. Везде берется либо верхний, либо нижний знак. Нам понадобятся следующие равенства:

$$U^{-1}_{PT}\gamma^a U_{PT} = (\gamma^a)^t, \quad U^{-1}_{PT}\sigma^{ab}U_{PT} = -(\sigma^{ab})^t. \tag{17}$$

Из (17) следует, что

$$U^{-1}_{PT}\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}U_{PT} = \left(\Omega_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}\right)^t. \tag{18}$$

Непротиворечивость определений Z_4-преобразований дираковских полей видна из того, что оба слагаемых в правой части в первой строке в (16) преобразуются одинаково под действием группы Spin(4): из преобразования

$$\Psi_{\mathcal{V}} \to \exp(\phi^{ab}\sigma^{ab})\Psi_{\mathcal{V}} \tag{19}$$

следует преобразование (см. (17))

$$U_{PT}(\Psi^\dagger_{\mathcal{V}})^t \to \exp(\phi^{ab}\sigma^{ab})U_{PT}(\Psi^\dagger_{\mathcal{V}})^t. \tag{20}$$

Это же замечание относится и ко второй строке в (16).

Введем в рассмотрение следующие фермионные переменные:

$$\Phi_{\mathcal{V}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{\mathcal{V}} + U_{PT}(\Psi^{\dagger}_{\mathcal{V}})^t\right), \qquad (21)$$

$$\Phi^{\dagger}_{\mathcal{V}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi^{\dagger}_{\mathcal{V}} + \Psi^t_{\mathcal{V}} U^{-1}_{PT}\right). \qquad (22)$$

При помощи определений (16) находим:

$$\hat{\mathcal{U}}_4^{-1}\Phi_{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{U}}_4 = (\mu+\nu)\Phi_{\mathcal{V}} = \Phi_{\mathcal{V}}, \qquad (23)$$

$$\hat{\mathcal{U}}_4^{-1}\Phi^{\dagger}_{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{U}}_4 = (\mu-\nu)\Phi^{\dagger}_{\mathcal{V}} = \pm i\Phi^{\dagger}_{\mathcal{V}}. \qquad (24)$$

Таким образом, переменные $\Phi_{\mathcal{V}}$ являются инвариантами, а переменные $\Phi^{\dagger}_{\mathcal{V}}$ преобразуются по простейшему нетривиальному представлению группы Z_4 (16).

Путем прямого и несложного вычисления, использующего формулы (16), (17) и равенства типа $\Psi^t_{\mathcal{V}_1}M^t\Psi_{\mathcal{V}_2} = -\Psi^t_{\mathcal{V}_2}M\Psi_{\mathcal{V}_1}$, можно проверить, что билинейная относительно дираковских переменных форма (7) переписывается как

$$\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2} = \frac{i}{2}\left(\Phi^{\dagger}_{\mathcal{V}_1}\gamma^a\Omega_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\Phi_{\mathcal{V}_2} - \Phi^{\dagger}_{\mathcal{V}_2}\Omega_{\mathcal{V}_2\mathcal{V}_1}\gamma^a\Phi_{\mathcal{V}_1}\right). \qquad (25)$$

Используя равенства (23) и (24), находим:

$$\hat{\mathcal{U}}_4^{-1}\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{\mathcal{U}}_4 = \pm i\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}. \qquad (26)$$

Теперь при помощи определений (16) и соотношения (26) мы приходим к выводу:

Затравочное действие (4) инвариантно относительно преобразований глобальной Z_4-группы (16).

Рассмотрим Z_2-подгруппу, образующую которой обозначим $\hat{\mathcal{U}}_{PT} \equiv (\hat{\mathcal{U}}_4)^2$. При помощи определений (16) и соотношения (26) получаем:

$$\begin{gathered}
\hat{\mathcal{U}}^{-1}_{PT}\Psi_{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{U}}_{PT} = U_{PT}\left(\Psi^{\dagger}_{\mathcal{V}}\right)^t, \\
\hat{\mathcal{U}}^{-1}_{PT}\Psi^{\dagger}_{\mathcal{V}}\hat{\mathcal{U}}_{PT} = -\left(\Psi_{\mathcal{V}}\right)^t U^{-1}_{PT}, \\
\hat{\mathcal{U}}^{-1}_{PT}e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{\mathcal{U}}_{PT} = -e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \quad \hat{\mathcal{U}}^{-1}_{PT}\omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{\mathcal{U}}_{PT} = \omega^{ab}_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}, \\
\hat{\mathcal{U}}^{-1}_{PT}\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\hat{\mathcal{U}}_{PT} = -\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}.
\end{gathered} \qquad (27)$$

Обозначение $\hat{\mathcal{U}}_{PT}$ для образующей группы Z_2-симметрии неслучайно, поскольку преобразование (27) является решеточным аналогом комбинированной PT-симметрии. Ранее эта симметрия была определена и изучалась в работах [2, 25–27].

Часть решеточного действия

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_g = -\frac{1}{5!\cdot 2\cdot l_P^2}\sum_{\mathcal{W}}\sum_{\sigma}\varepsilon_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})} \times \\
\times\, \mathrm{tr}\gamma^5\left\{\mathcal{R}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})|\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})1})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})2})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})3})}\hat{e}_{\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})5})\sigma(\mathcal{V}_{(\mathcal{W})4})}\right\},
\end{aligned} \qquad (28)$$

трансформируящаяся в длинноволновом пределе в действие Гильберта–Эйнштейна в форме Палатини

$$\mathfrak{A}_{g(E)} \longrightarrow i\mathfrak{A}_g, \quad \mathfrak{A}_g = -\frac{1}{4\,l_P^2}\varepsilon_{abcd}\int \mathfrak{R}^{ab}\wedge e^c\wedge e^d, \qquad (29)$$

выше не рассматривалась, поскольку она несимметрична относительно преобразований группы Z_4 (16):

$$\hat{\mathcal{U}}_4^{-1}\mathfrak{A}_g\hat{\mathcal{U}}_4 = -\mathfrak{A}_g. \qquad (30)$$

Однако эта часть действия симметрична относительно преобразований подгруппы Z_2 группы Z_4:

$$\hat{\mathcal{U}}^{-1}_{PT}\mathfrak{A}_g\hat{\mathcal{U}}_{PT} = \mathfrak{A}_g. \qquad (31)$$

4. Обсуждение. В работе [27] было доказано методом высокотемпературного разложения интеграла статистической суммы , что в изучаемой модели решеточной гравитации имеет место высокотемпературная фаза с ненарушенной Z_2- (или PT-) симметрией для Z_2 симметричной модели с действием $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_g + \mathfrak{A}_\Psi + \mathfrak{A}_{\Lambda_0}$ (см. (28), (6) и (9)). Это же утверждение остается справедливым для модели с действием $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_g$, поскольку действия $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ различаются на слагаемое $\mathfrak{A}_P$ (5), которое не разрушает возможность высокотемпературного разложения интеграла типа (10) для статистической суммы.

Аналогично, путем высокотемпературного разложения интеграла (10) для Z_4-симметричной модели с действием $\mathfrak{A}_0$ (5), доказывается существование Z_4-симметричной фазы. Укажем некоторые фундаментальные свойства этой фазы.

1) По определению, в Z_4-симметричной фазе все волновые функции (ВФ), а также матрица плот-

ности, должны быть симметричными относительно Z_4-преобразований (16). ВФ делятся на бра- и кет-векторы, причем операция эрмитова сопряжения устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами этих векторов. Бра-векторы являются функциями бозонных переменных и голоморфными функциями фермионных переменных $\{\Phi_{\mathcal{V}}\}$ (21). Поскольку переменные $\{\Phi_{\mathcal{V}}\}$ являются Z_4-инвариантами, то бозонный вклад в бра-векторы должен быть Z_4-инвариантом независимо от фермионов. Рассмотрим некий бра-вектор и перейдем к соответствующему кет-вектору путем эрмитова сопряжения. Поскольку переменные $e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$ инвариантны относительно эрмитова сопряжения, их трансформационные свойства относительно Z_4-преобразований не изменяются при эрмитовом сопряжении. Однако в результате эрмитова сопряжения переменные $\{\Phi_{\mathcal{V}}\}$ трансформируются в переменные $\{\Phi^\dagger_{\mathcal{V}}\}$, которые не инвариантны относительно Z_4-преобразований (см. 24)). Поэтому для инвариантности кет-вектора суммарная степень переменных $\Phi^\dagger_{\mathcal{V}}$ в каждом слагаемом ВФ должна быть равна $N = 4n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Это же утверждение относится к бра-векторам с заменой переменных $\Phi^\dagger_{\mathcal{V}} \to \Phi_{\mathcal{V}}$.

2) В Z_4-симметричной фазе стирается различие между исходными фермионными переменными $\Psi_{\mathcal{V}}$ и $\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}$. Это видно из того, что в симметричной фазе реальными фермионными переменными являются переменные (21) и (22), которые являются линейными комбинациями переменных $\Psi_{\mathcal{V}}$ и $\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}$. Из представления (25) видно, что действие инвариантно относительно глобальных фазовых преобразований $\Phi_{\mathcal{V}} \to e^{i\alpha}\Phi_{\mathcal{V}}$, $\Phi^\dagger_{\mathcal{V}} \to e^{-i\alpha}\Phi^\dagger_{\mathcal{V}}$. Равенства (21) и (22) можно обратить:

$$\Psi_{\mathcal{V}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi_{\mathcal{V}} - U_{PT}(\Phi^\dagger_{\mathcal{V}})^t\right),$$
$$\Psi^\dagger_{\mathcal{V}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi^\dagger_{\mathcal{V}} - \Phi^t_{\mathcal{V}}U^{-1}_{PT}\right). \tag{32}$$

Из последних равенств видно, что при указанных фазовых вращениях эффективных переменных $\Phi_{\mathcal{V}}$ и $\Phi^\dagger_{\mathcal{V}}$ исходные переменные $\Psi_{\mathcal{V}}$ и $\Psi^\dagger_{\mathcal{V}}$ вообще не имеют определенного фазового вращения, что и делает их неразличимыми.

3) Поскольку в симметричной фазе матрица плотности системы симметрична по определению, то имеем:

$$\langle e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle = \langle\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle = 0. \tag{33}$$

Обозначим через T_4 и T_2 следующие температуры: при $T > T_4$ система находится в Z_4-симметричной фазе; при $T_4 > T > T_2$ система находится в Z_2-симметричной фазе. Мы предполагаем, что $T_4 > T_2$, поскольку Z_4- и Z_2-симметричные фазы качественно различаются: при нарушении Z_4- и сохранении Z_2-симметрии к действию системы добавляется слагаемое (28), и полное действие становится равным $\mathfrak{A}'$, которое определялось выше. Это слагаемое нарушает Z_4-симметрию, но сохраняет Z_2-симметрию. Эффективное слагаемое (28) возникает в результате фермионных флуктуаций. Аналогичный эффект имеет место в обычной длинноволновой квантовой теории поля: флуктуации в ультрафиолетовой области дираковского поля, взаимодействующего с калибровочным полем, уже в однопетлевом приближении приводят к возникновению добавки к действию вида $\int F^2_{\mu\nu}d^4x$ с правильным знаком, так что эта добавка может рассматриваться как действие калибровочного поля, если таковое отсутствовало в затравочной теории. Слагаемое (28) является параметром порядка при фазовом переходе со снижением симметрии от Z_4 до Z_2.

Укажем некоторые фундаментальные свойства Z_2-симметричной фазы при $T < T_4$. Эти свойства интересно сравнить со свойствами системы в Z_4-симметричной фазе:

1) Это свойство такое же, как свойство 1) в Z_4-симметричной фазе с единственной поправкой: вместо “$N = 4n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$” имеем “$N = 2n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$”.

2) и 3) Эти два свойства точно такие же, как свойства 2) и 3) в Z_4-симметричной фазе.

При $T < T_2$ все дискретные симметрии системы нарушены, но калибровочная инвариантность сохраняется. Назовем эту фазу несимметричной. Такая фаза заведомо существует и ее динамика при низких температурах в длинноволновом пределе описывается действием, включающем слагаемые (29), (13), (14) и (15), причем слагаемое (13) несущественно для локальной динамики. В несимметричной фазе

$$\langle e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle = f\langle\Theta^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}\rangle \neq 0, \tag{34}$$

что проверяется прямым вычислением [26]. В несимметричной фазе переменная $e^a_{\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2}$ интерпретируется как параметр порядка.

Как было показано, в Z_4- и Z_2-симметричных фазах теряется различие между исходными фермионными переменными Ψ и $\Psi^\dagger$, которые взаимно эрмитовски сопряжены. Различие между ними восстанавливается в несимметричной фазе. Возможно, это явление может пролить свет на возникновение барионной асимметрии в рамках идеи автора, изложенной в [2].

Автор благодарен Г. Е. Воловику за стимулирование интереса к изучаемой здесь симметрии Z_4.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств Государственного Задания FFWR-2024-0011 Института теоретической физики имени Л. Д. Ландау Российской академии наук. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

---

1. G. E. Volovik, "Discrete z 4 symmetry in quantum gravity", Symmetry **16**, 1131 (2024).
2. S. Vergeles, "Alternative idea about the source of the baryon asymmetry of the universe", JETP Lett.**120**, 461 (2024).
3. S. Vergeles, "Unitarity of 4-d lattice theory of gravity", Phys. Rev. D **112**, 054509 (2025).
4. T. Regge, "General relativity without coordinates", Il Nuovo Cimento (1955–1965) **19**, 558 (1961).
5. R. Friedberg and T. Lee, "Derivation of regge's action from Einstein's theory of general relativity", Selected Papers: Random Lattices to Gravity **242**, 213 (1986).
6. J. Cheeger, W. Müller, and R. Schrader, "On the curvature of piecewise flat spaces", Commun. Math. Phys. **92**, 405 (1984).
7. U. Pinkall and A. Bobenko, "Discrete isothermic surfaces", Journal für die reine und angewandte Mathematik **475**, 187 (1996).
8. T. Regge and R. M. Williams, "Discrete structures in gravity", J. Math. Phys. **41**, 3964 (2000).
9. J. C. Baez, "An introduction to spin foam models of quantum gravity and bf theory", arXiv preprint grqc/9905087 (1999).
10. M. P. Reisenberger, "A lattice worldsheet sum for 4-d Euclidean general relativity", arXiv preprint grqc/9711052 (1997).
11. J. Iwasaki, "A surface theoretic model of quantum gravity", arXiv preprint gr-qc/9903112 (1999).
12. F. David, "A model of random surfaces with non-trivial critical behaviour", Nucl. Phys. B **257**, 543 (1985).
13. D. Boulatov, V. Kazakov, I. Kostov, and A. A. Migdal, "Analytical and numerical study of a model of dynamically triangulated random surfaces", Nucl. Phys. B **275**, 641 (1986).
14. K. Akama, "An attempt at pregeometry: gravity with composite metric", Progress of Theoretical Physics **60**, 1900 (1978).
15. C. Wetterich, "Gravity from spinors", Phys. Rev. D-Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology **70**, 105004 (2004).
16. C. Wetterich, "Pregeometry and spontaneous time-space asymmetry", J. High Energy Phys. **2022**, 1 (2022).
17. D. Diakonov, "Towards lattice-regularized quantum gravity", arXiv preprint arXiv:1109.0091 (2011).
18. A. A. Vladimirov and D. Diakonov, "Phase transitions in spinor quantum gravity on a lattice", Phys. Rev. D Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology **86**, 104019 (2012).
19. A. A. Vladimirov and D. Diakonov, "Diffeomorphismin-variant lattice actions", Physics of Particles and Nuclei **45**, 800 (2014).
20. Y. N. Obukhov and F. W. Hehl, Extended Einstein–Cartan theory a la Diakonov: the field equations, Phys. Lett. B **713**, 321 (2012).
21. S. Vergeles, "One more variant of discrete gravity having "naive" continuum limit", Nucl. Phys. B **735**, 172 (2006).
22. S. Vergeles, "Wilson fermion doubling phenomenon on an irregular lattice: Similarity and difference with the case of a regular lattice", Phys. Rev. D **92**, 025053 (2015).
23. S. Vergeles, "A note on the possible existence of an instanton-like self-dual solution to lattice euclidean gravity", J. High Energy Phys. **2017**, 1 (2017).
24. S. Vergeles, "Fermion zero mode associated with instanton-like self-dual solution to lattice Euclidean gravity", Phys. Rev. D **96**, 054512 (2017).
25. S. Vergeles, "A note on the vacuum structure of lattice Euclidean quantum gravity: "birth" of macroscopic spacetime and Pt-symmetry breaking", Class. Quantum Gravity **38**, 085022 (2021).
26. S. Vergeles, "Domain wall between the dirac sea and the "anti-dirac sea", Class. Quantum Gravity **39**, 038001 (2021).
27. S. Vergeles, "Phase transition near the Big Bang in the lattice theory of gravity", JETP **166**, 721 (2024).
28. L. Pontryagin, *Basics of Combinatorial Topology* (Nauka, Moscow, 1976).