Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 5, с. 339 – 345 © 2026 г. 10 марта

Дрейф к изотропизации при зарождении трехмерной гидродинамической турбулентности

Д. С. Агафонцев[+*×1)], *А. С. Ильин*[×∘], *А. В. Копьев*[×]

[+]*Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, 117997 Москва, Россия*

[*]*Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия*

[×]*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[∘]*Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 101000 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 декабря 2025 г.
После переработки 22 января 2026 г.
Принята к публикации 27 января 2026 г.

В несжимаемых трехмерных уравнениях Эйлера образуются очень тонкие блинообразные области с экспоненциально возрастающей завихренностью. Характерная толщина таких областей экспоненциально уменьшается со временем, в то время как два других размера существенно не изменяются, что делает поток вблизи каждого блина сильно анизотропным. Количество блинов увеличивается со временем, что может усиливать анизотропию потока, особенно если они ориентируются похожим образом в пространстве. В данной работе мы численно изучаем анизотропию, анализируя эволюцию так называемых *маркеров изотропии* [Phys. Rev. Fluids **10**, L022602 (2025)]. Мы показываем, что эти функции медленно дрейфуют к единице, указывая на процесс медленной изотропизации, который происходит без возбуждения вязкостных масштабов и несмотря на похожую ориентацию образующихся блинов.

DOI: 10.7868/S3034576626030043

1. Введение. Изучение турбулентности сохраняет свою актуальность, что обусловлено как ее повсеместной распространенностью в природных системах, так и исключительной трудностью исследования при строгом аналитическом описании [1, 2]. Наиболее изученным случаем является развитая стационарная турбулентность, которая служит отправной точкой для многих теоретических концепций в этой области. Ключевым элементом в построении ее теории является гипотеза Колмогорова о локальной изотропии поля скорости [3–5]. Эксперименты [6] показывают, что развитое турбулентное течение хорошо описывается в рамках модели стационарной изотропной турбулентности с аддитивной накачкой [7]. В теории развитой турбулентности вязкость играет центральную роль, позволяя турбулентному процессу достигать стационарного состояния [8, 9].

В то же время зарождение турбулентности из крупномасштабного начального возмущения является гораздо менее изученной задачей. В этом случае вязкостью можно пренебречь и для анализа можно использовать уравнения Эйлера. Тогда описание начальных стадий формирования турбулентности представляет собой существенно нестационарную задачу как во времени, так и в пространстве [10], и предположение о локальной изотропии, особенно для анизотропных начальных течений, не выглядит столь же естественным, как в случае колмогоровской турбулентности.

Начиная с ранних численных экспериментов Браше [11] известно, что при зарождении турбулентности в течении, описываемом уравнениями Эйлера, развиваются области экспоненциально растущей завихренности в виде блиноподобных структур (тонких листов завихренности). Напротив, стационарная турбулентность, описываемая уравнениями Навье–Стокса, характеризуется существенно иными типами структур, например, филаментами (нитями) [12–14], подтверждая существенно отличные статистические свойства течения на этой стадии. В частности, возникновение и эволюция блиноподобных структур в эйлеровой динамике, их разрушение при возбуждении вязких масштабов и появление нитевидных структур (жгутов) при переходе к полностью развитому турбулентному состоянию недавно наблюдались численно в работе [15].

На стадии эйлеровой динамики характерная толщина блина экспоненциально уменьшается со временем, в то время как два другие его размера не меняются существенно [16–18]. Число блиноподобных

1)e-mail: dmitrij@itp.ac.ru

структур возрастает, и вместе они обеспечивают основной вклад в спектр энергии. Когда блины ориентированы в пространстве похожим образом, представляя сильно анизотропную конфигурацию течения, наблюдается постепенное формирование колмогоровского спектра энергии $E_k \propto k^{-5/3}$ и соответствующих степенных скейлингов для структурных функций поля скорости [16, 19, 20]. Наоборот, когда блины ориентированы случайным образом, степенные скейлинги не наблюдаются на всем протяжении численного эксперимента. Естественно предположить, поэтому, что анизотропия способствует формированию колмогоровского спектра и может усиливаться по мере развития турбулентности до тех пор, пока не будут возбуждены вязкие масштабы.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы численно проверить последнюю гипотезу, а именно, усиливается ли анизотропия в ходе зарождения турбулентности. Мы используем новый подход, недавно разработанный в статье [21] для анализа анизотропии через систему безразмерных стохастических тождеств. Эти тождества сформулированы для корреляторов определенных безразмерных комбинаций, составленных из компонент тензоров второго ранга. Корреляторы могут быть использованы в качестве *маркеров изотропии*: чем ближе корреляторы к единице (их значение в полностью изотропном случае), тем ближе статистика к изотропной.

В частности, мы проводим численное моделирование трехмерных уравнений Эйлера, задавая в качестве начальных условий суперпозицию сдвигового течения $\mathbf{v} = (\sin z, \cos z, 0)$ и случайного периодического течения; интервал времени моделирования при этом ограничен сверху для точного моделирования эйлеровой динамики. Наличие сдвигового течения влияет на ориентацию возникающих блиноподобных структур: от полностью случайной, когда этого течения нет, до почти одинаковой и направленной вдоль оси z, когда оно доминирует. Мы наблюдаем, что для случайного начального течения маркеры изотропии остаются достаточно близкими к единице в течение всего времени эволюции. Для композиции сдвигового и случайного течений в приблизительно равных пропорциях маркеры также практически не меняются со временем, но некоторые из них могут иметь значения, существенно отличающиеся от единицы. Когда сдвиговое течение доминирует, все изученные нами начальные течения приводят к почти одинаковой ориентации блиноподобных структур, в то время как маркеры изотропии, изначально отклоняющиеся от единицы на порядки величины, демонстрируют медленный дрейф по направлению к единице.

Статья организована следующим образом. В разделе 2, следуя результатам, полученным в работе [21], мы вводим маркеры изотропии. В разделе 3 мы обсуждаем наши численные методы, а в разделе 4 демонстрируем основные результаты. Заключительные замечания приведены в разделе 5.

2. Маркеры изотропии. Рассмотрим произвольный невырожденный трехмерный тензор второго ранга $\mathbf{A}$ и связанную с ним симметричную положительно определенную квадратичную форму $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ (матрицу Грама). В заданном базисе матрица Грама может быть представлена через разложение Гаусса,

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Z}^T\mathbf{D}^2\mathbf{Z}, \tag{1}$$

где $\mathbf{D} = \operatorname{diag}\{D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}\}$, а $\mathbf{Z}$ – верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали. Заметим, что элементы диагональной матрицы $\mathbf{D}$, вообще говоря, не совпадают с собственными значениями матрицы $\mathbf{\Gamma}$ и зависят от выбранного базиса. Как следует из (1),

$$D_{xx}^2 = \Gamma_{xx}, \quad D_{yy}^2 = \frac{m_{xy}}{\Gamma_{xx}}, \quad D_{zz}^2 = \frac{\det\mathbf{\Gamma}}{m_{xy}}, \tag{2}$$

где m_{xy} – второй главный минор матрицы $\mathbf{\Gamma}$.

Пусть теперь тензор $\mathbf{A}$ является случайным, а его вероятностная мера инвариантна относительно вращений (изотропна),

$$\rho(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{O}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{O}), \quad \forall\, \mathbf{O} \in O(d). \tag{3}$$

Тогда выполняются следующие стохастические тождества [21, 22]:

$$\begin{gathered}\langle D_{zz}/D_{yy}\rangle = \left\langle \Gamma_{xx}^{1/2}\,(\det\mathbf{\Gamma})^{1/2}\,/\,m_{xy}\right\rangle = 1,\\ \langle D_{yy}/D_{xx}\rangle = \left\langle m_{xy}^{1/2}/\Gamma_{xx}\right\rangle = 1,\\ \left\langle D_{yy}D_{zz}/D_{xx}^2\right\rangle = \left\langle(\det\mathbf{\Gamma})^{1/2}/\Gamma_{xx}^{3/2}\right\rangle = 1,\end{gathered} \tag{4}$$

где $\langle\ldots\rangle$ означает усреднение по объему течения. Первое из этих тождеств требует только аксиальной симметрии вероятностной меры относительно оси x, тогда как второе тождество требует того же относительно оси z. Тождества (4) выполняются для произвольных изотропных вероятностных мер во все моменты времени: их существование полностью определяется геометрическими свойствами группы вращений $O(3)$ и не зависит от конкретной динамики.

Как мы отметили, элементы диагональной матрицы $\mathbf{D}$ зависят от выбранного базиса, так что, переобозначая оси, тождества (4) можно представить в виде:

$$\left\langle \Gamma_{ii}^{1/2} (\det \mathbf{\Gamma})^{1/2} \,/\, m_{ij} \right\rangle = 1, \quad (5)$$

$$\langle m_{ij}^{1/2} / \Gamma_{ii} \rangle = 1, \quad (6)$$

$$\left\langle (\det \mathbf{\Gamma})^{1/2} / \Gamma_{ii}^{3/2} \right\rangle = 1, \quad (7)$$

где $i, j = x, y, z$, $i \neq j$, и суммирование по повторяющимся индексам *не* подразумевается. Для выполнения тождества (5) достаточно только аксиальной симметрии относительно оси i, в то время как для тождества (6) достаточно иметь аксиальную симметрию относительно оси k, $k \neq i, j$.

Как было показано в работе [21], для анизотропных течений корреляторы (5)–(7) могут быть рассмотрены как *маркеры изотропии*. В частности, для течения в канале, маркеры, рассчитанные для тензора градиентов скорости $A_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$, равны единице вблизи оси канала, где течение близко к изотропному. Напротив, вблизи стенок канала маркеры демонстрируют систематическое изменение, непосредственно связанное со сдвиговым течением.

В настоящей работе мы также исследуем анизотропию, используя матрицу Грама, построенную из тензора градиентов скорости. В этом случае явные выражения для миноров матрицы могут быть записаны следующим образом,

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j}, \quad (8)$$

$$m_{ij} = \Gamma_{ii} \Gamma_{jj} - \Gamma_{ij}^2, \quad (9)$$

где суммирование по греческим индексам подразумевается, в то время как суммирование по латинским индексам не проводится. Вследствие соотношения $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ легко видеть, что диагональные элементы Γ_{ii} и определитель $\det \mathbf{\Gamma}$ положительно определены; следовательно, миноры m_{ij} также положительно определены согласно критерию Сильвестра.

3. Численные методы. Численное моделирование трехмерных уравнений Эйлера для завихренности,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{v} = \mathrm{rot}^{-1} \boldsymbol{\omega}, \quad (10)$$

проводится в периодическом кубе $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \in [-\pi, \pi]^3$ псевдоспектральным методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Операция обращения ротора и все пространственные производные вычисляются в Фурье-пространстве. Используется адаптивная анизотропная прямоугольная решетка, равномерная по каждому направлению и адаптируемая независимо вдоль каждой из трех координат на основе анализа Фурье-спектра завихренности. Временной шаг определяется критерием устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви с числом Куранта 0.75. Численные эксперименты начинаются на кубической решетке 128^3, затем решетка последовательно уплотняется до общего числа узлов 1024^3, после чего размеры решетки фиксируются, и моделирование продолжается до тех пор, пока Фурье-спектр завихренности на $2K_{\max}^{(j)}/3$ не превысит 10^{-10} от своего максимального значения вдоль любого из трех направлений. Здесь $K_{\max}^{(j)} = N_j/2$ – максимальное волновое число, а N_j – число узлов вдоль направления $j = x, y, z$. Затем численное моделирование останавливается чтобы ограничиться только той стадией эволюции, которая соответствует эйлеровой динамике; в терминах поля завихренности в физическом пространстве наш критерий остановки соответствует разрешению наиболее тонкой структуры примерно 8–10 узлами решетки на полной ширине по полувысоте.

Подробности касательно численной схемы можно найти в работах [16, 18, 19], где была показана высокая точность моделирования на рассматриваемых интервалах времени. В частности, (i) энергия и спиральность сохраняются с относительной точностью лучше, чем 10^{-11}, (ii) результаты, полученные на более плотных решетках, согласуются с результатами, полученными на менее плотных решетках, и (iii) численное моделирование в так называемом представлении вихревых линий, которое которое является частичным интегрированием уравнений Эйлера с учетом сохранения инвариантов Коши [23], воспроизводит то же самое поле завихренности.

Начальные условия задаются нами в виде суммы сдвигового течения и случайного периодического течения. Сдвиговое течение

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{sh}}(\mathbf{r}) = (\sin z, \cos z, 0), \quad |\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{sh}}(\mathbf{r})| = 1, \quad (11)$$

является стационарным решением уравнений Эйлера, для которого скорость совпадает с завихренностью, $\mathbf{v}_{\mathrm{sh}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{sh}}$. Эта компонента течения "максимально анизотропна": ее градиенты отличны от нуля только вдоль оси z. Случайное течение определяется усеченным рядом Фурье,

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{r}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{h}} \Big[\mathbf{A_h} \cos(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{B_h} \sin(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) \Big], \quad (12)$$

где $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z) \in [-2, 2]^3$ – волновой вектор с целочисленными компонентами. Вещественные векторы $\mathbf{A_h}$ и $\mathbf{B_h}$ выбираются случайными с нулевым средним и дисперсией $\sigma_{\mathbf{h}}^2 = g(\mathbf{h})$; при этом выполняются условия ортогональности $\mathbf{h} \cdot \mathbf{A_h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{B_h} = 0$, обеспечивающие несжимаемость. Функция $g(\mathbf{h}) =$

$= e^{-(h-h_0)^2/\mu^2}$ с $h = |\mathbf{h}|$, $h_0 = \sqrt{2}$ и $\mu = 1/\sqrt{8}$ задает дисперсию, благоприятствующую гармоникам типа $(1,1,0)$ и $(1,1,1)$ и подавляющую гармоники типа $(1,0,0)$ и $(2,0,0)$, что способствует созданию “более изотропных” течений. Нулевая гармоника стирается ($\mathbf{A_0} = \mathbf{B_0} = \mathbf{0}$), и, для простоты, дополнительно стираются все гармоники, амплитуда которых меньше 0.05 от амплитуды максимальной гармоники.

Итоговое начальное течение представляет собой комбинацию

$$t = 0: \quad \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = a_0\Big((1-M)\,\boldsymbol{\omega}_{\rm sh} + R\,M\,\boldsymbol{\omega}_{\rm r}\Big), \qquad (13)$$

где $M \in [0,1]$ – коэффициент смешивания, регулирующий степень анизотропии, $R = \sqrt{4\pi^3/E_r}$ – нормировочный множитель, приводящий случайную компоненту течения $\boldsymbol{\omega}_{\rm r}$ к той же полной энергии $E_{\rm sh} = \int \frac{v_{\rm sh}^2}{2}\,dV = 4\pi^3$, что есть у сдвигового течения (11) в кубе $\mathbf{r} \in [-\pi,\pi]^3$ (здесь E_r – энергия случайного течения $\boldsymbol{\omega}_{\rm r}$ в том же объеме), а a_0 – амплитуда смеси, подобранная так, чтобы максимум завихренности $\omega_{\max} = \max_{\mathbf{r}} |\boldsymbol{\omega}|$ был близок к единице.

4. Результаты. Сначала мы исследуем эволюцию маркеров изотропии, стартуя со случайного периодического начального течения, построенного для параметров $M = 1$ и $a_0 = 0.32$; в дальнейшем это течение обозначается нами как IF$_1$. Соответствующий численный эксперимент завершился в момент времени $t_f = 6.32$ на практически изотропной решетке $1024\times972\times972$ и продемонстрировал рост глобального максимума завихренности в 3.3 раза от начального значения $\omega_{\max} = 1$ до конечного значения 3.3. К концу расчета было идентифицировано 47 блиноподобных структур, ориентация которых в пространстве не выявила какого-либо предпочтительного направления. Отметим, что процедура выявления и анализа блинов полностью повторяет методику, детально описанную в работах [16, 17, 19, 24], и поэтому для краткости здесь она не приводится.

Эволюция маркеров изотропии (5)–(7) показана на рис. 1. За исключением маркера $\big(\det\Gamma\big)^{1/2}/\Gamma_{zz}^{3/2}$, который сначала отклоняется от единицы более чем на 70 %, а затем возвращается почти точно к единице, остальные маркеры на протяжении всей эволюции остаются в пределах 25 % от единицы. Для маркеров (7), представленных на рис. 1b голубой, зеленой и красной линиями, потребовалось применение сглаживания скользящим средним, поскольку соответствующие временные зависимости содержали редкие “всплески” амплитудой до 25 % от значения маркера; эти всплески связаны с тем, что знаменатели $\Gamma_{ii}^{3/2}$ в отдельных точках решетки становятся

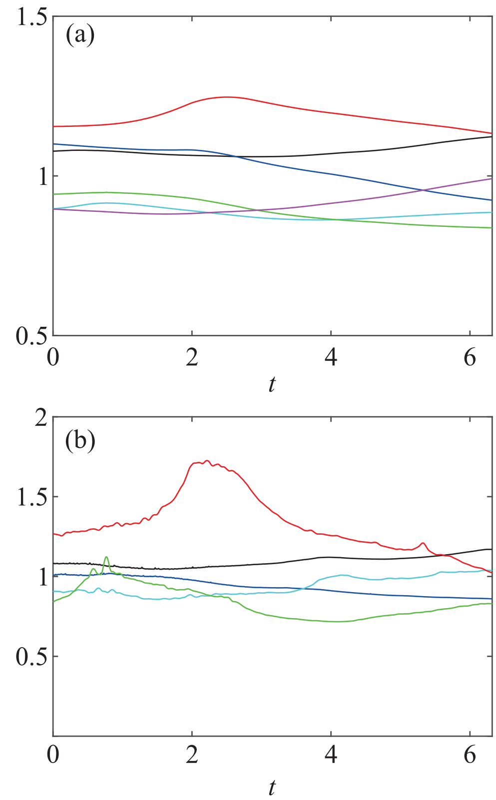

Рис. 1. (Цветной онлайн) Эволюция маркеров изотропии (5)–(7) для численного эксперимента со случайным периодическим начальным течением IF$_1$: (a) – $\langle m_{xy}^{1/2}/\Gamma_{xx}\rangle$ – черный; $\langle m_{xz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$ – синий; $\langle m_{yz}^{1/2}/\Gamma_{yy}\rangle$ – голубой; $\langle m_{xy}^{1/2}/\Gamma_{yy}\rangle$ – зеленый; $\langle m_{xz}^{1/2}/\Gamma_{xx}\rangle$ – пурпурный; $\langle m_{yz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$ – красный, и (b) – $\langle\frac{\Gamma_{zz}^{1/2}\,(\det\Gamma)^{1/2}}{m_{xz}}\rangle$ – черный; $\langle\frac{\Gamma_{zz}^{1/2}\,(\det\Gamma)^{1/2}}{m_{yz}}\rangle$ – синий; $\langle\frac{(\det\Gamma)^{1/2}}{\Gamma_{xx}^{3/2}}\rangle$ – голубой; $\langle\frac{(\det\Gamma)^{1/2}}{\Gamma_{yy}^{3/2}}\rangle$ – зеленый; $\langle\frac{(\det\Gamma)^{1/2}}{\Gamma_{zz}^{3/2}}\rangle$ – красный. Маркеры (7) сглажены скользящим средним; к остальным маркерам сглаживание не применялось

практически нулевыми. К остальным маркерам сглаживание не применялось.

Сосредоточимся далее на анизотропных начальных течениях, приводящих к формированию блинов со схожей ориентацией. Мы провели две серии численных экспериментов для 10 начальных потоков с $M = 0.4$ и $a_0 = 0.7$ (группа I) и 10 начальных потоков с $M = 0.1$ и $a_0 = 0.9$ (группа II). Результаты экспериментов обсуждаются ниже на примере одного репрезентативного случая для каждой группы; соответствующие начальные течения обозначены нами как IF$_{0.4}$ (группа I) и IF$_{0.1}$ (группа II).

На рисунке 2 представлена эволюция маркеров изотропии для эксперимента с начальным течением IF$_{0.4}$, который завершился в момент времени $t_f = 6.56$ на решетке $864\times1024\times1152$ и показал рост

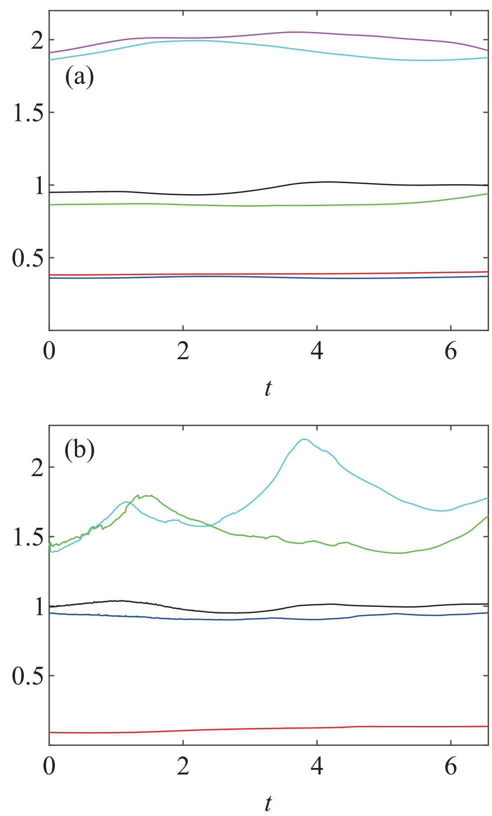

Рис. 2. (Цветной онлайн) Эволюция маркеров изотропии (5)–(7) для численного эксперимента с начальным течением $\mathrm{IF}_{0.4}$: (a) – $\langle m_{xy}^{1/2}/\Gamma_{xx}\rangle$ – черный; $\langle m_{xz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$ – синий; $\langle m_{yz}^{1/2}/\Gamma_{yy}\rangle$ – голубой; $\langle m_{xy}^{1/2}/\Gamma_{yy}\rangle$ – зеленый; $\langle m_{xz}^{1/2}/\Gamma_{xx}\rangle$ – пурпурный; $\langle m_{yz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$ – красный, и (b) – $\langle\frac{\Gamma_{zz}^{1/2}(\det\Gamma)^{1/2}}{m_{xz}}\rangle$ – черный; $\langle\frac{\Gamma_{zz}^{1/2}(\det\Gamma)^{1/2}}{m_{yz}}\rangle$ – синий; $\langle\frac{(\det\Gamma)^{1/2}}{\Gamma_{xx}^{3/2}}\rangle$ – голубой; $\langle\frac{(\det\Gamma)^{1/2}}{\Gamma_{yy}^{3/2}}\rangle$ – зеленый; $\langle\frac{(\det\Gamma)^{1/2}}{\Gamma_{zz}^{3/2}}\rangle$ – красный. Маркеры (7) сглажены скользящим средним; к остальным маркерам сглаживание не применялось

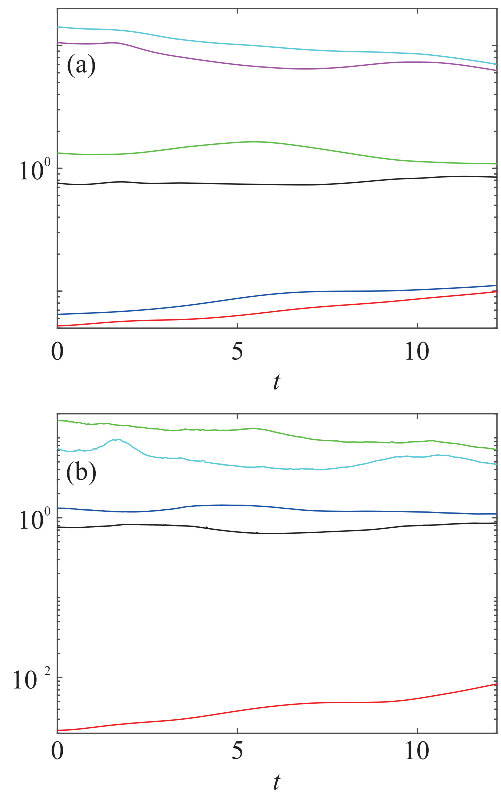

Рис. 3. (Цветной онлайн) Эволюция маркеров изотропии (5)–(7) для численного эксперимента с начальным течением $\mathrm{IF}_{0.1}$ (обратите внимание на логарифмическую шкалу по оси ординат): (a) – $\langle m_{xy}^{1/2}/\Gamma_{xx}\rangle$ – черный; $\langle m_{xz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$ – синий; $\langle m_{yz}^{1/2}/\Gamma_{yy}\rangle$ – голубой; $\langle m_{xy}^{1/2}/\Gamma_{yy}\rangle$ – зеленый; $\langle m_{xz}^{1/2}/\Gamma_{xx}\rangle$ – пурпурный; $\langle m_{yz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$ – красный, и (b) – $\langle\frac{\Gamma_{zz}^{1/2}(\det\Gamma)^{1/2}}{m_{xz}}\rangle$ – черный; $\langle\frac{\Gamma_{zz}^{1/2}(\det\Gamma)^{1/2}}{m_{yz}}\rangle$ – синий; $\langle\frac{(\det\Gamma)^{1/2}}{\Gamma_{xx}^{3/2}}\rangle$ – голубой; $\langle\frac{(\det\Gamma)^{1/2}}{\Gamma_{yy}^{3/2}}\rangle$ – зеленый; $\langle\frac{(\det\Gamma)^{1/2}}{\Gamma_{zz}^{3/2}}\rangle$ – красный. Маркеры (7) сглажены скользящим средним; к остальным маркерам сглаживание не применялось

максимума завихренности в 9.2 раза (от $\omega_{\max} = 1.1$ до 10.0). В финальный момент времени была обнаружена 31 блиноподобная структура, при этом перпендикулярные направления к блинам (вдоль которых завихренность меняется наиболее быстро) были ориентированы в пределах угла в 60° вокруг оси z. Как видно из рис. 2, маркеры (5)–(6) практически не меняются со временем, отклоняясь от своих средних значений не более чем на 10 %. Для некоторых маркеров, например, $\langle m_{xy}^{1/2}/\Gamma_{xx}\rangle$ и $\langle m_{xy}^{1/2}/\Gamma_{yy}\rangle$, эти средние близки к единице, тогда как для других, таких как $\langle m_{xz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$ и $\langle m_{yz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$, средние отличаются от единицы более чем в два раза. Маркеры (7) демонстрируют наибольшие отклонения от своих средних значений (в пределах 10–25%), причем значение $\left(\det\Gamma\right)^{1/2}/\Gamma_{zz}^{3/2}$ (меняющееся между 0.09 и 0.13) оказывается наиболее далеким от единицы.

Характерные значения маркеров объясняются наличием согласованной ориентации блинов в пространстве. Действительно, ориентация в пределах некоторого угла вокруг оси z означает, что градиенты скорости вдоль этой оси статистически больше [17], чем вдоль двух других осей. Поэтому маркеры, в числителе которых градиенты по z возведены в более высокую степень, чем в знаменателе (например, $\langle m_{yz}^{1/2}/\Gamma_{yy}\rangle$ и $\langle m_{xz}^{1/2}/\Gamma_{xx}\rangle$) принимают значения больше единицы. И наоборот, если степень z-градиентов в числителе меньше, чем в знаменателе (как для $\langle m_{xz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$ и $\langle m_{yz}^{1/2}/\Gamma_{zz}\rangle$), соответствующие маркеры оказываются значительно меньше единицы.

Эксперименты для остальных 9 начальных течений с $M = 0.4$ дали практически те же результаты, включая характерные значения маркеров (5)–(7).

Лишь в двух случаях наблюдалось заметное стремление маркеров к единице, что можно интерпретировать как медленную изотропизацию течения.

На рисунке 3 показана эволюция маркеров изотропии для эксперимента с начальным течением $\mathrm{IF}_{0.1}$, который завершился в момент времени $t_f = 12.21$ на сильно анизотропной решетке $648 \times 648 \times 2304$ и показал рост максимума завихренности в 6.9 раза (от $\omega_{\max} = 0.97$ до 6.7). В конце эксперимента выявлено 49 блинов, ориентированных в пределах угла в 20° вокруг оси z. При такой ориентации неудивительно, что значения маркеров, зависящих от z-градиентов, могут отличаться от единицы более чем на порядок величины. Наибольшее отклонение демонстрирует маркер $\left(\det \Gamma\right)^{1/2}/\Gamma_{zz}^{3/2}$, меняющийся от 2×10^{-3} до 8×10^{-3} к концу эксперимента. Все маркеры, начальные значения которых сильно отличаются от единицы, показывают явный тренд к единице. Более того, учитывая логарифмическую шкалу на рис. 3, этот тренд близок к экспоненциальному.

Аналогичные результаты были получены для остальных 9 начальных течений с $M = 0.1$. Дополнительно мы провели эксперименты для еще двух начальных течений, детально изученных ранее в работах [16–18], и пришли к тем же выводам.

5. Заключение. Мы систематически исследовали эволюцию маркеров изотропии для периодических течений, представляющих собой суперпозицию сдвигового и случайного потоков. Сдвиговый поток введен для управления ориентацией возникающих блиноподобных структур: от полностью случайной (при его отсутствии) до почти одинаковой и направленной вдоль оси z (при его доминировании). Обнаружено, что для полностью случайного начального потока маркеры изотропии все время остаются близкими к единице. При умеренном вкладе сдвигового потока маркеры изотропии практически не меняются со временем, и при этом некоторые из них могут устойчиво отклоняться от единицы в несколько раз. В случае когда сдвиговый поток доминирует, все исследованные начальные течения приводят к почти одинаковой ориентации блинов, а маркеры изотропии, изначально отклоняющиеся от единицы на порядки величины, демонстрируют медленный, похожий на экспоненциальный, дрейф к единице.

На основании этих наблюдений можно сделать следующие выводы. Во-первых, во всех рассмотренных случаях маркеры изотропии эволюционируют относительно медленно, что указывает на отсутствие тенденции к спонтанному нарушению симметрии в течении. Во-вторых, сильно анизотропные начальные течения медленно изотропизуются со временем. Принципиально важно, что этот процесс начинается еще до возбуждения вязких масштабов и продолжается несмотря на схожую ориентацию вновь возникающих блиноподобных структур. Природа этого процесса пока остается неясной. Например, изотропизация может быть связана с появлением новых блинов и постепенным расширением угла, внутри которого они ориентированы. Однако наши вычислительные ресурсы недостаточны для надежной проверки этой гипотезы. Возможно, также, что вклад вносят утоньшение и слабое искривление уже существующих блиноподобных структур [17]. Отметим, что блины остаются устойчивыми [25] и не разрушаются вплоть до возбуждения вязких масштабов [15]. Мы предполагаем, что изотропизация происходит и в случае умеренно анизотропных течений, однако для ее наблюдения требуются значительно более длительные времена эволюции, а значит, и гораздо большие вычислительные мощности.

В данной работе мы исследовали эволюцию маркеров изотропии, построенных на основе тензора градиентов скорости. В качестве одного из возможных направлений будущих исследований можно рассмотреть маркеры, построенные из других тензоров второго ранга, например, таких, на которые мелкомасштабное движение влияет сильнее. Другим интересным направлением является изучение влияния спиральности течения на эволюцию блиноподобных структур и маркеров изотропии. Согласно точному решению для изолированного блина [17], спиральность на блине равна нулю. Однако фоновое течение, а также переходное течение между фоном и блинами, могут обладать ненулевой спиральностью. Это может влиять на процесс возникновения и эволюции блинов и, следовательно, на поведение маркеров изотропии. Исследование данного вопроса, однако, требует проведения большого числа численных экспериментов с различными начальными уровнями спиральности, что существенно превышает наши текущие вычислительные возможности.

Авторы благодарны Е. А. Кузнецову, В. А. Сироте и К. П. Зыбину за плодотворные обсуждения. Численное моделирование выполнялось в Новосибирском суперкомпьютерном центре.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Физического института имени П. Н. Лебедева Российской академии наук. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. G. Falkovich, K. Gawedzki and M. Vergassola, "Particles and fields in fluid turbulence", Rev. Mod. Phys. **73**, 913 (2001).
2. P. E. Dimotakis, "Turbulent mixing", Annu. Rev. Fluid Mech. **37**, 329 (2005).
3. А. Н. Колмогоров, "Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса", ДАН СССР **30**, 299 (1941) [A. N. Kolmogorov, "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 301 (1941)].
4. А. Н. Колмогоров, "Рассеяние энергии при локально-изотропной турбулентности", ДАН СССР **32**, 19 (1941) [A. N. Kolmogorov, "Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence", Dokl. Akad. Nauk SSSR **32**, 19 (1941)].
5. L. Biferale and I. Procaccia, "Anisotropy in turbulent flows and in turbulent transport", Phys. Rep. **414**, 43 (2005).
6. F. Moisy, P. Tabeling and H. Willaime, "Kolmogorov equation in a fully developed turbulence experiment", Phys. Rev. Lett. **82**, 3994 (1999).
7. Е. А. Новиков, "Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности", ЖЭТФ **47**, 1919 (1965).
8. U. Frisch, *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).
9. R. Benzi and F. Toschi, "Lectures on turbulence", Phys. Rep. **1021**, 1 (2023).
10. A. Alexakis and L. Biferale, "Cascades and transitions in turbulent flows", Phys. Rep. **767**, 1 (2018).
11. M. E. Brachet, M. Meneguzzi, A. Vincent, H. Politano and P. L. Sulem, "Numerical evidence of smooth self-similar dynamics and possibility of subsequent collapse for three-dimensional ideal flows", Phys. Fluids A **4**, 2845 (1992).
12. J. Jimenez and A. A. Wray, "On the characteristics of vortex filaments in isotropic turbulence", J. Fluid Mech. **373**, 255 (1998).
13. M. Farge, G. Pellegrino and K. Schneider, "Coherent vortex extraction in 3D turbulent flows using orthogonal wavelets", Phys. Rev. Lett. **87**, 054501 (2001).
14. К. П. Зыбин, В. А. Сирота, "Модель вытягивающихся вихревых нитей и обоснование статистической теории турбулентности", УФН **185**, 593 (2015) [K. P. Zybin and V. A. Sirota, "Model of stretching vortex filaments and foundations of the statistical theory of turbulence", Phys.-Uspekhi **58**, 556 (2015)].
15. G. Krstulovic and S. Nazarenko, "Initial evolution of three-dimensional turbulence en route to the Kolmogorov state: Emergence and transformations of coherent structures, self-similarity, and instabilities", Phys. Rev. Fluids **9**, 034610 (2024).
16. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov and A. A. Mailybaev, "Development of high vorticity structures in incompressible 3D Euler equations", Phys. Fluids **27**, 085102 (2015).
17. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov and A. A. Mailybaev, "Asymptotic solution for high-vorticity regions in incompressible three-dimensional Euler equations", J. Fluid Mech. **813**, R1 (2017).
18. D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov and A. A. Mailybaev, "Development of high vorticity structures and geometrical properties of the vortex line representation", Phys. Fluids **30**, 095104 (2018).
19. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, "Развитие структур высокой завихренности в несжимаемых трехмерных уравнениях Эйлера: влияние начальных условий", Письма в ЖЭТФ **104**, 695 (2016) [D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, "Development of high vorticity in incompressible 3D Euler equations: influence of initial conditions", JETP Lett. **104**, 775 (2016)].
20. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, "Статистические свойства поля скорости зарождающейся трехмерной гидродинамической турбулентности", Письма в ЖЭТФ **110**, 106 (2019) [D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, "Statistical properties of the velocity field for the 3D hydrodynamic turbulence onset", JETP Lett. **110**, 121 (2019)].
21. A. Il'yn, A. Kopyev, V. Sirota, and K. Zybin, "Stochastic identities for random isotropic fields", Phys. Rev. Fluids **10**, L022602 (2025).
22. V. A. Sirota, A. S. Il'yn, A. V. Kopyev, and K. P. Zybin, "Lagrangian stochastic integrals of motion in isotropic random flows", Phys. Fluids **36**, 021701 (2024).
23. Е. А. Кузнецов, В. П. Рубан, "Гамильтоновская динамика вихревых линий в системах гидродинамического типа", Письма в ЖЭТФ **67**, 1015 (1998) [E. A. Kuznetsov and V. P. Ruban, "Hamiltonian dynamics of vortex lines in hydrodynamic-type systems", JETP Lett. **67**, 1076 (1998)].
24. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, Е. В. Серещенко, "Сжимаемые вихревые структуры и их роль в зарождении гидродинамической турбулентности", УФН **192**, 205 (2022) [D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, A. A. Mailybaev, and E. V. Sereshchenko, "Compressible vortex structures and their role in the onset of hydrodynamic turbulence", Phys.-Uspekhi **65**, 189 (2022)].
25. Д. С. Агафонцев, Е. А. Кузнецов, А. А. Майлыбаев, "Отсутствие неустойчивости тангенциального разрыва для вихревых блинов", Письма в ЖЭТФ **114**, 67 (2021) [D. S. Agafontsev, E. A. Kuznetsov, and A. A. Mailybaev, "Stability of tangential discontinuity for the vortex pancakes", JETP Lett. **114**, 71 (2021)].