Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 4, с. 278 – 285

Нечетная вязкость электронов и аномальный эффект Холла в двумерных системах с плавным беспорядком

Д. С. Зограбян[+*], *М. М. Глазов*[×1)]

[+]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[*]*Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

[×]*Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе, 194021 С.-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 24 ноября 2025 г.
После переработки 27 декабря 2025 г.
Принята к публикации 28 декабря 2025 г.

Разработана микроскопическая теория нечетной вязкости в двумерных электронных системах с плавным беспорядком и спин-орбитальным взаимодействием. Показано, что спин-орбитальное рассеяние в присутствии спиновой поляризации, индуцированной магнитным полем, приводит к возникновению недиагональной компоненты тензора вязкостей. Выведены гидродинамические уравнения для спиновых и электрических токов в случае, когда электроны взаимодействуют с плавным беспорядком. Рассчитан вклад нечетной вязкости в аномальный эффект Холла.

DOI: 10.31857/S0370274X26020185

1. Введение. В последние годы большое внимание исследователей привлекают транспортные и эффекты в сверхчистых двумерных электронных системах, где процессы рассеяния на статических дефектах и фононах подавлены по сравнению с процессами электрон-электронного рассеяния, рассеяния на электронов на шероховатых границах канала и плавном беспорядке [1–6]. При этом возможна реализация как баллистического, так и гидродинамического режимов распространения электронов, в последнем процессы диссипации контролируются электронной вязкостью [7, 8]. Особый интерес вызывают явления, где отличия сверхчистых систем от обычных (диффузионных) проявляются наиболее ярко. Среди таковых – нормальный и аномальный эффекты Холла и подобные им иные спин-зависимые явления [9–22].

Обычно гидродинамический режим распространения квазичастиц связывают с ситуацией, когда межчастичные столкновения доминируют над любыми другими диссипативными процессами, что позволяет представить функцию распределения квазичастиц в виде равновесной (функции Ферми–Дирака для электронов или Бозе–Эйнштейна для экситонов), параметры которой (температура, химический потенциал, средняя – гидродинамическая – скорость, т.е. сдвиг распределения в **k**-пространстве) определяются внешними воздействиями [23, 24]. Однако возможна реализация квазигидродинамического режима транспорта, в случае, если квазичастицы взаимодействуют с плавным беспорядком, см., например, [15] и ссылки, приведенные там. В этом случае времена релаксации угловых гармоник функции распределения резко сокращаются с увеличением номера гармоники, и релаксация второй угловой гармоники, которая и определяет вязкость, происходит в четыре раза быстрее, чем релаксация первой.

В связи с исследованиями таких режимов транспорта особое внимание привлекли системы, где имеется нечетная или недиагональная (odd – в англоязычной литературе) компонента тензора вязкостей, $\eta_{xy} = -\eta_{yx}$ [25–30]. Такая компонента тензора вязкостей – холловская вязкость – возникает за счет действия на электроны силы Лоренца в магнитном поле [6, 15, 31]. Возможны вклады в $\eta_{xy} = -\eta_{yx}$, обусловленные спин-орбитальным взаимодействием при наличии спиновой поляризации электронов [16, 20]. Эти вклады, также как и холловский, обусловлены нарушением симметрии к обращению хода времени. Наша задача – разработка аналитической теории нечетной вязкости, обусловленной спин-орбитальным взаимодействием и рассеянием на плавном беспорядке. Показано, что нечетная вязкость возникает за счет асимметричного рассеяния на плавном беспорядке. В отличие от предыдущих работ, где нечетная вязкость либо обусловлена силой Лоренца [21], либо возникает лишь в меру неоднородности электрического поля и спиновой поляризации [20], этот вклад не требует ни межчастичных столкновений, ни неоднородно-

1) e-mail: glazov@coherent.ioffe.ru

стей электрического поля и спиновой поляризации. Аналогичная ситуация возникает и в теории спинового эффекта Холла в гидродинамическом режиме [32–35], но насколько нам известно, вклад от рассеяния на плавном беспорядке в нечетную "спиновую" вязкость ранее не обсуждался.

В работе выведены макроскопические квазигидродинамические уравнения для спин-поляризованного электронного газа, взаимодействующего с плавным беспорядком, при наличии спин-орбитальной связи, получено микроскопическое выражение для нечетной вязкости η_{xy}. В качестве примера использования полученных уравнений рассмотрен аномальный эффект Холла, вызванный нечетной вязкостью.

2. Модель. Рассмотрим двумерный вырожденный электронный газ в плоскости (xy). Внешнее электрическое поле, $\mathbf{E}$ приложено в плоскости движения электронов (xy), а внешнее магнитное поле – перпендикулярно ей, $\mathbf{B} \parallel \mathbf{z}$. За счет эффекта Зеемана магнитное поле создает ненулевую спиновую поляризацию электронов, а также индуцирует циклотронное движение носителей заряда под действием силы Лоренца. Квантовыми эффектами, обусловленными формированием уровней Ландау, в этой работе мы пренебрегаем. Эффект Холла, возникающий в ограниченных системах, приводит, как известно, к формированию холловского поля $\mathbf{E}_H$, перпендикулярного внешним полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ [36, 37]. Как известно, в поле Холла $\mathbf{E}_H = \mathbf{E}_H^n + \mathbf{E}_H^a$ имеются два вклада: "нормальный" $(\mathbf{E}_H^n)$, обусловленный действием силы Лоренца на электроны, и аномальный $(\mathbf{E}_H^a)$, который пропорционален степени спиновой поляризации электронов и связан со спин-орбитальным взаимодействием [38–46]. Последний и будет нас здесь интересовать.

Введем спиновую матрицу плотности 2×2, $\hat{\rho}_\mathbf{k} = f_\mathbf{k}\hat{I} + \mathbf{s}_\mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$, где $\mathbf{k}$ – квазиволновой вектор электрона, $f_\mathbf{k} = (1/2)\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}_\mathbf{k}\}$ – средняя по спину заселенность состояния $\mathbf{k}$, $\mathbf{s}_\mathbf{k} = (1/2)\mathrm{Tr}\{\hat{\rho}_\mathbf{k}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\}$ – функция распределения электронов по спину. Здесь $\hat{I}$ – единичная матрица (далее ее для краткости опускаем), $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ – псевдовектор, составленный из спиновых матриц Паули. В данной работе мы пренебрегаем нечетным по волновому вектору расщеплением состояний зоны проводимости по спину, поэтому матрица плотности при $\mathbf{B} \parallel \mathbf{z}$ диагональна и параметризуется двумя функциями распределения $f_\mathbf{k}^\pm = f_\mathbf{k} \pm s_{z,\mathbf{k}}$. Для дальнейшего именно такое представление матрицы плотности будет наиболее удобным. Матрица плотности подчиняется кинетическому уравнению Больцмана, из которого можно получить уравнение на функции распределения $f_\mathbf{k}^\pm \equiv f_\mathbf{k}^\pm(\mathbf{r}, t)$ в следующем виде [16]:

$$\frac{\partial f_\mathbf{k}^\pm}{\partial t} + \mathbf{v}_\mathbf{k}\frac{\partial f_\mathbf{k}^\pm}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{1}{\hbar}\frac{\partial f_\mathbf{k}^\pm}{\partial \mathbf{k}} = Q_{\mathrm{dis}}^\pm\{f_\mathbf{k}^\pm\}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}_\mathbf{k} \equiv \hbar^{-1}\partial\varepsilon_k/\partial\mathbf{k} = \hbar\mathbf{k}/m$ – "кинематическая" скорость электрона, $\varepsilon_k = \hbar^2k^2/2m$ – его дисперсия, а m – эффективная масса,

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{E}_H) + \frac{e}{c}[\mathbf{v}_\mathbf{k} \times \mathbf{B}], \qquad (2)$$

сила, действующая на электрон со стороны суммарного электрического поля $\mathbf{E} + \mathbf{E}_H$, возникающего в канале за счет накопления зарядов на его краях, и магнитного поля $\mathbf{B}$, $e < 0$ – заряд электрона, c – скорость света в вакууме. Здесь мы интересуемся только эффектами, связанными с возникновением нечетной вязкости при рассеянии, поэтому не учитываем вклады, обусловленные кривизной Берри энергетических зон (аномальной скоростью электронов) и связанные с ними сдвиговые вклады [16, 17, 47, 48]. В правой части (1) $Q_{\mathrm{dis}}\{f_\mathbf{k}\}$ – интеграл столкновений, описывающий рассеяние электронов на беспорядке.

Мы рассматриваем лишь процессы рассеяния, которые оставляют электроны в зоне проводимости, также мы пренебрежем вкладами процессов с переворотом спина. Спин-орбитальное взаимодействие учитывается в рамках $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$-модели, для электронов проводимости оно возникает из-за подмешивания состояний валентной зоны. Матричный элемент рассеяния из состояния с волновым вектором $\mathbf{k}'$ в состояние $\mathbf{k}$ в первом неисчезающем приближении по спин-орбитальному взаимодействию можно записать [47, 49]:

$$V_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^\pm = U_c(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \pm i\xi U_v(\mathbf{k} - \mathbf{k}')[\mathbf{k}' \times \mathbf{k}]_z, \qquad (3)$$

где верхние индексы $\pm$ нумеруют состояния с проекцией спина $s_z = \pm 1/2$, ξ – величина, характеризующая силу спин-орбитального взаимодействия [47, 49], $U_{c,v}(\mathbf{q})$ – фурье-образы потенциалов примесей, соответственно, в зоне проводимости и в валентной зоне, которые могут различаться, если потенциал дефекта не является кулоновским. Обобщение для многозонной модели приведено в работе [47]. Безразмерным малым параметром, характеризующим силу спин-орбитального взаимодействия, будет $\xi k_F^2 \ll 1$, также считается, что $\varepsilon_F \ll E_g$, где ε_F и k_F – энергия Ферми и фермиевский волновой вектор электронов.

Интеграл электрон-примесных столкновений можно в общем виде записать как [50]

$$Q_{\mathrm{dis}}^\pm\{f_\mathbf{k}\} = \sum_{\mathbf{k}'}(W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\pm f_{\mathbf{k}'}^\pm - W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}^\pm f_\mathbf{k}^\pm), \qquad (4)$$

где

$$W^{\pm}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'})\{t_0(\theta) \pm t_1(\theta)\sin\theta\},\ \ \theta = \angle \mathbf{k}'\mathbf{k}. \tag{5}$$

Здесь первый член описывает спин-независимое рассеяние, возникающее в борновском приближении, а второй член – асимметричное спин-зависимое рассеяние (эффект Мотта) [40, 51–53], который возникает в третьем порядке рассеяния по матричному элементу (3), $t_0(\theta)$, $t_1(\theta)$ – четные функции угла θ, причем $t_0(\theta) = n_{\rm imp}|U_c(\theta)|^2$, где $n_{\rm imp}$ – концентрация примесей,

$$t_1(\theta) = 2\pi D k_F^2 \xi n_{\rm imp}\cdot U_v(\theta)\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}U_c(\varphi)U_c(\theta-\varphi), \tag{6}$$

$D = m/2\pi\hbar^2$ – плотность состояний на одну проекцию спина и введено обозначение $U_{c,v}(\theta) \equiv \equiv U_{c,v}(2k|\sin\theta/2|)$. Подчеркнем, что в борновском приближении члены типа $\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\mathbf{k}\times\mathbf{k}']$ в амплитуде рассеяния содержат мнимую единицу и не интерферируют со спин-независимым вкладом. Это обусловлено требованием эрмитовости матричных элементов. Представим неравновесную, т.е. индуцированную внешним электрическим и магнитным полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, поправку к функции распределения в виде

$$\delta f^{\pm}_{\mathbf{k}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{f^{\pm}_{c,n}\cos n\varphi + f^{\pm}_{s,n}\sin n\varphi\right\}, \tag{7}$$

где $f^{\pm}_{c,n}$, $f^{\pm}_{s,n}$ – коэффициенты разложения, зависящие от энергии электрона, $\varphi_{\mathbf{k}} = \angle\mathbf{k}, Ox$, и получим

$$Q^{\pm}_{\rm dis}\{f^{\pm}_{\mathbf{k}}\} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{\pm}_{c,n}\cos n\varphi + f^{\pm}_{s,n}\sin n\varphi}{\tau_n} \pm \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(f^{\pm}_{s,n}\cos n\varphi - f^{\pm}_{c,n}\sin n\varphi). \tag{8}$$

Сумма в первой строке (8) – симметричная часть интеграла столкновений, описывающая релаксацию угловых гармоник функции распределения с временами релаксации τ_n, которые введены стандартным способом. Вклад во второй строке (8) соответствует асимметричному вкладу в интеграл столкновений, а коэффициенты γ_n описывают конверсию четных и нечетных гармоник, обусловленную спин-орбитальным взаимодействием, имеют вид

$$\gamma_n = \frac{2\pi}{\hbar}D\int\frac{d\theta}{2\pi}t_1(\theta)\sin\theta\sin n\theta. \tag{9}$$

Величины τ_n и γ_n зависят от энергии электрона. Отметим, что в случае короткодействующего потенциала в асимметричной части интеграла столкновений присутствует только первая гармоника функции распределения [16, 17, 54], а остальные вклады обращаются в нуль: $\gamma_n = \gamma_1\delta_{1,n}$. В случае дальнодействующего потенциала все коэффициенты ненулевые $\gamma_n \neq 0$, в частности коэффициент при второй угловой гармонике γ_2 определяет нечетную вязкость. В дальнейшем мы рассматриваем квазигидродинамический режим, оставив лишь первые две гармоники в интеграле столкновений (8). Хотя формального параметра малости в задаче нет, $\tau_n \propto n^{-2}$ и более высокие гармоники функции распределения подавлены в меру численных коэффициентов.

3. Нечетная вязкость. Компоненты тензора вязкостей двумерных электронов можно вывести, следуя стандартному подходу, изложенному, например, в [55]. Рассматривая локально-равновесное распределение электронов с гидродинамической скоростью в каждой спиновой ветке $\mathbf{u}^{\pm} \equiv \mathbf{u}^{\pm}(\mathbf{r}, t) = = N_{\pm}^{-1}\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{v}_{\mathbf{k}}f^{\pm}_{\mathbf{k}}$, плавно (на масштабе длины свободного пробега) зависящей от координат, где $N^{\pm} = = \sum_{\mathbf{k}} f^{\pm}_{\mathbf{k}}$ – концентрация электронов с заданной проекцией спина, можно представить компоненты тензора потока импульса как $\Pi^{\pm}_{\alpha\beta} = m\sum_{\mathbf{k}} v_{\alpha,\mathbf{k}}v_{\beta,\mathbf{k}}f^{\pm}_{\mathbf{k}}$. В интересующем нас случае аксиальной симметрии задачи член с градиентом потока импульса может быть представлен в следующем удобном виде

$$-\frac{\boldsymbol{\nabla}\hat{\Pi}^{\pm}}{m} = \Delta(\eta^{\pm}_{xx}N^{\pm}\mathbf{u}^{\pm}) + \Delta[\eta^{\pm}_{xy}N^{\pm}\mathbf{u}^{\pm}\times\hat{\mathbf{z}}], \tag{10}$$

где $\hat{\mathbf{z}}$ – орт z и введены две независимые компоненты тензора (первых) вязкостей $\eta \equiv \eta^{\pm}_{xx}$ (диагональная вязкость) и $\eta^{\pm}_{xy} = -\eta^{\pm}_{yx}$ – недиагональная (нечетная, odd) или холловская вязкость [25–29]. Последняя и представляет предмет нашего интереса. Отметим, что в рассматриваемой нами постановке задачи вторая вязкость не проявляется (общий анализ приведен, например, в [56])[2)].

Раскладывая функцию распределения по угловым гармоникам (7) и учитывая пространственные градиенты и магнитное поле в низшем (первом) порядке, получаем диагональную вязкость

$$\eta^{\pm}_{xx} \equiv \eta^{\pm} = \frac{(v^{\pm}_F)^2\tau_2(\varepsilon^{\pm}_F)}{4}, \tag{11}$$

где $v^{\pm}_F = \sqrt{2\varepsilon^{\pm}_F/m}$ – скорость электрона на поверхности Ферми в соответствующей спиновой ветке, а τ_2,

[2)] В (10) в отличие от стандартного представления уравнений Навье–Стокса [57] члены с произведением вязкости и концентрации стоят под оператором Лапласа. Это связано со спецификой рассеяния на статическом беспорядке. Для несжимаемой электронной жидкости это отличие несущественно.

как указывалось ранее, – время релаксации второй угловой гармоники функции распределения. В релевантном случае малой степени поляризации электронов отличия η^+ от η^- малы. Недиагональная вязкость содержит два вклада:

$$\eta^{\pm}_{xy} = \eta^{\pm}_{xy,H} + \eta^{\pm}_{xy,SO}, \tag{12}$$

где

$$\eta^{\pm}_{xy,H} = 2\omega_c \tau_2 \cdot \eta \tag{13}$$

– холловская компонента нечетной вязкости, обусловленная действием силы Лоренца на электроны, где τ_2 и η взяты на уровне Ферми, предполагая магнитное поле малым $\omega_c\tau_{1,2} \ll 1$ [6, 15, 31]; $\eta^{\pm}_{xy,SO}$ – вклад в нечетную вязкость из-за наличия спин-орбитального взаимодействия [16, 20, 32, 33]. Последнюю можно представить в виде, аналогичном (13),

$$\eta^{\pm}_{xy,SO} = \pm\gamma_2(\varepsilon^{\pm}_F)\tau_2(\varepsilon^{\pm}_F)\eta^{\pm} \equiv \pm\eta^{s}_{xy,SO}(\varepsilon^{\pm}_F). \tag{14}$$

Нечетная вязкость электронного газа, обусловленная спин-орбитальным взаимодействием и усредненная по спиновым веткам, принимает вид

$$\eta_{xy,SO} = \frac{\eta^{+}_{xy,SO} + \eta^{-}_{xy,SO}}{2} = P_s \varepsilon_F \frac{\partial \eta^{s}_{xy,SO}}{\partial \varepsilon_F}, \tag{15}$$

где $P_s \ll 1$ – степень спиновой поляризации электронов

$$P_s \equiv \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-} = -\frac{g\mu_B B}{2\varepsilon_F}, \tag{16}$$

g – g-фактор электрона, μ_B – магнетон Бора. Как видно из этих выражений, спин-орбитальный вклад в нечетную вязкость возникает только при ненулевой поляризации электронов, т.е. явным образом требует нарушения симметрии к инверсии времени. Для электронов с заданной проекцией спина $\eta^{\pm}_{xy,SO} = -\eta^{\pm}_{xy,SO} \neq 0$, но эти вклады, очевидно, имеют противоположные знаки, см. (14). Нечетная вязкость (15) зависит от типа потенциала примесей. В частности, как уже отмечалось выше, для короткодействующих рассеивателей $\eta_{xy,SO} = 0$. Для анализа зависимости $\eta_{xy,SO}$ от длины корреляции беспорядка рассмотрим, в качестве примера, гауссовы примеси

$$U_{c,v}(q) = U_0 \cdot e^{-q^2 r_0^2/4}, \tag{17}$$

где $U_0 = \int U_{c,v}(\mathbf{r})d^2r$ – "мощность" потенциала примесей, r_0 – длина корреляции. Зависимость нечетной вязкости от безразмерной длины корреляции $k_F r_0$ приведена на рис. 1. В пределе $k_F r_0 \gg 1$ имеем

$$\eta^{\text{gauss}}_{xy,SO} = \frac{4P_s}{\sqrt{3}} \cdot \xi \cdot k_F^2 r_0^2 \cdot \frac{\varepsilon_F^2}{U_0 \hbar n_{\text{imp}}}. \tag{18}$$

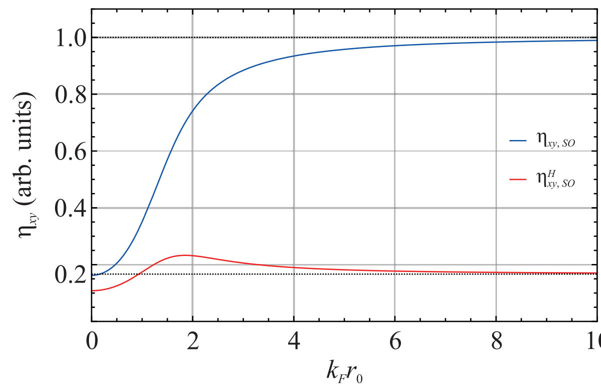

Рис. 1. (Цветной онлайн) На графике приведена зависимость нечетной вязкости $\eta_{xy,SO}$ (синяя линия) в случае гауссого потенциала примесей (17) в зависимости от параметра экранировки $k_F r_0$. Нечетная вязкость нормирована на свое асимптотическое значение $\eta^{\text{gauss}}_{xy,SO}$ (18) при $k_F r_0 \to \infty$. Также приведена "эффективная" нечетная вязкость $\eta^{H}_{xy,SO}$ (красная линия), которая входит в выражение для холловского поля (22)

Выражение для нечетной вязкости (15) из-за наличия плавного беспорядка и связанной со спин-орбитальным взаимодействием является одним из главных результатов данной работы.

4. Спин-зависимые гидродинамические уравнения. Кинетическое уравнение (1), дополненное соответствующими граничными условиями на краях системы и уравнением Пуассона, связывающим $\mathbf{E}_H$ и функцию распределения электронов, позволяет, в принципе, исследовать магнитотранспортные эффекты, в том числе и аномальный эффект Холла, при любом виде беспорядка. В случае плавного беспорядка τ_n быстро убывает с увеличением номера угловой гармоники n, поэтому в разложении (7) неравновесной функции распределения по угловым гармоникам достаточно оставить вклады с $n = 1$ и 2. Это позволяет существенно упростить задачу и свести описание электронного транспорта к гидродинамической модели. В частности, суммируя (1) по импульсам, можно получить уравнения непрерывности для $N_{\pm}$ в стандартном виде. Уравнения для потоков удобно представить в виде системы уравнений на электрический ток $\mathbf{j} \equiv eN^+\mathbf{u}^+ + eN^-\mathbf{u}^-$ и на спиновый ток (ток z-компоненты спина) $\mathbf{i}^z = eN^+\mathbf{u}^+ - eN^-\mathbf{u}^-$. Множитель e в выражении для $\mathbf{i}^z$ введен из соображений удобства. Более того, каждый из токов мы представим в виде суммы "нормальной" компоненты, которая не содержит спин-орбитальных вкладов и может быть рассчитана при $\xi = 0$, и "аномальной" (спин-орбитальной), линейной по ξ:

$\mathbf{j} = \mathbf{j}_n + \mathbf{j}_a$, $\mathbf{i}^z = \mathbf{i}_n^z + \mathbf{i}_a^z$. Соответственно, и холловское поле $\mathbf{E}_H = \mathbf{E}_H^n + \mathbf{E}_H^a$. В конечном итоге нас будет интересовать $\mathbf{j}_a$ – спин-орбитальный вклад в электрический ток и соответствующая компонента поля Холла $\mathbf{E}_H^a$. Подчеркнем, что в рамках нашей модели, где электрон-электронные столкновения отсутствуют, спиновый ток релаксирует лишь в той же мере, что и электрический, а спиновая релаксация проявляется лишь в более высоких порядках по параметру ξ и ею можно пренебречь [17, 49].

Приведем стандартное уравнение на "нормальную" компоненту электрического тока

$$\frac{\mathbf{j}_n}{\tau_1} - \omega_c[\mathbf{j}_n \times \hat{\mathbf{z}}] - \frac{e^2N}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{E}_H^n) = \\ = \eta\Delta\mathbf{j}_n + \eta_{xy,H}[\Delta\mathbf{j}_n \times \hat{\mathbf{z}}], \tag{19a}$$

содержащую силу Лоренца и нечетную вязкость, связанную с силой Лоренца (13). Все параметры $\tau_1, \eta, \eta_{xy,H}$ берутся при энергии, равной энергии Ферми, ток таким образом зависит от ε_F как от параметра. Аналогичным образом, "нормальная" компонента спинового тока учетом возможной координатной зависимости степени спиновой поляризации $P_s = P_s(\mathbf{r})$ подчиняется уравнению

$$e\frac{\varepsilon_F N}{m}\boldsymbol{\nabla}P_s - P_s\frac{N}{m}e^2\mathbf{E} - \zeta\cdot[e^2\mathbf{E}\times[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{i}_n^z]] = \\ = \eta\Delta\mathbf{i}_n^z + \eta_s\Delta\mathbf{j}_n - \frac{\mathbf{i}_n^z}{\tau_1} - \frac{\mathbf{j}_n}{\tau_1^s}, \tag{19b}$$

где введены следующие обозначения: $\zeta = \eta/\varepsilon_F + \partial\eta/\partial\varepsilon_F$, $\eta_s = P_s\varepsilon_F\cdot\partial\eta/\partial\varepsilon_F$ и $(\tau_1^s)^{-1} = P_s\varepsilon_F\cdot\partial\tau_1^{-1}/\partial\varepsilon_F$. Отметим, что протекание электрического тока сопровождается возникновением спинового тока как непосредственно из-за наличия поляризации в системе, так и из-за зависимостей времен релаксации импульса и вязкости от энергии Ферми, что приводит к их различию для электронов с разными проекциями спина.

Уравнение для "аномальной" компоненты электрического тока с учетом индуцированного аномального холловского поля E_H^a имеет несколько более сложный вид:

$$\frac{\mathbf{j}_a}{\tau_1} + \frac{\boldsymbol{\nabla}p}{m} - \frac{N}{m}e^2\mathbf{E}_H^a = \\ = \eta\Delta\mathbf{j}_a + \eta_s\Delta\mathbf{i}_a^z + \eta_{xy,SO}[\Delta\mathbf{j}_n\times\hat{\mathbf{z}}] + \eta_{xy,SO}^s[\Delta\mathbf{i}_n^z\times\hat{\mathbf{z}}] + \\ + \Gamma_1[\mathbf{j}_n\times\hat{\mathbf{z}}] + \gamma_1[\mathbf{i}_n^z\times\hat{\mathbf{z}}] - \frac{\mathbf{i}_a^z}{\tau_1^s}, \tag{19c}$$

где $\Gamma_1 = P_s\varepsilon_F\cdot\partial\gamma_1/\partial\varepsilon_F$ и

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}p}{m} = P_s\left(\eta\,\Delta\mathbf{i}_a^z + \eta_{xy,SO}^s[\Delta\mathbf{j}_n\times\hat{\mathbf{z}}] + \gamma_1[\mathbf{j}_n\times\hat{\mathbf{z}}] - \frac{\mathbf{i}_a^z}{\tau_1}\right), \tag{19d}$$

– "аномальный" вклад в давления от нулевой гармоники функции распределения, обусловленный тем, что $N_+ - N_-$ может зависеть от координат. Этот вклад важен, но приводит лишь к перенормировкам соответствующих коэффициентов в правой части уравнения на аномальный ток (19). Наконец, уравнение на аномальную часть спинового тока имеет вид

$$e\frac{\varepsilon_F N}{m}\boldsymbol{\nabla}P_s - \omega_c[\mathbf{i}_a^z\times\hat{\mathbf{z}}] = \\ = \eta\,\Delta\mathbf{i}_a^z + \eta_{xy,H}[\Delta\mathbf{i}_a^z\times\hat{\mathbf{z}}] + \eta_{xy,SO}^s[\Delta\mathbf{j}_n\times\hat{\mathbf{z}}] + \\ + \gamma_1[\mathbf{j}_n\times\hat{\mathbf{z}}] - \frac{\mathbf{i}_a^z}{\tau_1} - \frac{\mathbf{j}_a}{\tau_1^s}. \tag{19e}$$

Как и выше, все величины зависят от ε_F как от параметра. Система уравнений на спиновые и электрические токи (19) является еще одним главным результатом данной работы.

В неограниченной однородной системе электрические и спиновые токи не зависят от координат. При $\mathbf{B} = 0$ формула (19) описывает взаимосвязь спинового тока и электрического, обусловленную асимметричным рассеянием $\mathbf{i}_a^z = \gamma_1[\mathbf{j}_n\times\hat{\mathbf{z}}]$ [47]. Если $\mathbf{B} \neq 0$, то формула (19) описывает связь между полем и током, обусловленную нормальным эффектом Холла, а из (19) можно вывести аномальную холловскую проводимость для двумерных электронов в виде

$$\sigma_{xy}^a = -\sigma_{yx}^a = P_s\frac{e^2N}{m}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_F}(\gamma_1\tau_1^2\varepsilon_F), \tag{20}$$

где $N = N^+ + N^-$.

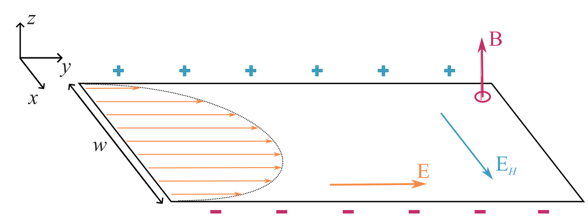

Рис. 2. (Цветной онлайн) Схема электронного канала, бесконечного вдоль оси y и шириной w вдоль оси x. Электрическое поле направлено вдоль канала ($\mathbf{E} \parallel y$), магнитное поле перпендикулярно плоскости движения частиц ($\mathbf{B} \parallel z$). Эффект Холла приводит к накоплению заряда на краях канала и $\mathbf{E}_H \parallel x$. На рисунке приведен параболический профиль тока вдоль канала в пределе гидродинамического транспорта электронов

5. Аномальный эффект Холла в проводящем канале. В качестве примера применения развитой теории рассмотрим проводящий канал ширины w по направлению x, вдоль которого направлено внешнее электрическое поле $\mathbf{E} \parallel y$, см. рис. 2. Магнитное поле $\mathbf{B} \parallel z$ перпендикулярно плоскости движения электронов. В таком случае появляется холловское поле $\mathbf{E}_H \parallel x$. В данной геометрии токов вдоль оси x нет. Найдем y-компоненту электрического тока в квазигидродинамическом пределе, когда $l_1 \gg w \gg l_2$, где $l_{1,2} = v_F\tau_{1,2}$ – длины релаксации импульса и второй угловой гармоники функции распределения. Решая (19) с граничными условиями обращения тока в нуль на стенках канала в пределе $l_1 l_2 \gg w^2$, получаем [16, 17, 54]:

$$\mathbf{j}_n = \frac{e^2 N\mathbf{E}}{2m\eta}\left[\left(\frac{w}{2}\right)^2 - x^2\right], \tag{21}$$

что соответствует пуазейлевскому течению с параболическим профилем. Подставляя (21) в (19), с учетом граничных условий и уравнения непрерывности, получаем следующее выражение для аномального вклада в холловское поле:

$$\mathbf{E}_H^a = [\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}]\left\{\left(\frac{\Gamma_1}{\eta} - \gamma_1\frac{\eta_s}{\eta^2}\right)\left[\left(\frac{w}{2}\right)^2 - x^2\right] - \frac{\eta^H_{xy,SO}}{\eta}\right\}, \tag{22}$$

где первый вклад соответствует вкладу асимметричного рассеяния [16, 54], а второй вклад – нечетной вязкости, причем записанной в форме, в которой обычно входит холловская вязкость в выражение для поля $\mathbf{E}_H^n$ [15]. При такой записи "эффективная" нечетная вязкость будет иметь вид $\eta^H_{xy,SO} = \eta \cdot P_s\varepsilon_F\,\partial(\gamma_2\tau_2)/\partial\varepsilon_F$, см. красную кривую на рис. 1. Первый вклад возможен в любых системах и при любом, в том числе короткодействующем, потенциале беспорядка, а второй вклад, обусловленный нечетной вязкостью, лишь в системах, где течение электронов неоднородно. В случае короткодействующего потенциала вклад нечетной вязкости отсутствует. В квазигидродинамическом режиме, когда $l_2 \ll w \ll l_1$, вклад нечетной вязкости, обусловленный рассеянием на примесях, может быть существенным. Аномальные вклады в эффект Холла можно выделить в экспериментах по электронному парамагнитному резонансу, "стирая" спиновую поляризацию высокочастотным полем, или в структурах низкой симметрии в наклонном поле, где вклад силы Лоренца и спин-орбитальный вклады могут контролироваться разными компонентами внешнего поля.

Отметим, что поправки к гидродинамическим уравнениям могут дать вклады в холловское поле, сопоставимые с вкладом нечетной вязкости [15]. В связи с этим исследование аномального эффекта Холла, в том числе обусловленного нечетной вязкостью, может пролить дополнительный свет на указанные явления.

6. Заключение. В работе развита микроскопическая теория нечетной (недиагональной) вязкости электронов в двумерных системах с плавным беспорядком и спин-орбитальным взаимодействием. Показано, что такой вклад возникает даже в случае, когда отсутствуют электрон-электронные столкновения. Получены аналитические выражения для компонент тензора вязкостей, включая вклад спин-орбитального взаимодействия $\eta_{xy,SO}$, который отсутствует в случае короткодействующего рассеяния, но существенен для дальнодействующего потенциала примесей. Показано, что этот вклад пропорционален спиновой поляризации носителей, константе спин-орбитального взаимодействия и зависит от параметров беспорядка.

Выведена замкнутая система уравнений для спиновых и электрических токов, учитывающая как нормальные, так и аномальные вклады для квазигидродинамического режима транспорта, где время релаксации первой угловой гармоники фукнкции распределения заметно превышает времена релаксации высших гармоник. Получен вклад нечетной вязкости в аномальное холловское поле. Данная работа является первым шагом к построению микроскопической теории нечетной вязкости во взаимодействующих электронных системах.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет гранта Российского научного фонда # 22-12-00211-Продление.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. L. Levitov and G. Falkovich, "Electron viscosity, current vortices and negative nonlocal resistance in graphene", Nature Phys. **12**, 672 (2016).
2. J. Crossno, J. K. Shi, K. Wang, X. Liu, A. Harzheim, A. Lucas, S. Sachdev, P. Kim, T. Taniguchi, K. Watanabe, T. A. Ohki, and K. C. Fong, "Observation of the Dirac fluid and the breakdown of the Wiedemann-Franz law in graphene", Science **351**(6277), 1058 (2016).
3. D. A. Bandurin, I. Torre, R. K. Kumar, M. Ben Shalom, A. Tomadin, A. Principi, G. H. Auton, E. Khestanova, K. S. Novoselov, I. V. Grigorieva, L. A. Ponomarenko, A. K. Geim, and M. Polini, "Negative local resistance caused by viscous electron backflow in graphene", Science **351**(6277), 1055 (2016).
4. P. J. W. Moll, P. Kushwaha, N. Nandi, B. Schmidt, and A. P. Mackenzie, "Evidence for hydrodynamic electron flow in $PdCoO_2$", Science **351**(6277), 1061 (2016).

5. R. Krishna Kumar, D. A. Bandurin et al., “Superballistic flow of viscous electron fluid through graphene constrictions”, Nature Phys. **13**(12), 1182 (2017).
6. P. S. Alekseev, “Negative magnetoresistance in viscous flow of two-dimensional electrons”, Phys. Rev. Lett. **117**, 166601 (2016).
7. Р. Н. Гуржи, “Минимальное сопротивление беспримесных проводников”, ЖЭТФ **44**, 771 (1963) [R. N. Gurzhi, “Minimum of resistance in impurity-free conductors”, JETP **17**, 521 (1963)].
8. Р. Н. Гуржи, “Гидродинамические эффекты в твердых телах при низких температурах”, УФН **94**, 689 (1968) [R. N. Gurzhi, “Hydrodynamic effects in solids at low temperatures”, Soviet Phys.-Uspekhi **11**, 255 (1968)].
9. T. Scaffidi, N. Nandi, B. Schmidt, A. P. Mackenzie, and J. E. Moore, “Hydrodynamic electron flow and Hall viscosity”, Phys. Rev. Lett. **118**, 226601 (2017).
10. F. M. D. Pellegrino, I. Torre, and M. Polini, “Nonlocal transport and the Hall viscosity of two-dimensional hydrodynamic electron liquids”, Phys. Rev. B **96**, 195401 (2017).
11. R. J. Doornenbal, M. Polini, and R. A. Duine, “Spin–vorticity coupling in viscous electron fluids”, Journal of Physics: Materials **2**, 015006 (2019).
12. A. I. Berdyugin, S. G. Xu, F. M. D. Pellegrino, R. Krishna Kumar, A. Principi, I. Torre, M. Ben Shalom, T. Taniguchi, K. Watanabe, I. V. Grigorieva, M. Polini, A. K. Geim, and D. A. Bandurin, “Measuring Hall viscosity of graphene’s electron fluid”, Science **364**(6436), 162 (2019).
13. P. S. Alekseev and M. A. Semina, “Hall effect in a ballistic flow of two-dimensional interacting particles”, Phys. Rev. B **100**, 125419 (2019).
14. Y. O. Alekseev and A. P. Dmitriev, “Giant Hall effect in the ballistic transport of two-dimensional electrons”, Phys. Rev. B **104**, 085434 (2021).
15. A. N. Afanasiev, P. S. Alekseev, A. A. Danilenko, A. P. Dmitriev, A. A. Greshnov, and M. A. Semina, “Hall effect in Poiseuille flow of two-dimensional electron fluid”, Phys. Rev. B **106**, 245415 (2022).
16. K. K. Grigoryan, D. S. Zohrabyan, and M. M. Glazov, “Anomalous Hall effect in ultraclean electronic channels”, Phys. Rev. B **109**, 085301 (2024).
17. M. M. Glazov, “Valley and spin accumulation in ballistic and hydrodynamic channels”, 2D Materials **9**, 015027 (2022).
18. A. N. Afanasiev, P. S. Alekseev, A. A. Danilenko, A. A. Greshnov, and M. A. Semina, “Rotational viscosity in spin resonance of hydrodynamic electrons”, Phys. Rev. B **106**, L041407 (2022).
19. K. S. Denisov, K. A. Baryshnikov, and P. S. Alekseev, “Spin imaging of Poiseuille flow of a viscous electronic fluid”, Phys. Rev. B **106**, L081113 (2022).
20. H. Funaki, R. Toshio, and G. Tatara, “Vorticity-induced anomalous Hall effect in an electron fluid”, Phys. Rev. Res. **3**, 033075 (2021).
21. G. Tatara, “Hydrodynamic theory of vorticity-induced spin transport”, Phys. Rev. B **104**, 184414 (2021).
22. E. H. Hasdeo, J. Ekström, E. G. Idrisov, and T. L. Schmidt, “Electron hydrodynamics of two-dimensional anomalous Hall materials”, Phys. Rev. B **103**, 125106 (2021).
23. V. F. Gantmakher and Y. B. Levinson, *Carrier Scattering in Metals and Semiconductors* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1987).
24. V. N. Mantsevich and M. M. Glazov, “Viscous hydrodynamics of excitons in van der Waals heterostructures”, Phys. Rev. B **110**, 165305 (2024).
25. J. E. Avron, “Odd viscosity”, J. Stat. Phys. **92**, 543 (1998).
26. D. Banerjee, A. Souslov, A. G. Abanov, and V. Vitelli, “Odd viscosity in chiral active fluids”, Nat. Commun. **8**, 1573 (2017).
27. S. Ganeshan and A. G. Abanov, “Odd viscosity in two-dimensional incompressible fluids”, Phys. Rev. Fluids **2**, 094101 (2017).
28. M. Fruchart, M. Han, C. Scheibner, and V. Vitelli, “The odd ideal gas: Hall viscosity and thermal conductivity from non-hermitian kinetic theory”, arXiv:2202.02037 (2022).
29. M. Fruchart, C. Scheibner, and V. Vitelli, “Odd viscosity and odd elasticity”, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **14**, 471 (2023).
30. D. Zverevich, D. B. Gutman, and A. Levchenko, “Hydrodynamic Coulomb drag in odd electron liquids”, Phys. Rev. B **112**, 045309 (2025).
31. S. Chapman and T. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases: An Account of the Kinetic Theory of Viscosity, Thermal Conduction and Diffusion in Gases* (Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 1990).
32. M. Matsuo, Y. Ohnuma, and S. Maekawa, “Theory of spin hydrodynamic generation”, Phys. Rev. B **96**, 020401 (2017).
33. R. Takahashi, H. Chudo, M. Matsuo, K. Harii, Y. Ohnuma, S. Maekawa, and E. Saitoh, “Giant spin hydrodynamic generation in laminar flow”, Nat. Commun. **11**, 3009 (2020).
34. J. Fujimoto, W. Koshibae, and S. Maekawa, “Anti-Poiseuille flow by spin Hall effect”, PNAS Nexus **3**, pgae547 (2024).
35. X.-G. Huang, “An introduction to relativistic spin hydrodynamics”, Nucl. Sci. Tech. **36**, 208 (2025).
36. E. H. Hall, “On a new action of the magnet on electric currents”, Am. J. Math. **2**, 287 (1879).
37. E. H. Hall, “XXXVIII. On the new action of magnetism on a permanent electric current”, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **5**, 57 (1881).

38. E. N. Adams and E. I. Blount, “Energy bands in the presence of an external force field–II: Anomalous velocities”, J. Phys. Chem. Solids **10**(4), 286 (1959).
39. Л. Э. Гуревич, И. Н. Яссиевич, “Теория ферромагнитного эффекта Холла”, ФТТ **4**, 2854 (1962) [L. E. Gurevich and I. N. Yassievich, “Theory of ferromagnetic Hall effect”, Sov. Phys. Solid. State **4**, 2091 (1963)].
40. В. Н. Абакумов, И. Н. Яссиевич, “Аномальный эффект Холла на поляризованных электронах в полупроводниках”, ЖЭТФ **61**, 2571 (1971) [V. Abakumov and I. Yassievich, “Anomalous Hall effect for polarized electrons in semiconductors”, JETP **34**, 1375 (1972)].
41. P. Nozières and C. Lewiner, “A simple theory of the anomalous Hall effect in semiconductors”, J. Phys. France **34**(10), 901 (1973).
42. N. A. Sinitsyn, “Semiclassical theories of the anomalous Hall effect”, J. Phys. Condens. Matter **20**, 023201 (2007).
43. V. Dugaev, M. Taillefumier, B. Canals, C. Lacroix, and P. Bruno, *Anomalous Hall effect*, in *Strongly correlated systems, coherence and entanglement* (World Scientific, Singapore, 2007), p. 145.
44. N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong, “Anomalous Hall effect”, Rev. Mod. Phys. **82**, 1539 (2010).
45. I. A. Ado, I. A. Dmitriev, P. M. Ostrovsky, and M. Titov, “Anomalous Hall effect with massive Dirac fermions”, EPL **111**, 37004 (2015).
46. V. K. Kozin, V. A. Shabashov, A. V. Kavokin, and I. A. Shelykh, “Anomalous exciton hall effect”, Phys. Rev. Lett. **126**, 036801 (2021).
47. M. M. Glazov and L. E. Golub, “Valley Hall effect caused by the phonon and photon drag”, Phys. Rev. B **102**, 155302 (2020).
48. M. M. Glazov and L. E. Golub, “Skew Scattering and Side Jump Drive Exciton Valley Hall Effect in Two-Dimensional Crystals”, Phys. Rev. Lett. **125**, 157403 (2020).
49. N. S. Averkiev, L. E. Golub, and M. Willander, “Spin relaxation anisotropy in two-dimensional semiconductor systems”, J. Phys.: Condens. Matter **14**, R271 (2002).
50. B. I. Sturman, “Collision integral for elastic scattering of electrons and phonons”, Soviet Phys.-Uspekhi **27**, 881 (1984).
51. M. I. Dyakonov and V. I. Perel’, “Current induced spin orientation of electrons in semiconductors”, Phys. Lett. A **35A**, 459 (1971).
52. M. B. Lifshits and M. I. Dyakonov, “Swapping spin currents: Interchanging spin and flow directions”, Phys. Rev. Lett. **103**, 186601 (2009).
53. M. I. Dyakonov (editor), *Spin physics in semiconductors. Springer Series in Solid-State Sciences*, 2nd ed. (Springer International Publishing, Berlin, 2017), v. 157.
54. Д. С. Зограбян, М. М. Глазов, “Переход от диффузионного к гидродинамическому режиму в аномальном эффекте Холла”, ФТТ **65**, 2295 (2023) [D. S. Zohrabyan and M. M. Glazov, “Diffusive-hydrodynamic transition in the anomalous hall effect”, Phys. Solid State **65**, 2205 (2023)].
55. L. Landau and E. Lifshitz, *Physical Kinetics* (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1981).
56. V. A. Zakharov and I. S. Burmistrov, “Residual bulk viscosity of a disordered two-dimensional electron gas”, Phys. Rev. B **103**, 235305 (2021).
57. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1987).