Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 5, с. 326 – 330 © 2026 г. 10 марта

Восстановление статистики фотонов при наличии шума фотодетектирования

А. С. Чиркин[1)]

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, 119992 Москва, Россия

Поступила в редакцию 25 ноября 2025 г.
После переработки 11 января 2026 г.
Принята к публикации 21 января 2026 г.

Развит оригинальный подход извлечения информации о функции распределения фотонов, регистрируемых методом фотоотсчетов, при наличии помех. Изучено восстановление статистики фотонов при наличии двух типов помех: темновых отсчетов и фонового излучения. Расчет основан на применении характеристической функции. Обсуждается вопрос корректного восстановления статистики фотонов и надлежащих условий постановки эксперимента. Полученные результаты могут найти применение при измерении статистики фотонов малофотонных источников излучения и неклассических световых полей.

DOI: 10.7868/S3034576626030024

В квантовых технологиях фотоны используются как носители информации [1]. Поэтому свойства фотонных источников влияют на качество записываемой и получаемой информации. В связи с этим характеризация однофотонных и малофотонных источников оптического излучения является важной задачей. В настоящее время существует разнообразие фотодетекторов, в том числе счетчиков одиночных фотонов. Выбор типа фотодетектора зависит от конкретной поставленной задачи, определяющей его необходимые характеристики [2, 3]. Процесс фотодетектирования зависит также от свойств регистрируемого излучения (см. ниже обсуждение).

Можно выделить два способа измерения квантового состояния света: квантовую томографию, основанную на гомодинном детектировании, и метод фотоотсчетов, в основе которой лежит прямое детектирование исследуемого излучения. В первом способе извлекают информацию об операторе плотности [2, 4, 5], во втором – о распределениии числа фотонов, связанным с диагональными элементами оператора плотности [2, 3].

Исторически сначала был разработан метод фотоотсчетов, его развитию на начальном этапе способствовало создание лазеров с узкой спектральной линией излучения и быстродействующих электронных устройств. В настоящее время метод фотоотсчетов широко используется в различных приложениях (см. [3] и цитируемую там литературу).

В методе фотоотсчетов статистика фотонов детектируемого излучения преобразуется в статистику фотоэлектронов. Однако вследствие вероятностного характера самого процесса детектирования (не каждый фотон вызывает появление электрона) указанные статистики в общем случае не совпадают.

Существуют прямая и обратная задачи статистики фотоотсчетов [6–9]. В прямой задаче для регистрируемого излучения находят функцию распределения фотоэлектронов по полуклассической формуле Манделя для интенсивного классического излучения или по квантовой формуле, представляющей собой свертку распределения Бернулли с распределением фотонов. В обратной задаче по функции распределения фотоотсчетов восстанавливают статистику фотонов, которая априори неизвестна.

В настоящей работе речь идет о квантовой обратной задаче статистики фотоотсчетов. Эта проблема хорошо изучена для одномерного распределения в отсутствии помех регистрации излучения [3, 10–13]. При этом определены критерии применимости обратного преобразования Бернулли, к которому сводится решение квантовой задачи. С другими аналитическими и численными методами решения обратной задачи статистики фотоотсчетов можно познакомится в [3]. Заметим, что обратная многомерная квантовая задача статистики фотоотсчетов недавно решена в [14].

Вместе с тем в статистику фотоотсчетов могут давать вклад засветка (паразитное излучение) и так называемые темновые отсчеты, связанные с эмиссией электронов в отсутствии излучения. Восстановление статистики фотонов при наличии шума регистрации изучалось в [15, 16], где рассмотрение ограничено пуассоновской статистикой помех. Результа-

[1)]e-mail: aschirkin@rambler.ru

ты настоящей работы выходят за рамки этого ограничения и отличаются исходной моделью детектирования, в основе которой лежит статистическая независимость детектируемого излучения и шума.

Цель настоящей работы – разработка теории обратной квантовой задачи статистики фотоотсчетов на основе применения метода характеристической функции. Такой подход дает возможность получить простые алгоритмы для нахождения статистики регистрируемого излучения при наличии шума, статистические характеристики которого считаются известными. Они могут быть измерены в отсутствии полезного излучения. При этом полагаем, что процесс детектирования происходит в “идеальных” условиях, имея в виду, что поглощение фотона без помех может сопровождаться появлением только одного импульса. В этом случае можно использовать, например, ФЭУ или многопиксельные кремневые фотоумножители (SiPM) в режиме подавления послеимпульса [3].

Изложим сначала метод восстановления статистики фотонов с применением характеристической функции (ХФ) в отсутствии шума.

Последовательное квантовое описание процесса фотодетектирования приводит к следующему выражению для вероятности вылета m электронов [17]:

$$Q(m) = \sum_{n=m}^{\infty} C_m^n \eta^m (1-\eta)^{n-m} P(n),\; C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \tag{1}$$

где $P(n)$ – вероятность распределения регистрируемых фотонов, которая определяется диагональными элементами матрицы плотности. η – квантовая эффективность процесса детектирования. Выражение (1) принято называть преобразованием Бернулли.

Статистика фотоэлектронов (1) является результатом двух стохастических процессов: статистики испускания фотоэлектронов и статистики фотонов. Поэтому безусловная ХФ фотоотсчетов дается выражением

$$C_Q(u) = \sum_{m=0}^{\infty} Q(m) e^{imu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_Q(u|n) P(n), \tag{2}$$

$C_Q(u|n)$ – условная ХФ фотоотсчетов при фиксированном числе фотонов.

$$C_Q(u|n) = \sum_{m=0}^{n} e^{ium} Q(m|n) = (1+\eta(e^{iu}-1))^n. \tag{3}$$

Выражение (2) запишем так

$$C_Q(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) e^{iz(u)n} = C_P(z(u)), \tag{4}$$

где $C_P(u)$ – ХФ распределения фотонов и

$$z(u) = -i\ln(1+\eta(e^{iu}-1)). \tag{5}$$

Равенство (4) означает, что ХФ фотоотсчетов аргумента u можно рассматривать как ХФ фотонов от аргумента z. При квантовой эффективности $\eta = 1$ параметр $z = u$, т.е. $C_Q = C_P$, и статистика фотоотсчетов совпадает со статистикой фотонов. Как отмечалось, что в реальной ситуации такого соответствия нет.

Статистику фотонов $P(n)$ из ХФ дискретной величины находим с помощью фурье-преобразования на интервале $[-\pi, \pi]$:

$$P(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} C_P(z) e^{-inz} dz = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \sum_{m=0}^{\infty} Q(m) e^{imu(z)} e^{-inz} dz. \tag{6}$$

Согласно (5), $u(z) = -i\ln[(\eta - 1 + e^{iz})/\eta]$ и пользуясь формулой бинома Ньютона, после интегрирование по z получим выражение

$$P(n) = \sum_{m=n}^{\infty} \eta^{-n}(1-\eta^{-1})^{m-n} C_m^n Q(m). \tag{7}$$

Такая же формула приведена в [10], полученная другим способом. Ниже изложено обобщение развитого подхода.

Как отмечалось выше, в реальной ситуации процесс фотодетектирования происходит в присутствии шумовых отсчетов, физическая природа которых может быть весьма разнообразна. Существенно, что статистика таких отсчетов не связана со статистикой фотонов и соответственно с фотоотсчетами, под которыми мы будем иметь ввиду отсчеты в отсутствии шума. Таким образом регистрируемые отсчеты, которые обозначим как M, представлят собой сумму фотоотсчетов m и шумовых отсчетов, обозначаемых как N , т.е. $M = m + N$.

Поскольку статистики фотоотсчетов и шумовых отсчетов статистически независимы, то функция распределения $Q_S(M)$ суммарных отсчетов M удовлетворяют следующим соотношениям:

$$Q_S(M) = \sum_{k=0}^{M} Q(M-k) Q_N(k). \tag{8}$$

Распределение фотоотсчетов $Q_S(M)$ считается известным из результатов эксперимента, статистика шумовых отсчетов $Q_N(k)$ также известна.

Для ХФ, как и следовало ожидать, получаем соотношение

$$C_S(u) = \sum_{M=0}^{\infty} e^{iuM} Q_S(M) = C_Q(u) C_N(u), \qquad (9)$$

где $C_Q(u)$ определяется формулой (4).

В модели шумов с пуассоновской статистикой

$$Q_N(k) = \frac{(\overline{N})^k}{k!} e^{-\overline{N}}, \; C_N(u) = e^{-(1-e^{iu})\overline{N}}, \qquad (10)$$

где $\overline{N}$ – среднее число отсчетов на интервале наблюдения.

Согласно (9), ХФ фотоотсчетов, связанная с регистрируемыми фотонами, равна

$$C_Q(u) = C_S(u)/C_N(u) = C_S(u) e^{(1-e^{iu})\overline{N}}. \qquad (11)$$

Из этого выражения находим функцию распределения фотоотсчетов

$$Q(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_Q(u) e^{imu} du = \\ = e^{\overline{N}} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-\overline{N})^k}{k!} Q_S(m-k). \qquad (12)$$

Формула (12) определяет статистику фотоотсчетов из суммарного числа отсчетов, включающих шумовые импульсы. Далее выражение (12) следует подставить в (7) для определения уже статистики фотонов. Таким образом, процедура восстановления статистики фотонов оказывается двухэтапной.

Обратимся теперь к задаче с паразитной засветкой при фотодетектировании. В случае когерентной засветки или некогерентной с временем корреляции излучения гораздо меньше времени выборки задача сводится к уже рассмотренной.

Обсудим ситуацию с некогерентной (тепловой) засветкой, когда время корреляции излучения, напротив, гораздо больше времени выборки. Тогда статистика фоновых (шумовых) фотонов подчиняется статистике Бозе–Эйнштейна $P_B(n)$ и имеет ХФ $C_B(u)$:

$$P_B(n) = \frac{(\overline{n})_N^n}{(1+\overline{n}_N)^{n+1}}, \; C_B(u) = (1 + \overline{n}_N(1-e^{iu}))^{-1}. \qquad (13)$$

При наличии некогерентной засветки теперь статистика регистрируемых фотонов определяется сверткой

$$P(n) = \sum_{l=0}^{n} P_S(n-l) P_B(l). \qquad (14)$$

Функцию $P(n)$ находим из распределения фотоотсчетов по формуле (7).

Вследствие статистической независимости сигнального и некогерентного излучений ХФ фотоотсчетов равна (ср. с (9))

$$C(u) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{inu} P(n) = C_S(u) C_B(u). \qquad (15)$$

Из (15) находим ХФ сигнального поля и определяем по ней статистику фотонов

$$P_S(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} C(u) C_B^{-1}(u) e^{-inu} du. \qquad (16)$$

Подстановка в (16) выражений (13), (15) после несложных преобразований приводит к такому результату

$$P_S(n) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} du (1 + \overline{n}_N(1-e^{iu})) e^{-inu} \sum_{k=0}^{\infty} e^{iku} P(k) = \\ = (1+\overline{n}_N) P(n) - \overline{n}_N P(n-1), \qquad (17)$$

причем $P(n<0) = 0$. Функция распределения $P_S(n)$ удовлетворяет условию нормировки $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) = 1$.

В качестве проверки справедливости формулы (17) рассмотрим случай, когда сигнальные фотоны имеют также тепловую статистику со средним числом фотонов $\overline{n}_s$. Заметим, что такой же статистикой обладает, в частности, излучение спонтанного параметрического рассеяния [18].

Характеристическая функция регистрируемых полей при этом имеет вид

$$C_u(u) = [(1 + \overline{n}_s(1-e^{iu})(1 + \overline{n}(1-e^{iu}))]^{-1}. \qquad (18)$$

Она соответствует распределению фотонов следующего вида [19]

$$P(n) = \frac{1}{1+\overline{n}_N} \frac{\overline{n}_s^n}{(1+\overline{n}_s)^{n+1}} \frac{1-\overline{n}_d^{n+1}}{1-\overline{n}_d}, \qquad (19)$$

где введено обозначение $\overline{n}_d = \overline{n}_N(1+\overline{n}_s)/\overline{n}_s(1+\overline{n}_N)$.

Подстановка (19) в (17) дает правильный результат:

$$P_S(n) = \frac{\overline{n}_s^n}{(1+\overline{n}_s)^{n+1}}. \qquad (20)$$

В работе, таким образом, представлен метод решения обратной задачи статистики фотоотсчетов при наличии помех фотодетектирования. Изучено влияние источников шума двух типов: темновых отсчетов (внутренние шумы) и фонового, внешнего излучения. В обоих случаях процедура извления информации о статистике фотонов состоит из двух этапов.

В первом типе помех сначала решается задача нахождения распределения фотоотсчетов, связанных с детектируемым излучением, а потом по нему решается обратная задача нахождения распределения фотонов. Во втором типе помех сперва решается обратная задача восстановления статистики фотонов по распределению фотоотсчетов, а затем находится распределение регистрируемых фотонов. Результаты получены при физически разумных предположениях – флуктуации помех статистически независимы от регистрируемого полезного излучения.

Вместе с тем заметим, что поскольку пуассоновская статистика и статистика Бозе–Эйнштена фотонов сохраняется при биномиальном преобразовании (определяется формулой (1)) источники помех можно рассматривать как воздействие только внутренних или только внешних шумов при соответствущем их пересчете. Это означает возможность выбора способа извлечения информации о статистике фотонов при наличии помех.

Обсудим теперь вопрос корректности разработанного алгоритма решения обратной задачи – извлечения информации о статистике фотонов при наличии помех детектирования. Решение, кажется, формально математически корректным, что подтверждает рассмотренный пример восстановление статистики теплового излучения в присутствии шума (формулы (19), (20)). Вопрос переносится в область устойчивости обратного преобразования Бернулли, когда решение в принципе можно представить в виде (7).

В нашей работе [13] показано, что причина лежит в свойстве ассоциативности бесконечных матриц, через которые можно записать выражение (7). Установлено, что сходимость ряда (7) при квантовой эффективности $\eta < 0.5$ зависит от типа распределения $Q(m)$. Так, например, для компаунд – распределения Пуассона [1, 20] сходимость (7) имеет место при $\eta > \eta_{cr} = 1/(2+\frac{a}{\overline{m}})$, где a – параметр распределения и $\overline{m}$ – среднее число фотоотсчетов. Для распределения Пуассона $a \to \infty$ и $\eta_{cr} \to 0$ получаем известный результат – существование обратного преобразования Бернулли для любого значения η. В случае тепловой статистики $a = 1$ значение $\eta_{cr} = \overline{m}/(2\overline{m}+1)$. Наконец заметим, что ранее было установлено [10], что для любого конечного распределения $Q(m)$ решение обратной задачи устойчиво для произвольного значения η.

Из изложенного следует, что для исследуемой обратной квантовой задачи статистики фотоотсчетов *всегда* можно найти область значений параметра квантовой эффективности η, для которых решение будет корректно . Иначе говоря, в этой области значений η статистическая ошибка измерений $Q(m)$ из-за конечного объема выборки не приведет к большим ошибкам в нахождении $P(n)$ [3]. Это обстоятельство, разумеется, чрезвычайно важно для постановки экспериментов и обработки результатов.

При выполнении эксперимента и последующей реализации развитого алгоритма, помимо рассмотренной принципиальной математической проблемы, необходимо учитывать такие параметры фотодетектирования: интервал времени τ_d, в течение которого следующий акт эмиссии фотоэлектрона не регистрируется (так называемое мертвое время детектора); время корреляции τ_c и площадь когерентности s регистрируемого излучения. Последние, чтобы избежать интегрирующего (усредняющего) эффекта, должны быть гораздо больше соответственно интервала выборки T [6, 21] и площади фоточувствительной поверхности детектирования Π [21].

Что касается мертвого времени, то оно должно быть значительно меньше интервала выборки ($\tau_d \ll T$). При этом ожидаемое среднее число фотоотсчетов $\overline{n} \ll T/\tau_d$, что обычно выполняется при детектировании малоинтенсивных световых полей. При регистрации случайных световых полей необходимо,таким образом, выполнения условия $\tau_d \ll T \ll \tau_c$ [21]. Наконец, стоит напомнить, что выборки следует производить через интервал времени, значительно больше времени корреляции излучения.

Полученные в работе результаты могут найти применение при изучении статистики фотонов малофотонных источников излучения, параметрически рассеянного света и света в сжатом состоянии.

Автор благодарит рецензента за конструктивные замечания.

Финансирование работы. Данное исследование выполнено в рамках государственного задания Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Ю. И. Богданов, Н. А.Богданова, В. Ф. Лукичев, *Введение в квантовые информационные технологии* (Техносфера, М., 2025) [Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, and V. F. Lukichev, *Vvedenie v kvantovye informatsionnye tekhnologii* (Tekhnosfera, Moscow, 2025)] [in Russian].
2. M. D. Eisaman, J. Fan, A. Migdall, and S. V. Polyakov, "Invited review article: Single-photon sources and detectors", Rev. Sci. Instrum. **82**, 071101(2011).

3. П. П. Гостев, С. А. Магницкий, А. С. Чиркин, *Метод счета фотонов в обратных задачах статистики фотоотсчетов* (Физфак МГУ, М., 2022) [P. P. Gostev, S. A. Magnitskiy, and A. S. Chirkin, *Metod scheta fotonov v obratnykh zadachakh statistiki fotootschetov* (Fisfak MGU, Moscow, 2022)] [in Russian].
4. С. А. Магницкий, Д. Н. Фроловцев, *Квантовая оптическая томография поляризационных состояний бифотонов* (Физфак МГУ, М. 2022) [S. A. Magnitsky and D. N. Frolovtsev, *Kvantovaya opticheskaya tomografya polyarizatsionnykh sostoyaniy bifotonov* (Fisfak MGU, Moscow, 2022)] [in Russian].
5. A. I. Lvovsky and M. G. Raymer, "Continuous-variable optical quantum-state tomography", Rev. Mod. Phys. **81**, 299 (2009).
6. С. А. Ахманов, Ю. Е. Дьяков, А. С. Чиркин, *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (Наука, М., 1981) [S. A. Akhmanov, Yu. E. Dyakov, and A. S. Chirkin, *Vvedenie v statisticheskuyu radiofsiku i optiku* (Nauka, Moscow, 1981)] [in Russian].
7. С. Я. Килин, *Квантовая оптика. Поля и их детектирование* (Наука и техника, Минск, 1990) [S. Ya. Kilin, *Kvantovaya optika. Polya i detektirovanie* (Nauka i tekhnika, Minsk, 1990)] [in Russian].
8. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (Физматлит, М., 2000), пер. с англ. под ред. В. В. Самарцева [L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Published by the Press Syndicate of the University of Cambridge, N.Y., 1995)].
9. Я. Перина, *Когерентность света* (Мир, М., 1974) [J. Perina, *Coherence of Light* (Reinhold Comp., London, 1973)].
10. T. Kiss, U. Herzog, and U. Leonhardt, "Compensation of losses in photodetection and in quantum-state measurements", Phys. Rev. A **52**, 2433 (1995).
11. A. A. Semenov, A. V.Turchin, and H. V. Gomonay, "Detection of quantum light in the presence of noise", Phys. Rev. A **78**, 055803 (2008).
12. П. П.Гостев, С. А. Магницкий, А. С. Чиркин, "Рекуррентный метод решения обратной задачи статистики фотоотсчетов", Квантовая электроника **51**, 925 (2021) [P. P. Gostev, S. A. Magnitskii, and A. S. Chirkin, "Recursive method for solving the inverse problem of photocount statistics", Quantum Electron. **51**, 925 (2021)].
13. P. P. Gostev, S. A. Magnitskiy, and A. S. Chirkin, "Inverse problem of photocount statistics: Applicability criterion for the inverse Bernoulli transform method", Phys. Rev. A **107**, 043710 (2023).
14. А. С. Чиркин, "Обратная квантовая проблема многомерной статистики фотоотсчетов", Письма в ЖЭТФ **121**(8), 639 (2025) [A. S. Chirkin, "Inverse Quantum Problem of Multidimensional Photocount Statistics", JETP Lett. **121**, 608 (2925).
15. V. N. Starkov, A. A. Semenov, and H. V. Gomonay, "Numerical reconstruction of photon-number statistics from photocounting statistics: Regularization of an ill-posed problem", Phys. Rev. A **80**, 013813 (2009).
16. P. P. Gostev, S. A. Magnitskiy, and A. S. Chirkin, "Recovery of excess laser noise photon-number distribution from photocounting statistics", Conference Paper, Nov. 2020;
DOI: 10.1109/ICLO48556.2020.9285575.
17. Р. Лоудон, *Квантовая теория света* (Мир, М., 1976) [R. Loudon, *Quantum Theory of Light* (Clarendon Press, Oxford, 1973)].
18. Р. В. Захаров, О. В. Тихонова, "Корреляция фотонов и свойства неклассических оптических полей в сжатом состоянии", УФН **193** (4), 406 (2023) [R. V. Zakharov and O. V. Tikhonova, "Photon correlations and features of nonclassical optical fields in a squeezed vacuum state", Phys.-Uspekhi **66**, 381 (2023)].
19. А. Г. Шереметьев, *Статистическая теория лазерной связи* (Связь, М., 1971) [A. G. Sheremetev, *Statisticheskaya teoriya lasernoy svyazi* (Svyaz, Moscow, 1971)] [in Russian].
20. Ю. И. Богданов, Н. А.Богданова, К. Г. Катамадзе, Г. В. Авосопянц, В. Ф. Лукичев, "Исследование статистики фотонов с использованием компаунд-распределением Пуассона и квадратурных измерений", Автометрия **52** (5), 71 (2016) [Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, and V. F. Lukichev, "Study of photon statistics using a compound Poisson distribution and quadrature measurements", Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing **52**, 475 (2016)].
21. Е. Джейкман, *Корреляция фотонов* в кн. *Спектроскопия оптического смешения и корреляция фотонов*, под ред. Г. Камминса и Э. Пайка (Мир, М., 1978) [E. Jakeman, "Photon Correlation" in *Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy*, ed. by H. Z. Cummins and E. R. Pike (Plenum Press, N.Y., 1974)].