Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 5, с. 346 – 353 © 2026 г. 10 марта

Развитие сильно нелинейных структур на заряженной границе непроводящей жидкости в электрическом поле

Н. М. Зубарев[+*1)], *Е. А. Кочурин*[+×1)]

[+]*Институт электрофизики Уральского отделения РАН, 620016 Екатеринбург, Россия*

[*]*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия*

[×]*Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 января 2026 г.
После переработки 23 января 2026 г.
Принята к публикации 30 января 2026 г.

Осуществлено прямое численное моделирование сильно нелинейных стадий развития неустойчивости границы непроводящей жидкости со свободным поверхностным зарядом в нормальном электрическом поле. Продемонстрировано, что можно выделить две основные стадии неустойчивости – начальную, на которой в поверхности возникают лунки, и развитую, когда они трансформируются в расширяющиеся пузырьки. Размер пузырьков растет с ростом приложенного поля, несмотря на то, что масштаб, соответствующий доминантной моде неустойчивости, уменьшается.

DOI: 10.7868/S3034576626030055

Электрическое поле, направленное перпендикулярно границе жидкости с поверхностным зарядом, оказывает на нее дестабилизирующее влияние. Наиболее хорошо изучена неустойчивость Тонкса–Френкеля [1, 2], которой подвержена поверхность идеально проводящей жидкости (например, расплавленного металла) в достаточно сильном внешнем электрическом поле. В этом случае поле не проникает в жидкость вследствие экранировки свободным электрическим зарядом, индуцированным на ее поверхности. Возможна и противоположная ситуация – ее рассмотрению посвящена настоящая работа, когда электрическое поле имеется в жидкости, но отсутствует вне ее. Это может быть непроводящая жидкость со свободным поверхностным зарядом, например, жидкий гелий с локализованными над его поверхностью электронами [3, 4], либо граница раздела непроводящей жидкости и значительно более легкой проводящей среды. Примером реализации последней ситуации может являться граница диэлектрической жидкости и плазмы при зажигании частичных электрических разрядов во всплывающих в жидкости газовых пузырьках [5].

Линейные стадии развития неустойчивости плоской границы жидкости в обеих ситуациях (когда поле имеется только вне жидкости или только внутри жидкости) идентичны – они описываются одинаковым законом дисперсии

$$\omega^2 = (\alpha/\rho)\, k^3 - \left(\varepsilon_0 \varepsilon E^2/\rho\right) k^2, \qquad (1)$$

где ω – частота, k – волновое число, α – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность жидкости, ε_0 – электрическая постоянная, E и ε – напряженность поля и диэлектрическая проницаемость вне жидкости (в первом случае), либо в жидкости (во втором случае).

Интересно сопоставить нелинейные стадии развития неустойчивости, т.е. стадии, на которых углы наклона поверхности перестают быть малыми. На этих стадиях проявится различие между обсуждаемыми ситуациями – то, что электрическое поле присутствует с разных сторон границы. Поскольку неустойчивость границы жидкости является результатом взаимодействия приложенного поля и поверхностного заряда (заряд втягивается полем), то быстрее будут нарастать возмущения поверхности, направленные наружу жидкости в первом случае и внутрь жидкости во втором. Это определяет тенденцию к образованию выступов (бугров) на поверхности проводящей жидкости и впадин (лунок) для непроводящей жидкости.

Каким будет поведение жидкости на сильно нелинейных стадиях неустойчивости? Некоторые подсказки могут дать общие свойства исходных уравнений движения, которые отражены и в законе дисперсии (1). Уравнения инвариантны относительно растяжений $E \to cE$, $\lambda \to c^{-2}\lambda$, $\tau \to c^{-3}\tau$ (здесь c – произвольная безразмерная постоянная), т.е. харак-

[1)]e-mail: nick@iep.uran.ru; kochurin@iep.uran.ru терные пространственный (λ) и временной (τ) масштабы задачи меняются с изменением поля, следуя степенным законам E^{-2} и E^{-3} соответственно. Действительно, ключевую роль в развитии неустойчивости играет так называемая доминантная мода, соответствующая максимуму ее инкремента, т.е. экстремуму $\mathrm{Im}(d\omega/dk) = 0$ в законе дисперсии. Как несложно найти из (1), для волнового числа и инкремента доминантной моды неустойчивости имеем $k_d = 2\varepsilon\varepsilon_0 E^2/3\alpha$ и $\gamma_d = \mathrm{Im}\,\omega(k_d) \propto E^3$. Таким образом, характерные масштабы задачи связаны с полем E как $\lambda \propto k_d^{-1} \propto E^{-2}$ и $\tau \propto \gamma_d^{-1} \propto E^{-3}$. Более того, в [6–9] было показано для неустойчивости Тонкса–Френкеля, что процесс ее развития оказывается масштабно инвариантным: реализуются автомодельные решения, соответствующие скейлингу $\lambda \propto \tau^{2/3}$. Они ответственны за образование на поверхности жидкости конических острий. Динамика жидкости вблизи формирующихся конусов, т.е. на сильно нелинейных стадиях неустойчивости, будет определяться уже не внешним, а локальным полем E_{loc}. Для масштабов тогда справедливы соотношения $\lambda \propto E_{\mathrm{loc}}^{-2}$ и $\tau \propto E_{\mathrm{loc}}^{-3}$, увязывающие неограниченное заострение поверхности за конечное время (величины λ и τ обращаются в нуль) и рост локального поля.

Как будет показано ниже, эти рассуждения, позволяющие адекватно описать поведение проводящей жидкости в электрическом поле, не применимы в интересующем нас случае непроводящей жидкости. Вопреки оценке для масштаба доминантной моды $\lambda_d = 2\pi/k_d \propto E^{-2}$, характерный размер формирующихся структур увеличивается с ростом E, т.е. определятся другими факторами. Это качественно отличает сопоставляемые ситуации, несмотря на тождественность их описания в линейном приближении, а также совпадающий скейлинг.

Рассмотрим плоское двумерное потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей $y = \eta(x,t)$ в однородном электрическом поле напряженностью E. В невозмущенном состоянии $\eta = 0$, т.е. жидкость занимает полуплоскость $y \le 0$. Здесь используется декартова система координат $\{x, y\}$, для которой ось y сонаправлена с приложенным электрическим полем, а ось x совпадает с невозмущенной границей. Жидкость считается непроводящей – диэлектрической с проницаемостью ε. По ее границе распределен свободный поверхностный заряд, обеспечивающий ее эквипотенциальность. Считаем, что плотность поверхностного заряда в невозмущенном состоянии есть $\sigma = -\varepsilon_0\varepsilon E$, что обеспечивает полную экранировку электрического поля над жидкостью. Потенциалы скорости ϕ и электрического поля φ в области $y < \eta(x,t)$ удовлетворяют уравнениям Лапласа $\nabla^2\phi = 0$ и $\nabla^2\varphi = 0$. На поверхности жидкости $y = \eta(x,t)$ выполняются динамическое и кинематическое граничные условия:

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 = \frac{\alpha}{\rho}K - \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2\rho}(\nabla\varphi)^2,$$

$$\eta_t + \eta_x\phi_x = \phi_y,$$

где $K = \eta_{xx}(1+\eta_x^2)^{-3/2}$ – локальная кривизна границы. Уравнения движения замыкаются условиями $\nabla\phi \to 0$ и $\nabla\varphi \to \{0, -E\}$ на глубине $y \to -\infty$, а также условием $\varphi = 0$ на границе $y = \eta(x,t)$. При рассмотрении гармонических возмущений поверхности $\eta \propto \exp(ikx - i\omega t)$ малой амплитуды (т.е. $|\eta_x| \ll 1$), эти уравнения приводят к закону дисперсии (1).

Будем считать функции ϕ, φ и η периодическими вдоль оси x с некоторым заданным периодом λ_0. Перейдем к безразмерным обозначениям, используя соответствующее ему волновое число $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ и частоту $\omega_0 = (\alpha k_0^3/\rho)^{1/2}$:

$$\tilde{y} = yk_0, \quad \tilde{x} = xk_0, \quad \tilde{\eta} = \eta k_0,$$

$$\tilde{t} = t\omega_0, \quad \tilde{\phi} = \phi k_0^2/\omega_0, \quad \tilde{\varphi} = \varphi k_0/E.$$

В безразмерном виде дисперсионное соотношение (1) принимает вид (здесь и далее знаки "$\sim$" для удобства опущены):

$$\omega^2 = k^3 - \beta^2 k^2,$$

где введен безразмерный параметр $\beta^2 = \varepsilon_0\varepsilon E^2/\alpha k_0$. Поскольку $\beta \propto E$, то можно считать, что он характеризует напряженность приложенного электрического поля. Параметр β также допускает интерпретацию в терминах характерных масштабов задачи. Выше упоминались два масштаба. Масштаб λ_d соответствует доминантной моде неустойчивости (возмущения этой длины нарастают наиболее быстро). Масштаб λ_0 имеет смысл пространственного периода задачи, т.е., фактически, определяет длину начального возмущения границы. Справедливо соотношение $\beta^2 = 3k_d/(2k_0) \propto \lambda_0/\lambda_d$, согласно которому управляющий параметр задачи β определяется отношением этих масштабов.

В отсутствие электрического поля ($\beta = 0$) приведенная система уравнений описывает распространение капиллярных волн. Под влиянием поля, как видно из линейного закона дисперсии при $k = 1$, величина ω^2 становится отрицательной и, следовательно, граница жидкости теряет устойчивость при $\beta > 1$. Околокритическое поведение системы ($\beta \approx 1$) несложно описать аналитически в слабонелинейном приближении – когда амплитуда возмущения границы считается малой, но конечной. Действуя по аналогии с работой [10], где рассматривалось поведение проводящей жидкости в электрическом поле, находим для формы границы:

$$\eta(x,t) = -A(t)\cos x - (1/4)A^2(t)\cos 2x + \ldots,$$

где амплитуда A удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$A_{tt} = (\beta^2 - 1)A + A^3/8 \tag{2}$$

с нетривиальными стационарными решениями $A^2 = 8(1 - \beta^2)$, соответствующими субкритической бифуркации типа "илки". Согласно (2), нелинейность играет дестабилизирующую роль, обуславливая жесткую потерю устойчивости системы. При $\beta < 1$, когда плоская граница жидкости устойчива в линейном приближении, неустойчивость развивается, если в начальный момент времени справедливо:

$$A_t^2 + (1 - \beta^2)A^2 > 4(\beta^2 - 1)^2 + A^4/16, \tag{3}$$

т.е. величины $A(t)$ и $A_t(t)$ достаточно велики.

Особенностью рассматриваемой неустойчивости, как видно из (2), является ее взрывной характер: амплитуда неограниченно нарастает с асимптотикой $A \propto 1/(t_c - t)$, где t_c – момент формирования особенности. Понятно, что слабонелинейная модель (2) при этом выходит за рамки своей применимости, и для описания развитых стадий неустойчивости необходимо решать непосредственно исходные уравнения движения. Их важной особенностью, которая была впервые замечена и использована в работах [11, 12], является то, что области определения гармонических потенциалов ϕ и φ совпадают и, как следствие, применим метод динамических конформных преобразований, развитый для описания капиллярно-гравитационных волн [13–15].

Совершим конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в полуплоскость $v \le 0$ в параметрических переменных $\{u, v\}$. Граница жидкости будет соответствовать прямой $v = 0$, а функция $\eta(x,t)$ задается в параметрическом виде соотношениями

$$\eta = Y(u,t), \quad x = X(u,t) = u - \hat{H}Y(u,t),$$

где $\hat{H}$ – преобразование Гильберта, определяемое в Фурье-пространстве как $\hat{H}f_k = i\,\mathrm{sign}(k)f_k$. Введем также функцию $\Psi(u,t)$, которая задает потенциал скорости на границе жидкости. В конформных переменных исходная двумерная задача сводится к паре одномерных уравнений на движение границы жидкости:

$$\Psi_t = \frac{1}{2J}\left[(\hat{H}\Psi_u)^2 + \Psi_u^2\right] + \Psi_u \hat{H}\left[\frac{\hat{H}\Psi_u}{J}\right] - \\ -\frac{\beta^2}{2J} - \frac{X_u Y_{uu} - Y_u X_{uu}}{J^{3/2}}, \tag{4}$$

$$Y_t = Y_u \hat{H}\left[\frac{\hat{H}\Psi_u}{J}\right] - X_u \frac{\hat{H}\Psi_u}{J}, \tag{5}$$

где $J = X_u^2 + Y_u^2$ – якобиан преобразования. За электростатическое давление здесь отвечает член $\beta^2/2J$. Отметим, что уравнения, учитывающие влияние электрического поля, были впервые выведены в работе [16] (см. также [17]) в форме, не разрешенной относительно производных по времени. Для численного моделирования развития неустойчивости удобнее использовать представление (4), (5). Кроме того, для повышения точности численного решения целесообразно перейти к переменным Дьяченко [14, 15] $V = i\Phi_u/Z_u$ и $R = 1/Z_u$, где используются комплексные функции $Z = X + iY$ и $\Phi = \Psi + i\hat{H}\Psi$. В терминах переменных V и R уравнения (4) и (5) примут вид:

$$V_t = i(UV_u - D_u R) - 2Q^2\hat{P}(Q_u\bar{Q} - \bar{Q}Q_u)_u, \tag{6}$$

$$R_t = i(UR_u - U_u R), \tag{7}$$

где обозначено $U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R)$, $D = \hat{P}(V\bar{V} + \beta^2 R\bar{R})$ и $Q = R^{1/2}$, введен оператор-проектор $\hat{P} = (1 + i\hat{H})/2$, а черта над символами обозначает комплексное сопряжение.

Интересной особенностью рассматриваемой задачи является то, что если пренебречь поверхностным натяжением, т.е. рассмотреть эволюцию жидкости под влиянием только электростатических сил, то уравнения движения могут быть существенно упрощены. Действительно, если отбросить последнее слагаемое в правой части (6), ответственное за капиллярные эффекты, получающаяся система

$$V_t = i(UV_u - D_u R), \qquad R_t = i(UR_u - U_u R)$$

при подстановке $V = \beta(R - 1)$ редуцируется к единственному уравнению

$$R_t = 2i\beta\hat{P}\left(R_u\hat{P}(R\bar{R}) - R\hat{P}(R\hat{R})_u\right).$$

В свою очередь оно сводится к известному уравнению лапласовского роста (УЛР) [18, 19] $\mathrm{Im}(\bar{G}_t G_u) = \beta$, где обозначено $G(u,t) = Z(u,t) - i\beta t$. Возможность редукции задачи к УЛР была обнаружена в работе [11], при этом интегрируемость УЛР [20–24] позволила построить точные нетривиальные решения для эволюции границы на развитых стадиях неустойчивости [11, 12, 25].

Простейшее периодическое решение УЛР имеет вид:

$$Y(u,t) = -A(t)\cos u - A^2(t)/2, \qquad (8)$$

где амплитуда A удовлетворяет ОДУ

$$A_t = \beta A/(1 - k^2 A^2). \qquad (9)$$

Эволюция свободной поверхности, соответствующая решению (8) и (9), показана на рис. 1 (для определенности выбрано $\beta = 1$). Видно, что на границе за конечное время формируется сингулярность – заостренная лунка, в окрестности которой $\eta(x) - \eta(0) \propto \propto |x|^{2/3}$. В особой точке в бесконечность обращаются электростатическое давление $\beta/2J$ и кривизна границы K: см. вставку на рис. 1.

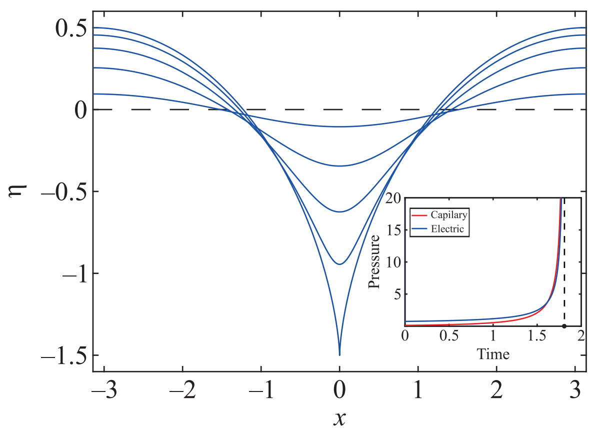

Рис. 1. (Цветной онлайн) Эволюция свободной поверхности в рамках точного решения (8) и (9) для $\beta = 1$ с начальным условием $A(0) = 0.1$. Момент коллапса $t \approx 1.8076$. На вставке показаны временные зависимости в точке $x = 0$ электростатического давления (синяя линия) и капиллярного давления (красная линия), которое в расчетах не учитывалось

Ясно, что продемонстрированное на рис. 1 возникновение сингулярности возможно лишь при пренебрежении капиллярными эффектами. Для полной системы (6) и (7) электростатическое и капиллярное давления при $\beta = 1$ будут сопоставимы. Возникает вопрос, какое поведение продемонстрирует система на развитых стадиях неустойчивости при учете поверхностного натяжения? Для ответа на него проведем прямое численное моделирование эволюции границы жидкости на основе модели (6) и (7) в рамках псевдо-спектральных методов. Такой численный подход в сочетании с методом конформных отображений показал высокую эффективность при описании электрогидродинамических течений жидкостей [26–29], течений с постоянной завихренностью [30–32], волн на воде [33–36], волновой турбулентности [37, 38].

Выберем начальные условия в виде периодических возмущений поверхности и поля скоростей, совпадающие с использованными в точных решениях (8) и (9):

$$Y(u,0) = -A\cos u, \quad \Psi(u,0) = \beta Y(u,0). \qquad (10)$$

Эволюция поверхности, получаемая при численном интегрировании (6) и (7) при $\beta = 1$, т.е. при пороговом для развития неустойчивости значении электрического поля, показана на рис. 2. Видно, что поведение жидкости радикально отличается от описываемого точным решением (8) и (9), представленным на рис. 1. Вместо неограниченного заострения лунки происходит ее трансформация в пузырек. Расчет прерывается в момент $t \approx 13.3$, когда качественно меняется топология задачи: наблюдается самопересечение границы жидкости, соответствующее отрыву заряженного пузырька.

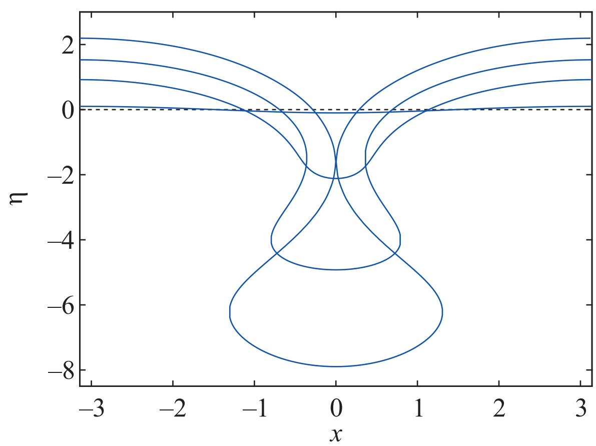

Рис. 2. (Цветной онлайн) Эволюция поверхности жидкости, получаемая в результате численного решения модели (6) и (7) для $\beta = 1$ и начального условия (10) с $A = 0.1$. Показаны последовательные моменты времени $t = 0$, 7.7, 10.0, 13.3

Процесс развития неустойчивости можно разбить на две стадии, что иллюстрируют показанные на рис. 3 временные зависимости электростатического и капиллярного давлений в точке $x = 0$. Обе величины сначала нарастают, что качественно совпадает с их поведением для точного решения (8) и (9), показанном на вставке рис. 1. На этой стадии развития неустойчивости на границе жидкости формируется

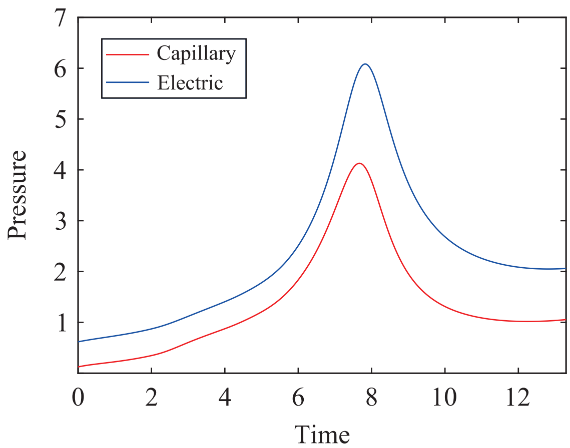

Рис. 3. (Цветной онлайн) Временные зависимости электростатического давления (синяя линия) и капиллярного давления (красная линия) в точке $x = 0$ для $\beta = 1$ и начального условия (10) с $A = 0.1$

лунка. Однако, в отличие от показанной на рис. 1 ситуации, неограниченного заострения лунки не происходит. Электростатическое и капиллярное давления достигают максимума в момент $t \approx 7.7$, а далее начинают уменьшаться. Это отражает качественное изменение поведения системы: начинается следующая стадия развития неустойчивости, на которой происходит формирование и расширение пузырька. Она заканчивается отрывом пузырька в момент $t \approx 13.3$.

Таким образом, стадия неустойчивости, на которой в поверхности образуется лунка (кривизна поверхности при этом растет), сменяется стадией, на которой она трансформируется в расширяющийся пузырек (кривизна уменьшается). Рассмотрим, что определяет пространственный масштаб формирующейся структуры. В качестве такого масштаба естественно взять размер пузырька в момент его отрыва. На первый взгляд, он должен коррелировать с длиной волны доминантной моды неустойчивости, причем, ввиду зависимости $\lambda_d \propto E^{-2}$, уменьшаться с ростом напряженности поля, стремясь к нулю при $E \to \infty$. В эту логику хорошо вписываются сингулярные решения типа (8) и (9), соответствующие пределу сильного поля (капиллярные эффекты считаются пренебрежимо малыми по сравнению с электростатическими). Для этих решений характерный пространственный масштаб – радиус кривизны поверхности – обращается в нуль на финальной стадии неустойчивости.

Однако такое предположение опровергается результатами численных расчетов эволюции границы жидкости для различных значений управляющего параметра β (или поля E в исходных обозначениях). Расчеты выполнялись для начальных условий (10) в диапазоне $0.75 \le \beta^2 \le 1.2$, т.е. как при докритических, так и при закритических значениях β. В закритическом случае ($\beta > 1$) начальная амплитуда возмущения поверхности бралась равной $A = 0.1$. В докритическом случае ($\beta < 1$), когда плоская поверхность устойчива по отношению к малым возмущениям и для ее дестабилизации требуется выполнение условия (3), начальная амплитуда увеличивалась до $A = 0.8, 0.5, 0.3$ при $\beta^2 = 0.75, 0.8, 0.9$ соответственно. Вычисления прерывались при самопересечении границы жидкости: см. вставку на рис. 4. В этот момент по длине границы образующегося пузырька рассчитывался его средний радиус – использовалась формула

$$\langle R \rangle = (2\pi)^{-1} \int \sqrt{X_u^2 + Y_u^2}\, du.$$

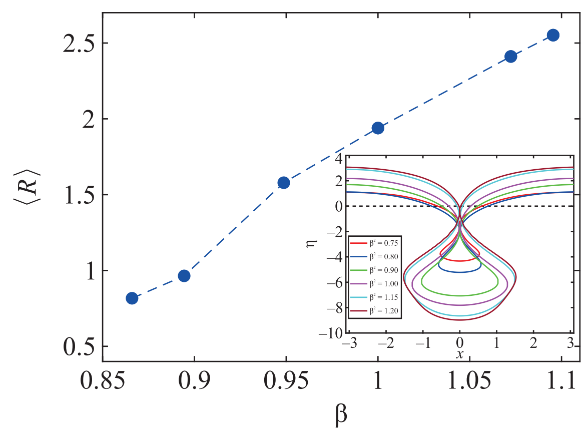

Рис. 4. (Цветной онлайн) Средний радиус сформировавшегося пузырька в зависимости от параметра β. На вставке показаны формы поверхности жидкости в момент отрыва пузырька для $\beta^2 = 0.75$, 0.8, 0.9, 1, 1.15, 1.2

Результаты вычислений представлены на рис. 4. Видно, что радиус пузырька монотонно растет с увеличением β (или E), т.е. не определяется масштабом λ_d, убывающим с полем как E^{-2}. В чем причина такого неожиданного поведения системы? Мы связываем расширение пузырька с влиянием сил отталкивания между свободными электрическими зарядами, которые стекаются в лунку. Площадь поверхности, с которой собирается заряд, определяется не масштабом λ_d, а масштабом λ_0, т.е. периодом начального возмущения границы. Покажем, что именно это обстоятельство определяет характер зависимости радиуса пузырьков от приложенного поля.

Оценим радиус пузырька исходя из нескольких допущений. Во-первых, будем считать для простоты пузырек круглым с радиусом R. Во-вторых, положим, что в него стек весь электрический заряд, относящийся к области $-\lambda_0/2 \leq x \leq \lambda_0/2$. Если считать, что он равномерно распределился по поверхности пузырька, то напряженность поля на его границе E_b оценивается из закона сохранения заряда как $2\pi R E_b = \lambda_0 E$. Наконец, в-третьих, будем считать, что радиус пузырька соответствует балансу электростатического и капиллярного давлений на его границе: $\alpha/R = \varepsilon\varepsilon_0 E_b^2/2$. Отсюда находим:

$$R = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \lambda_0^2/(8\pi^2\alpha), \tag{11}$$

или, в безразмерном виде, $R = \beta^2/2$. Таким образом, радиус пузырька монотонно растет с ростом параметра β (т.е., фактически, поля E), что качественно согласуется с показанной на рис. 4 зависимостью. Отметим, что формулу (11) можно переписать как $R = 3\lambda_0^2/(8\pi\lambda_d)$, т.е. размер формирующихся структур определяется обоими пространственными масштабами задачи – периодом начального возмущения λ_0 и длиной волны доминантной моды λ_d.

Итак, в настоящей работе была описана сильно нелинейная динамика границы непроводящей жидкости со свободным поверхностным зарядом в рамках полной физической модели, учитывающей как электростатическое, так и капиллярное давления. Установлено, что в развитии неустойчивости границы можно выделить две основные стадии – начальную (слабонелинейную), на которой в поверхности возникает лунка, и развитую (сильнонелинейную), когда она трансформируется в расширяющийся пузырек. Наличие стадии расширения пузырька принципиально отличает рассмотренную задачу от родственной задачи о поведении идеально проводящей жидкости в электрическом поле. Аналогом процесса формирования пузырьков применительно к такой задаче будет процесс формирования капелек [10], однако расширение капелек, подобное расширению пузырьков, невозможно в силу несжимаемости жидкости. В итоге, несмотря на то, что линейные законы дисперсии для обеих задач совпадают, а уравнения движения инвариантны относительно одинаковых масштабных преобразований, финальные стадии неустойчивости качественно отличается. Если для проводящей жидкости характерный масштаб формирующихся структур уменьшается с ростом приложенного поля в согласии с законами подобия исходных уравнений, то для непроводящей жидкости масштаб – размер формирующихся пузырьков – растет.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках гранта Российского научного фонда # 23-71-10012.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. L. Tonks, "A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field", Phys. Rev. **48**, 562 (1935).
2. Я. И. Френкель, "К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме", ЖЭТФ **6**(4), 348 (1936) [Ya. I. Frenkel', "K teorii Tonksa o razryve poverkhnosti zhidkosti postoyannym elektricheskim polem v vakuume", ZhETF **6**, 348 (1936)].
3. В. С. Эдельман, "Левитирующие электроны", УФН **130**, 675 (1980) [V. S. Edel'man, "Levitated electrons", Sov. Phys.-Uspekhi **23**(4), 227 (1980)].
4. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, "О режиме развития неустойчивости заряженной поверхности гелия", ДАН СССР **228**, 829 (1976) [L. P. Gorkov and D. M. Chernikova, "Mode of stability loss of charged helium surface", Sov. Phys. Dokl. **21**(6), 328 (1976)].
5. S. M. Korobeynikov, A. G. Ovsyannikov, A. V. Ridel, D. I. Karpov, M. N. Lyutikova, Yu. A. Kuznetsova, and V. B. Yassinskiy, "Study of partial discharges in liquids", J. Electrostat. **103**, 103412 (2020).
6. Н. М. Зубарев, "Формирование конических острий на поверхности жидкого металла в электрическом поле", Письма в ЖЭТФ **73**(10), 613 (2001) [N. M. Zubarev, "Formation of conic cusps at the surface of liquid metal in electric field", JETP Lett. **73**(10), 544 (2001)].
7. V. G. Suvorov and N. M. Zubarev, "Formation of the Taylor cone on the surface of liquid metal in the presence of an electric field", J. Phys. D: Appl. Phys. **37**, 289 (2004).
8. T. G. Albertson and S. M. Troian, "Electrified cone formation in perfectly conducting viscous liquids: Self-similar growth irrespective of Reynolds number", Phys. Fluids **31**, 102103 (2019).
9. N. M. Zubarev, "The effect of viscosity on the self-similar growth of conic cusps on the surface of a conducting liquid in an electric field: Limiting cone angle", Phys. Fluids **36**, 042102 (2024).
10. N. M. Zubarev, "Criteria for hard excitation of electrohydrodynamic instability of the free surface of a conducting fluid", Physica D **152**–**153**, 787 (2001).
11. Н. М. Зубарев, "Развитие неустойчивости заряженной поверхности жидкого гелия: точные решения", Письма в ЖЭТФ **71**(9), 534 (2000) [N. M. Zubarev, "Charged-surface instability development in liquid helium: An exact solution", JETP Lett. **71**(9), 367 (2000)].
12. Н. М. Зубарев, "Точные решения уравнений движения жидкого гелия со свободной заряженной поверхностью", ЖЭТФ **121**(3), 624 (2002) [N. M. Zubarev, "Exact solutions of the equations of motion of liquid helium with a charged free surface", JETP **94**(3), 534 (2002)].

13. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, "Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping)", Phys. Lett. A **221**, 73 (1996).
14. А. И. Дьяченко, "О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью", ДАН **376**, 27 (2001) [A. I. D'yachenko, "On the dynamics of an ideal fluid with a free surface", Dokl. Math. **63**, 115 (2001)].
15. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, "New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface", Eur. J. Mech. B: Fluids **21**, 283 (2002).
16. Н. М. Зубарев, "Формирование особенностей на заряженной поверхности слоя жидкого гелия конечной глубины", ЖЭТФ **134**(4), 779 (2008) [N. M. Zubarev, "Formation of singularities on the charged surface of a liquid-helium layer with a finite depth", JETP **107**(4), 668 (2008)].
17. E. A. Kochurin and N. M. Zubarev, "Reduced equations of motion of the interface of dielectric liquids in vertical electric and gravitational fields", Phys. Fluids **24**, 072101 (2012).
18. П. Я. Полубаринова-Кочина, "К вопросу о перемещении контура нефтеносности", ДАН СССР **XLVII**(4), 254 (1945) [P. Ya. Polubarinova-Kochina, "K voprosu o peremeshchenii kontura neftenosnosti", Dokl. Akad. Nauk SSSR **47**, 254 (1945)].
19. Л. А. Галин, "Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью", ДАН СССР **XLVII**(4), 250 (1945) [L. A. Galin, "Neustanovivshayasya filtratsiya so svobodnoy poverkhnostyu", Dokl. Akad. Nauk SSSR **47**, 246 (1945)].
20. B. I. Shraiman and D. Bensimon, "Singularities in nonlocal interface dynamics", Phys. Rev. A **30**, 2840 (1984).
21. S. D. Howison, "Cusp development in Hele–Shaw flow with a free surface", SIAM J. Appl. Math. **46**, 20 (1986).
22. D. Bensimon, L. P. Kadanoff, S. Liang, B. I. Shraiman, and C. Tang, "Viscous flows in two dimensions", Rev. Mod. Phys. **58**, 977 (1986).
23. M. B. Mineev-Weinstein and S. P. Dawson, "Class of nonsingular exact solutions for Laplacian pattern formation", Phys. Rev. E **50**, R24 (1994).
24. M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, and A. Zabrodin, "Integrable structure of interface dynamics", Phys. Rev. Lett. **84**, 5106 (2000).
25. N. M. Zubarev and O. V. Zubareva, "Exact solutions for the evolution of a bubble in an ideal liquid in a uniform external electric field", ЖЭТФ **147**(1), 174 (2015) [N. M. Zubarev and O. V. Zubareva, "Exact solutions for the evolution of a bubble in an ideal liquid in a uniform external electric field", JETP **120**(1), 155 (2015)].
26. Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин, "Взаимодействие сильно нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле", Письма в ЖЭТФ **99**(11), 729 (2014) [N. M. Zubarev and E. A. Kochurin, "Interaction of strongly nonlinear waves on the free surface of a dielectric liquid in a horizontal electric field", JETP Lett. **99**(11), 627 (2014)].
27. M. V. Flamarion, T. Gao, R. Ribeiro-Jr, and A. Doak, "Flow structure beneath periodic waves with constant vorticity under normal electric fields", Phys. Fluids **34**(12), 127119 (2022).
28. T. Gao, A. Doak, J. M. Vanden-Broeck, and Z. Wang, "Capillary-gravity waves on a dielectric fluid of finite depth under normal electric field", Eur. J. Mech. B Fluids **77**, 98 (2019).
29. T. Gao, Z. Wang, and D. Papageorgiou, "Singularities of capillary-gravity waves on dielectric fluid under normal electric fields", SIAM J. Appl. Math. **84**(2), 523 (2024).
30. L. G. Martins, M. V. Flamarion, and R. Ribeiro-Jr, "Flow structures beneath stationary waves with constant vorticity over variable topography", Physica D: Nonlinear Phenomena **482**, 134824 (2025).
31. M. V. Flamarion, A. Nachbin, and R. Ribeiro-Jr, "Time-dependent Kelvin cat-eye structure due to current-topography interaction", J. Fluid Mech. **889**, A11 (2020).
32. M. V. Flamarion, E. Kochurin, and R. Ribeiro-Jr, "Fully nonlinear evolution of free-surface waves with constant vorticity under horizontal electric fields", Mathematics **11**(21), 4467 (2023).
33. В. П. Рубан, "Нелинейная динамика волн над неоднородно периодическим дном", Письма в ЖЭТФ **122**(7), 397 (2025) [V. P. Ruban, "Nonlinear dynamics of waves over a nonuniformly periodic bottom", JETP Lett. **122**(7), 411 (2025)].
34. В. П. Рубан, "Волны над искривленным дном: метод составного конформного отображения", ЖЭТФ **157**(5), 944 (2020) [V. P. Ruban, "Waves over curved bottom: The method of composite conformal mapping", JETP **130**(5), 797 (2020)].
35. А. О. Короткевич, А. О. Прокофьев, В. Е. Захаров, "О темпе диссипации океанских волн, вызванной их обрушением", Письма в ЖЭТФ **109**(5), 312 (2019) [A. O. Korotkevich, A. O. Prokofiev, and V. E. Zakharov, "On the dissipation rate of ocean waves due to white capping", JETP Lett. **109**(5), 309 (2019)].
36. А. О. Короткевич, А. О. Прокофьев, "Четвертая ветвь неустойчивости волны Стокса и зависимость соответствующих инкрементов от нелинейности", Письма в ЖЭТФ **123**(3), 207 (2026) [A. O. Korotkevich and A. O. Prokofiev, "Fourth branch of instability of Stokes' wave and dependence of corresponding growth rate on nonlinearity", JETP Lett. (2026), in press].
37. Е. А. Кочурин, "Моделирование волновой турбулентности поверхности жидкости на основе ме-

тода динамических конформных преобразований", Письма в ЖЭТФ **118**(12), 889 (2023) [E. A. Kochurin, "Simulation of the wave turbulence of a liquid surface using the dynamic conformal transformation method", JETP Lett. **118**(12), 893 (2023)].

38. Е. А. Кочурин, Е. А. Кузнецов, "Эффекты сильной турбулентности волн на воде", Письма в ЖЭТФ **122**(4), 214 (2025) [E. A. Kochurin and E. A. Kuznetsov, "Effects of strong turbulence for water waves", JETP Lett. **122**(4), 227 (2025)].