Аномальный эффект Холла в металлических коллинеарных антиферромагнетиках

В. П. Голубинский[+1)], *В. А. Зюзин*[*1)]

[+]*Национальный исследовательский технологический университет МИСИС, 119049 Москва, Россия*

[*]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, 142432 Черноголовка, Россия*

Поступила в редакцию 6 ноября 2025 г.
После переработки 27 января 2026 г.
Принята к публикации 27 января 2026 г.

Мы предлагаем и теоретически изучаем минимальные модели коллинеарных (компенсированных) антиферромагнетиков с неелевским упорядочением, которые демонстрируют аномальный эффект Холла. Для простоты мы сначала рассматриваем двумерные модели антиферромагнетиков с двумя магнитными подрешетками на квадратной решетке. Мы приводим явные примеры ферримагнетика с неелевским упорядочением и слабого ферромагнетика Дзялошинского. Затем изучается антиферромагнетик на решетке рутила, который относится к классу слабых ферромагнетиков. Мы анализируем инварианты Дзялошинского для существования спонтанной намагниченности в этих системах с Неелевским упорядочением. Микроскопические расчеты кривизны Берри для исследованных систем подтверждают справедливость инвариантов Дзялошинского. Показано, что механизм аномального эффекта Холла в этих антиферромагнетиках возникает благодаря импульсно-зависимого обменного взаимодействия фермионов проводиомсти с неелевским порядком и спин-орбитального взаимодействия. Эти физические процессы обусловлены нарушением симметрий, которые допускают инвариант Дзялошинского в системе.

DOI: 10.7868/S3034576626030077

I. Введение. Металлические коллинеарные антиферромагнетики с неелевским упорядочением могут демонстрировать аномальный эффект Холла (АЭХ), несмотря на, казалось бы, исчезающе малый результирующий магнитный момент. Существуют два типа антиферромагнетиков с неелевским упорядочением, которые демонстрируют АЭХ [1]. Для ясности рассмотрим коллинеарный неелевский порядок с двумя магнитными подрешетками. Первый тип – это слабые ферромагнетики Дзялошинского [2, 3]. В таких антиферромагнетиках две магнитные подрешетки связаны некоторой комбинацией операций симметрии кристаллической решетки и операции обращения времени. Слабый ферромагнетизм предполагает, что конечный магнитный момент может возникать в коллинеарных антиферромагнетиках с неелевским упорядочением из-за спин-орбитального взаимодействия (СОВ), при условии, что симметрия решетки и направление неелевского вектора это позволяют. Все слабые ферромагнетики для всех классов симметрии были классифицированы в [1], а их свойства были изучены и рассмотрены в [4, 5]. Важно отметить, что магнитный момент может быть реализован либо в виде отклонения (кантинга) неелевского порядка [2, 3], либо он может приводить к орбитальной намагниченности фермионов проводимости, взаимодействующих с коллинеарным неелевским порядком [4–6]. Второй тип – это ферримагнетики, где две магнитные подрешетки не связаны никакой комбинацией операций симметрии кристаллической решетки и операции обращения времени. Например, ферримагнетик может быть реализован на решетке, где две магнитные подрешетки, обладающие спинами одинаковой величины, имеют различное немагнитное окружение.

Существуют также истинные коллинеарные антиферромагнетики с неелевским упорядочением, в которых кристаллическая симметрия запрещает существование конечного магнитного момента типа слабого ферромагнетизма Дзялошинского. Такие системы могут обладать симметрией, которая включает комбинацию трансляции и операции обращения времени, или поворота на $\pi/2$ и операции обращения времени, или зеркального отражения и операции обращения времени, которая связывает две магнитные подрешетки.

Слабый ферромагнетизм был теоретически изучен в [1, 4, 5, 7–9], а АЭХ в них рассматривался в [4–6, 10, 11]. Различные модели ферримагнетиков в связи с АЭХ недавно были теоретически изучены в

[1)]e-mail: golubinskiivladimir@gmail.com; zyuzin@itp.ac.ru

[12–15]. В дополнение к классификации антиферромагнетиков на основе существования или отсутствия конечного магнитного момента, в настоящее время существует постоянный исследовательский интерес к пониманию спинового расщепления фермионов проводимости, которые взаимодействуют с неелевским порядком [10, 13, 14, 16–24]. Например, можно различать спиновые расщепления d-, g-, i-типа или зеркально-симметричного типа в зависимости от того, какая операция симметрии связывает поверхности Ферми противоположных спинов фермионов проводимости. Эта симметрия соответствует тому, как магнитные подрешетки связаны друг с другом [1]. Такие зависящие от импульса спиновые расщепления могут быть найдены в любом из обсуждаемых типов антиферромагнетиков: истинных антиферромагнетиках, ферримагнетиках или слабых ферромагнетиках. В результате своих симметрий, истинные антиферромагнетики могут демонстрировать необычные эффекты [4, 5], такие как квадратичное и d-волновое симметричное вращение Фарадея в магнитном поле [25, 26], d-волновой эффект Холла и линейную магнитопроводимость [4, 5, 27], а также актуальный для спинтроники эффект расщепления спина [22] и спиновый аномальный эффект Холла [14]. Транспортные и оптические свойства [9] слабых ферромагнетиков были изучены и рассмотрены в [4, 5]. Отметим, что альтермагнетики были определены как коллинеарные антиферромагнетики, демонстрирующие аномальный эффект Холла [10]. Оказывается, альтермагнетики в этом отношении являются стандартными слабыми ферромагнетиками, потому что альтермагнетики имеют те же симметрии, что и слабые ферромагнетики. Кроме того, все экспериментально идентифицированные альтермагнетики являются слабыми ферромагнетиками. С другой стороны, наличие спинового расщепления, например, показанного на рис. 1, в физике слабых ферромагнетиков было понято [10, 16–18] лишь недавно.

Несмотря на значительные исследования АЭХ в коллинеарных антиферромагнетиках с неелевским упорядочением [4–6, 10–12, 14], лежащий в его основе механизм остается не до конца понятым и является значимой темой для обсуждения. Целью данной работы является теоретическое понимание микроскопических деталей АЭХ в коллинеарных антиферромагнетиках с неелевским упорядочением, введение инварианта Дзялошинского и представление простых примеров всех трех типов (истинных, ферримагнетиков и слабых ферромагнетиков) антиферромагнетиков.

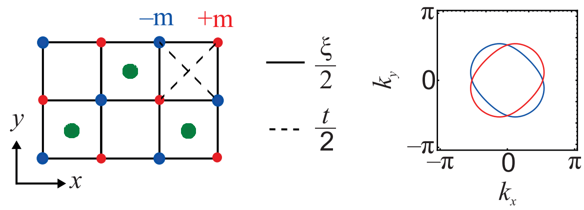

Рис. 1. (Цветной онлайн) Слева: пример истинного d-волнового антиферромагнетика с неелевским упорядочением. Неелевский порядок задается узлами с $\pm\mathbf{m}$. Зеленый атом немагнитен и может располагаться либо в плоскости решетки, либо быть приподнятым над ней. Для простоты мы предполагаем отсутствие туннелирования фермионов через зеленый атом. Справа: контурный график поверхностей Ферми проводящих фермионов, описываемых гамильтонианом (ур. (5)) для $m = 2\xi$ и $t = 0.15\xi$, и $\mu = 2.2\xi$ (в единицах ξ). Неелевский порядок направлен вдоль оси z. Красный график – для фермионов со спином вверх, синий – для фермионов со спином вниз

II. Инварианты Дзялошинского. Мы будем рассматривать коллинеарный антиферромагнетик с неелевским упорядочением, имеющий две магнитные подрешетки с намагниченностями $\mathbf{M}_{1/2} = \pm\mathbf{m}$. Для анализа существования магнитного момента в системе необходимо ввести неелевский вектор $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ и намагниченность $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$. Однако $\mathbf{M}$ может быть общим, не обязательно связанным с $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$.

Например, истинные антиферромагнетики – это те, у которых всегда $\mathbf{M} = 0$, в то время как ферримагнетики и слабые ферромагнетики допускают $\mathbf{M} \neq 0$. При анализе существования магнитного момента мы сначала устанавливаем неелевский порядок на некоторой кристаллической решетке и предполагаем, что $\mathbf{M} = 0$. Затем мы изучаем вопрос о том, может ли $\mathbf{L}$ генерировать конечный $\mathbf{M}$ в системе. Теоретически, это вопрос о том, является ли комбинация $M_\alpha L_\beta$ (в общем случае нечетная по $\mathbf{L}$), которая может появляться в свободной энергии системы, инвариантной относительно всех симметрий кристалла. Такой член в свободной энергии является ключевым, в нем неелевский вектор L_β является генератором конечной намагниченности M_α в системе. Туров [1] классифицировал такие инварианты в антиферромагнетиках для всех кристаллических систем. Мы будем называть такие инварианты инвариантами Дзялошинского.

В этой работе мы сначала изучаем двумерные антиферромагнетики, поскольку они позволяют понятно проводить анализ и предлагают довольно простые аналитические решения. Затем подход применяется к антиферромагнетику на решетке рутила. В двух измерениях (плоскость $x-y$ является плоскостью системы) в антиферромагнетике с двумя магнитными подрешетками мы ожидаем, что магнитный момент $\mathbf{M}$, генерируемый неелевским порядком, будет нормален к плоскости системы (z-направление). Ниже мы будем интересоваться случаем, когда $\mathbf{M}$ не связан с отклонением (кантингом) неелевского порядка, т.е. с $\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2$. При проведении анализа симметрии мы должны помнить, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ изменяются при операциях симметрии как псевдовекторы. Кроме того, $\mathbf{L}$ меняет знак при обмене магнитных подрешеток.

III. Кривизна Берри. Мы исследуем кривизну Берри для различных моделей металлических антиферромагнетиков с Неелевским упорядочением. Кривизна Берри определяет внутренний механизм АЭХ. Более того, кривизна Берри обнаруживает конечную орбитальную намагниченность $\mathbf{M}$, создаваемую фермионами проводимости [28–30], которые взаимодействуют с неелевским порядком. Кривизна Берри $\Omega^{(\pm)}_{\mathbf{k};\alpha\beta}$ для обобщенного 2×2 гамильтониана в спиновом пространстве

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \begin{bmatrix} \delta_{\mathbf{k}} & \chi^*_{\mathbf{k}} \\ \chi_{\mathbf{k}} & -\delta_{\mathbf{k}} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $\delta_{\mathbf{k}}$ – вещественная (единичная матрица в гамильтониане не определяет кривизну Берри), определяется формулой:

$$\Omega_{\mathbf{k};\alpha\beta;\pm} = \pm\frac{w_{\mathbf{k};\alpha\beta}}{2(\delta^2_{\mathbf{k}}+|\chi_{\mathbf{k}}|^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

где индекс $\pm$ соответствует собственным значениям $\epsilon_{\mathbf{k};\pm} = \pm\sqrt{\delta^2_{\mathbf{k}}+|\chi_{\mathbf{k}}|^2}$, тогда как α и β определяют проекции импульса $\mathbf{k}$. Мы ввели функцию

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{k};\alpha\beta} = {} & \delta_{\mathbf{k}}\left[\partial_\alpha \mathrm{Im}\chi_{\mathbf{k}}\partial_\beta \mathrm{Re}\chi_{\mathbf{k}} - \partial_\beta \mathrm{Im}\chi_{\mathbf{k}}\partial_\alpha \mathrm{Re}\chi_{\mathbf{k}}\right] \\ & - \mathrm{Re}\chi_{\mathbf{k}}\left[\partial_\alpha \mathrm{Im}\chi_{\mathbf{k}}\partial_\beta \delta_{\mathbf{k}} - \partial_\alpha\delta_{\mathbf{k}}\partial_\beta \mathrm{Im}\chi_{\mathbf{k}}\right] \\ & + \mathrm{Im}\chi_{\mathbf{k}}\left[\partial_\alpha \mathrm{Re}\chi_{\mathbf{k}}\partial_\beta \delta_{\mathbf{k}} - \partial_\alpha\delta_{\mathbf{k}}\partial_\beta \mathrm{Re}\chi_{\mathbf{k}}\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Зная кривизну Берри, мы рассчитываем АЭХ проводимость,

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{\hbar}\left[\int_{\mathrm{BZ}}\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\sum_n \Omega_{\mathbf{k};xy;n}\mathcal{F}(\epsilon_{\mathbf{k};n})\right], \tag{4}$$

где n нумерует фермионные зоны, $\mathcal{F}(\epsilon)$ – функция распределения Ферми–Дирака, а интегрирование проводится по зоне Бриллюэна (ЗБ). Мы будем изучать так называемый антиферромагнитный АЭХ [4–6], т.е. $\sigma_{xy}(\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2=0;\mathbf{L}) = \sigma_{yx}(\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2 = 0;-\mathbf{L})$, когда отсутствует отклонение (кантинг) неелевского порядка.

IV. Истинные антиферромагнетики. Истинный антиферромагнетик – это коллинеарный антиферромагнетик с неелевским упорядочением, в котором кристаллическая симметрия запрещает конечную намагниченность, генерируемую неелевским порядком. Кроме того, в истинном антиферромагнетике магнитные подрешетки связаны некоторой операцией кристаллической симметрии. Простейший пример – неелевский порядок с двумя магнитными подрешетками на квадратной решетке. В этом случае комбинация трансляции и обращения времени является симметрией, связывающей две магнитные подрешетки. Эта симметрия сохраняет вектор $\mathbf{L}$ инвариантным (каждая операция, трансляция и обращение времени меняют знак $\mathbf{L}$), в то время как она обращает любую намагниченность $\mathbf{M}$. Следовательно, в этой системе нет инварианта Дзялошинского, и конечная намагниченность не может быть сгенерирована неелевским порядком.

Антиферромагнетик на квадратной шахматной решетке (изученный, например, в [13, 23, 24]), показанный на рис. 1, является гибридным антиферромагнетиком. А именно, для некоторых направлений неелевского порядка магнитные подрешетки связаны друг с другом, тогда как для других направлений – нет. Немагнитный зеленый атом исключает трансляцию и обращение времени из симметрий кристалла. Зеленый атом может находиться в плоскости решетки или быть приподнятым над ней. Магнитные подрешетки связаны поворотом на $\frac{\pi}{2}$ и обращением времени для неелевского вектора в z-направлении, а для неелевских порядков в x- и y-направлениях существует комбинация отражения в соответствующей плоскости, нормальной к решетке, и операции обращения времени, которая связывает магнитные подрешетки. Следовательно, $M_z = 0$ для этих направлений неелевского порядка.

Если теперь неелевский порядок находится в любом другом направлении в плоскости $\cos(\phi)\mathbf{e}_x + \sin(\phi)\mathbf{e}_y$ (ϕ – угол), за исключением направлений вдоль x- или y-оси, то две магнитные подрешетки больше не будут связаны друг с другом. Технически, система является ферримагнетиком для этих направлений неелевского порядка. Однако конечный M_z не может быть генерирован неелевским порядком в этом случае. Комбинация поворота на π и обращения времени является симметрией системы, которая исключает возможный инвариант $M_z[\cos(\phi)L_x + \sin(\phi)L_y]$. Это происходит потому, что поворот на π и обращение времени восстанавливают неелевский вектор, но меняют знак M_z. В дополнение к этому, если зеленый атом находится в одной плоскости с красными и синими узлами, комбинация отражения в плоскости $x-y$ и обращения времени, которая является симметрией решетки, также исключает возможный инвариант $M_z[\cos(\phi)L_x + \sin(\phi)L_y]$. Гамильтониан фермионов, описываемых спинором $\Psi = (\Psi_{\mathrm{R};\uparrow}, \Psi_{\mathrm{R};\downarrow}, \Psi_{\mathrm{B};\uparrow}, \Psi_{\mathrm{B};\downarrow})^{\mathrm{T}}$, где $(...)^{\mathrm{T}}$ – транспонирование,

$$\hat{H}_{\text{genuine}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma} - t_{\mathbf{k}} & \xi_{\mathbf{k}} \\ \xi_{\mathbf{k}} & -\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma} + t_{\mathbf{k}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $\xi_{\mathbf{k}} = \xi[\cos(k_x) + \cos(k_y)]$ и $t_{\mathbf{k}} = t\sin(k_k)\sin(k_y)$. При выводе $t_{\mathbf{k}}$ мы предположили, что туннелирование от красного к красному атому через диагональ имеет вид $t^{\mathrm{R}}_{\mathbf{k}} = t\cos(k_x + k_y) = t\cos(k_x)\cos(k_y) - t\sin(k_x)\sin(k_y)$, тогда как от синего к синему – $t^{\mathrm{B}}_{\mathbf{k}} = t\cos(k_x)\cos(k_y) + t\sin(k_x)\sin(k_y)$. В уравнении (5) мы оставили только второй член в $t^{\mathrm{R}}_{\mathbf{k}}$ и $t^{\mathrm{B}}_{\mathbf{k}}$. Контурный график d-волнового спинового расщепления поверхностей Ферми проводящих фермионов, описываемых гамильтонианом (ур. (5)), показан на правой части рис. 1. Система демонстрирует эффект расщепления спина, при котором токи, поляризованные по спину вверх и спину вниз, текут в разных направлениях [22]. Когда добавляется спин-орбитальное взаимодействие Рашбы, например, из-за поднятия зеленого атома из плоскости решетки, система будет демонстрировать d-волновой эффект Холла и линейную магнитопроводимость [27].

V. Ферримагнетики. Ферримагнетики – это антиферромагнетики с неелевским упорядочением, в которых две магнитные подрешетки, имеющие спины одинаковой величины, не связаны никакой операцией симметрии. Симметрия между подрешетками нарушается немагнитным окружением, а не разницей в величинах антипараллельных спинов. Однако последние также являются ферримагнетиками.

Мы рассматриваем систему с Неелевским упорядочением, показанную на рис. 2a. Квадраты представляют немагнитные атомы, которые приподняты над плоскостью $x-y$, как показано на рис. 2c. Можно убедиться, что магнитные подрешетки не связаны никакой операцией симметрии; следовательно, система, показанная на рис. 2, является ферримагнетиком. Давайте теперь выясним, какие направления неелевского порядка могут генерировать конечный M_z. Сначала рассмотрим неелевский порядок в z-направлении. Тогда комбинация поворота на $\frac{\pi}{2}$ вокруг центра квадратной плакеты, зеркального отражения в плоскости $y-z$, которая проходит через середину вертикальной связи квадрата, и обращения времени является симметрией решетки, которая допускает инвариант Дзялошинского M_zL_z. Теперь

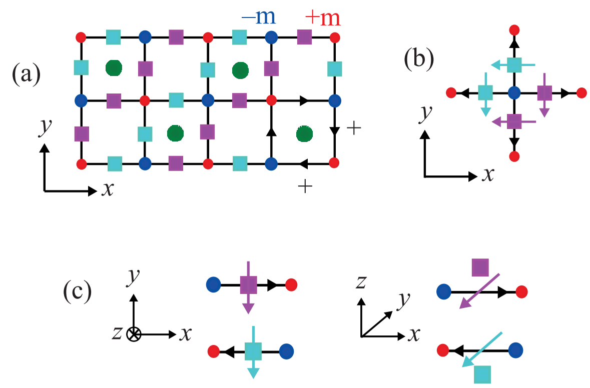

Рис. 2. (Цветной онлайн) (a) – Решетка антиферромагнетика с неелевским упорядочением. (b) – Визуальное описание спин-орбитального взаимодействия в системе. Квадрат – атом, который либо под (циановый цвет) в z-направлении, либо над (фиолетовый цвет) плоскостью решетки (как показано в (c)). Циановая/фиолетовая стрелка – это направление спин-орбитального взаимодействия для данного черной стрелкой направления туннелирования фермиона. Если изменяется направление черной стрелки, изменяется и направление циановой/фиолетовой стрелки. Отсюда в системе два инварианта Дзялошинского: M_zL_z и $M_z(L_x - L_y)$

установим неелевский порядок в плоскости решетки. В этом случае вышеупомянутая комбинация операций симметрии является симметрией решетки только тогда, когда $L_x = -L_y$. Следовательно, инвариант Дзялошинского в этом случае равен $M_z(L_x - L_y)$. Таким образом, мы ожидаем, что АЭХ в системе будет $\sigma_{xy} \propto \sigma_z L_z + \sigma_{x-y}(L_x - L_y)$, где σ_z и σ_{x-y} – коэффициенты, зависящие от материала. Продемонстрируем это, изучив модель с помощью микроскопических расчетов, чтобы подтвердить правильность симметрийного анализа.

В результате поднятия квадратов, зеркальная симметрия в плоскости $x-y$ нарушена. Допустимые СОВ показаны на рис. 2b и c. Дополнительно, в нижней части правого угла решетки, показанной на рис. 2a, имеется СОВ d-волновой формы, созданное зеленым атомом. Например, такое СОВ использовалось в [13]. Базис – $\Psi = (\Psi_{\mathrm{R};\uparrow}, \Psi_{\mathrm{R};\downarrow}, \Psi_{\mathrm{B};\uparrow}, \Psi_{\mathrm{B};\downarrow})^{\mathrm{T}}$, а гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H}_{\text{ferri}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma} - t_{\mathbf{k}} & \xi_{\mathbf{k}} + i\boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{k}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ \xi_{\mathbf{k}} - i\boldsymbol{\gamma}^{*}_{\mathbf{k}}\cdot\boldsymbol{\sigma} & -\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma} + t_{\mathbf{k}} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $t_{\mathbf{k}} = t\sin(k_x)\sin(k_y)$, $\gamma^x_{\mathbf{k}} = -\gamma\cos(k_y)$, $\gamma^y_{\mathbf{k}} = -\gamma\cos(k_x)$, $\gamma^z_{\mathbf{k}} = \gamma_z[\cos(k_x) - \cos(k_y)]$, $\xi_{\mathbf{k}} = \xi[\cos(k_x) + \cos(k_y)]$, и $\mathbf{m} = m[\cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\theta)]$ в произвольном направлении, заданном углами ϕ и θ. Мы

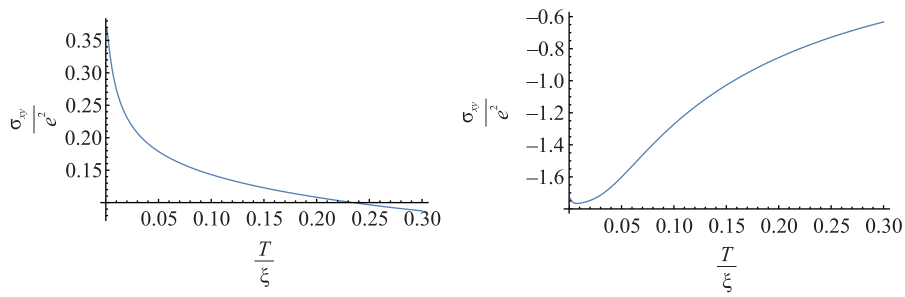

Рис. 3. (Цветной онлайн) График АЭХ проводимости, как функции температуры. Слева: модель ферримагнетика ур. (6) при $m_x = m_y = 0$. Справа: модель слабого ферромагнетика ур. (16) при $m_x = m_z = 0$. В обоих графиках $m = 2\xi$, $t = 0.15\xi$, $\gamma = \eta_1 = \eta_2 = 0.1\xi$, и уровень Ферми выбран $\mu = 2\xi$. Здесь $h = 2\pi\hbar \equiv 1$

будем интересоваться изучением только проводящих фермионов. Для этого мы сочли удобным повернуть $\hat{T}^{-1}\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}\hat{T} = m\sigma_z$, где $m^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_x^2$, а затем изменить базис на проводящие и валентные фермионы $(\tilde{\Psi}_{\mathrm{R};\uparrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{B};\downarrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{R};\downarrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{B};\uparrow})$, где тильда обозначает повернутый базис. Гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_{\mathrm{ferri}} = \begin{bmatrix} \hat{H}^{\mathrm{c}} & \hat{C} \\ \hat{C}^{\dagger} & \hat{H}^{\mathrm{v}} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где

$$\hat{H}^{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} m - t_{\mathbf{k}} & ia_{\mathbf{k};12} \\ -ia^{*}_{\mathbf{k};12} & m + t_{\mathbf{k}} \end{bmatrix},$$
$$\hat{H}^{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} -m - t_{\mathbf{k}} & ia^{*}_{\mathbf{k};12} \\ -ia_{\mathbf{k};12} & -m + t_{\mathbf{k}} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

и $\hat{C} = (\xi_{\mathbf{k}} + ia_{\mathbf{k}})\hat{\tilde{\sigma}}_1$, где $\hat{\tilde{\sigma}}_1$ действует на повернутый базис, и где мы определили

$$a_{\mathbf{k}} = \gamma^{z}_{\mathbf{k}}\cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta)\left(\gamma^{-}_{\mathbf{k}}e^{i\phi} + \gamma^{+}_{\mathbf{k}}e^{-i\phi}\right) \tag{9}$$

$$a_{\mathbf{k};12} = -\gamma^{z}_{\mathbf{k}}\sin(\theta) + \gamma^{-}_{\mathbf{k}}\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi} - \\ - \gamma^{+}_{\mathbf{k}}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi}, \tag{10}$$

где $\gamma^{\pm}_{\mathbf{k}} = \gamma^{x}_{\mathbf{k}} \pm i\gamma^{y}_{\mathbf{k}}$, так же заметим, что $\gamma^{x/y/z}_{\mathbf{k}}$ – вещественные компоненты.

Полученное уравнение на собственные значения проводящих фермионов, описываемых $\Psi_{\mathrm{c}} = (\tilde{\Psi}_{\mathrm{R};\uparrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{B};\downarrow})$, где $\tilde{\Psi}$ – повернутый базис, имеет следующий вид

$$-2m\begin{bmatrix} t_{\mathbf{k}} & -ia_{\mathbf{k};12} \\ ia^{*}_{\mathbf{k};12} & -t_{\mathbf{k}} \end{bmatrix}\Psi_{\mathrm{c}} = E^2\Psi_{\mathrm{c}}, \tag{11}$$

где комплексная фаза $\xi_{\mathbf{k}} + ia_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi^2_{\mathbf{k}} + a^2_{\mathbf{k}}}e^{i\zeta_{\mathbf{k}}}$ также может быть существенной для кривизны Берри (см. раздел VII).

$$E^2 = (\epsilon + \mu)^2 - m^2 - t^2_{\mathbf{k}} - a^{*}_{\mathbf{k};12}a_{\mathbf{k};12} - \xi^2_{\mathbf{k}} - a^2_{\mathbf{k}}, \tag{12}$$

где ϵ – это собственное значение. Спектр двух проводящих зон:

$$\epsilon^{\mathrm{c}}_{\mathbf{k};\pm} = \sqrt{\left(m \mp \sqrt{t^2_{\mathbf{k}} + |a_{\mathbf{k};12}|^2}\right)^2 + \xi^2_{\mathbf{k}} + a^2_{\mathbf{k}}}. \tag{13}$$

Величина, определяющая кривизну Берри из ур. (3), рассчитана как

$$\omega_{\mathbf{k};xy} = 8tm^2\left[1 - \cos^2(k_x)\cos^2(k_y)\right] \times \\ \times \left[\gamma^2 m_z + \gamma_z\gamma(m_y - m_x)\right], \tag{14}$$

и, вспоминая, что неелевский вектор $\mathbf{L} = 2\mathbf{m}$, мы подтверждаем предсказания симметрийного аргумента, приводящего к инварианту Дзялошинского системы. Мы строим график проводимости АЭХ для нашей модели как функции температуры на левом рисунке рис. 3. Следует отметить, что ур. (3) содержит все физические процессы, нарушающие симметрии, чтобы допускать магнитный момент в соответствии с инвариантом Дзялошинского. Мы наблюдаем, что СОВ, заданное γ, которое обусловлено нарушением симметрии отражения в плоскости $x{-}y$ и обращения времени, входит в оба выражения во второй строке ур. (14). Кроме того, расщепление по спину, заданное $t_{\mathbf{k}}$, обусловлено нарушением трансляционных симметрий в системе. Наконец, комбинация γ и $t_{\mathbf{k}}$, входящих в ур. (3), является результатом нарушения симметрий между магнитными подрешетками, зеленым атомом и цветными квадратами, показанными на рис. 2.

VI. Слабые ферромагнетики. Слабый ферромагнетизм антиферромагнетиков был впервые предложен И. Е. Дзялошинским в 1958 г. [3] как объяснение экспериментов А. С. Боровика-Романова [2]. Слабый ферромагнетик – это антиферромагнетик с неелевским упорядочением, в котором кристаллическая симметрия допускает существование конечного магнитного момента. Этот магнитный момент может быть либо отклонением (кантингом) неелевского порядка [2, 3], либо обусловлен орбитальной намагниченностью проводящих фермионов. Ниже мы будем интересоваться последним. В слабых ферромагнетиках, в отличие от ферримагнетиков, магнитные подрешетки неелевского порядка связаны друг с другом операцией симметрии.

Мы стремимся построить простую теоретическую модель слабого ферромагнетика. В работе [14] была предложена модель истинного зеркально-симметричного антиферромагнетика. На рисунке 4

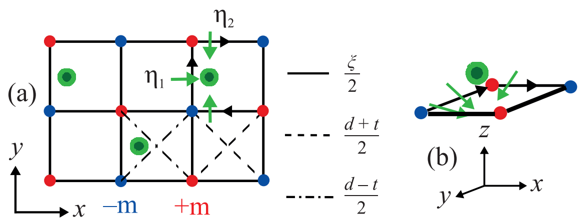

Рис. 4. (Цветной онлайн) (a) – Модель зеркально-симметричного слабого ферромагнетика. Комбинация зеркального отражения в плоскости $x{-}z$ (проходящей через центр вертикальной связи) и операций обращения времени является симметрией, которая связывает две подрешетки. (b) – Зеленый атом поднят над плоскостью решетки. Это необходимо для исключения комбинации отражения в плоскости $x{-}y$ и обращения времени из симметрий системы. В результате СОВ приобретает компоненты в этой плоскости, показанные зелеными стрелками. Таким образом, инвариант Дзялошинского слабого ферромагнетизма Дзялошинского в этой модели равен M_zL_y

показано обобщение модели истинного антиферромагнетика из [14] на случай слабого ферромагнетика. Определим ненулевой инвариант Дзялошинского в этой системе. Если неелевский порядок направлен вдоль оси x или z, симметрия, связывающая две магнитные подрешетки, представляет собой комбинацию отражения в плоскости $x{-}z$ (пересекающей центр вертикальной связи) и обращения времени. Эта комбинация гарантирует, что L_x или L_z не меняют знак, в то время как M_z меняет. Следовательно, $M_zL_{x/z}$ не является инвариантом Дзялошинского для этой системы. Когда неелевский порядок направлен вдоль оси y, симметрия системы, связывающая две магнитные подрешетки, представляет собой комбинацию отражения в плоскости $x-z$, проходящей через центр вертикальной связи, и операции обращения времени. Отражение меняет знаки как L_y, так и M_z. Затем и L_y, и M_z меняют знак при операции обращения времени. Следовательно, эта симметрия допускает M_zL_y как инвариант Дзялошинского системы. Однако, если зеленый атом расположен строго в плоскости решетки, то комбинация отражения в плоскости $x{-}y$ и операции обращения времени является симметрией решетки, которая сохраняет M_z, но меняет знак L_y. Чтобы допустить инвариант Дзялошинского M_zL_y, мы должны нарушить эту симметрию, подняв зеленый атом из плоскости решетки, как показано на рис. 4. Таким образом, мы ожидаем, что АЭХ будет $\sigma_{xy} \propto \sigma_y L_y$, где σ_y является коэффициентом, зависящим от материала.

Теперь мы продемонстрируем, что симметрийный аргумент согласуется с микроскопическими расчетами кривизны Берри. Туннелирование фермионов между красными и синими узлами по диагонали (пунктирные и штрихпунктирные линии на рис. 4) равно

$$t_{\mathbf{k}}^{\mathrm{R/B}} = \frac{d \pm t}{2}\cos(k_x \pm k_y) + \frac{d \mp t}{2}\cos(k_x \mp k_y) = \\ = d\cos(k_x)\cos(k_y) \mp t\sin(k_x)\sin(k_y). \qquad (15)$$

Мы опускаем член $d\cos(k_x)\cos(k_y)$ в следующем расчете, поскольку он одинаков для обеих подрешеток и не влияет на орбитальную намагниченность фермионов. Он будет восстановлен при расчете АЭХ. В базисе $\hat{\Psi} = (\Psi_{\mathrm{R}\uparrow}, \Psi_{\mathrm{B}\downarrow}, \Psi_{\mathrm{B}\uparrow}, \Psi_{\mathrm{R}\downarrow})^{\mathrm{T}}$ гамильтониан модели, содержащий все необходимые компоненты для ненулевой орбитальной намагниченности, имеет вид

$$\hat{H}_{\mathrm{weak}} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma} - t_{\mathbf{k}} & \xi_{\mathbf{k}} + i\gamma_{\mathbf{k}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ \xi_{\mathbf{k}} - i\gamma_{\mathbf{k}}^{*}\cdot\boldsymbol{\sigma} & -\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma} + t_{\mathbf{k}} \end{bmatrix}, \qquad (16)$$

где $\xi_{\mathbf{k}} = \xi[\cos(k_x) + \cos(k_y)]$ и $t_{\mathbf{k}} = t\sin(k_x)\sin(k_y)$. Структура спин-орбитального взаимодействия, создаваемого зеленым атомом, показана на рис. 4b и задается выражениями $\gamma_{\mathbf{k}}^{x} = \eta_1 e^{ik_y}$, $\gamma_{\mathbf{k}}^{z} = -\eta_2\cos(k_x) + \eta_4 e^{ik_y}$, и $\gamma_{\mathbf{k}}^{y} = i\eta_3\sin(k_x)$. Компоненты $i\eta_1\sin(k_y)$ и γ^y являются стандартным СОВ Рашбы. Часть $\gamma_{\mathbf{k}}^{x}$ с $\eta_1\cos(k_y)$ обусловлена понижением симметрии положением зеленого атома. Действительно, такое положение исключает все симметрии истинного антиферромагнетика, обсуждавшиеся выше в ур. (5).

Опять же, удобно повернуть спиновый базис ур. (16), как это было сделано для ферримагнитной системы ур. (6). Кроме того, полезно перегруппировать базис в зоны проводимости и валентную зону как $\hat{\tilde{\Psi}} = (\tilde{\Psi}_{\mathrm{R}\uparrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{B}\downarrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{R}\downarrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{B}\uparrow})^{\mathrm{T}}$, где $\tilde{\Psi}$ – повернутый базис. Мы определяем $\xi_{\mathbf{k}} + ia_{\mathbf{k}} = \sqrt{(\xi_{\mathbf{k}} - \mathrm{Im}a_{\mathbf{k}})^2 + (\mathrm{Re}a_{\mathbf{k}})^2}e^{i\zeta_{1;\mathbf{k}}}$ и

$\xi_{\mathbf{k}} + ia^*_{\mathbf{k}} = \sqrt{(\xi_{\mathbf{k}} + \mathrm{Im}a_{\mathbf{k}})^2 + (\mathrm{Re}a_{\mathbf{k}})^2} e^{i\zeta_{2;\mathbf{k}}}$. Эти фазы могут быть существенны для кривизны Берри (см. раздел VII). В этом новом базисе гамильтониан имеет вид

$$\hat{H}_{\mathrm{weak}} = \begin{bmatrix} \hat{H}^{\mathrm{c}} & \hat{C} \\ \hat{C}^\dagger & \hat{H}^{\mathrm{v}} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где гамильтониан зоны проводимости равен

$$\hat{H}^{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} m - t_{\mathbf{k}} & ia_{\mathbf{k};12} \\ -ia^*_{\mathbf{k};12} & m + t_{\mathbf{k}} \end{bmatrix},$$

$$\hat{H}^{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} -m - t_{\mathbf{k}} & ia_{\mathbf{k};21} \\ -ia^*_{\mathbf{k};21} & -m + t_{\mathbf{k}} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

и выражение для $\hat{C}$ имеет вид

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_{\mathbf{k}} + ia_{\mathbf{k}} \\ \xi_{\mathbf{k}} + ia^*_{\mathbf{k}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Величины $a_{\mathbf{k}}$ и $a_{\mathbf{k};12}$ определены в ур. (9), где $\gamma^{x/y/z}_{\mathbf{k}}$ даны после ур. (16). Кроме того, мы определили

$$a_{\mathbf{k};21} = -\gamma^z_{\mathbf{k}} \sin(\theta) + \gamma^+_{\mathbf{k}} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi} - \gamma^-_{\mathbf{k}} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi}. \tag{20}$$

Уравнение, определяющее зону проводимости, описываемую спинором $\hat{\Psi}_{\mathrm{c}} = (\tilde{\Psi}_{\mathrm{R}\uparrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{B}\downarrow})$, имеет вид

$$(\hat{H}^{\mathrm{c}} - E)\hat{\Psi}_{\mathrm{c}} - \hat{C}(\hat{H}^{\mathrm{v}} - E)^{-1}\hat{C}^\dagger \hat{\Psi}_{\mathrm{c}} = 0, \tag{21}$$

и для получения аналитических выражений для кривизны Берри проводящих фермионов безопасно анализировать только гамильтониан (ур. (18)). Другие члены, происходящие из $\hat{H}^{\mathrm{v}}$, малы в $\frac{1}{m}$. Аналитическое выражение для кривизны Берри для общего направления неелевского порядка является сложным, но мы можем проверить различные частные случаи. Мы полагаем $\eta_3 = \eta_4 = 0$ и $m_x = m_z = 0$, получаем $a_{\mathbf{k}} = 0$ и $a_{\mathbf{k};12} = \eta_2 \cos(k_x) + i\frac{m_y}{m}\eta_1 e^{ik_y}$, и получаем

$$\omega_{\mathbf{k};xy} = t\eta_1\eta_2 \frac{m_y}{m}\left[1 - \cos^2(k_x)\cos^2(k_y)\right] + \\ + t\eta_1^2 \left(\frac{m_y}{m}\right)^2 \sin(k_y)\cos(k_x), \tag{22}$$

где второй член обратится в ноль при интегрировании по ЗБ. Теперь продемонстрируем, что другие направления неелевского порядка приведут к нулевому АЭХ. Мы полагаем $m_y = m_z = 0$ и выбираем спин-орбитальное взаимодействие $\eta_1 = \eta_2 = 0$, тогда $a_{\mathbf{k}} = 0$ и $a_{\mathbf{k};12} = -\eta_4 e^{ik_y} + \frac{m_x}{m}\eta_3 \sin(k_x)$. Выражение, входящее в кривизну, получается

$$\omega_{\mathbf{k};xy} = -\frac{m_x}{4m} t\eta_3\eta_4 \sin(2k_x)\sin(2k_y) + \\ + t\eta_4^2 \sin(k_y)\cos(k_x), \tag{23}$$

что при интегрировании обнулится. Другие комбинации с другими η's и m_α будут интегрироваться в ноль аналогичным образом. В целом, симметрийный аргумент существования конечной намагниченности в исследуемой системе согласуется с микроскопическим расчетом кривизны Берри. Только $m_y \neq 0$ и поднятие зеленого атома из плоскости решетки, характеризуемое параметром η_1, важны для получения конечного магнитного момента в системе. Кроме того, асимметрия СОВ η_1, обусловленная смещенным внутриплоскостным положением зеленого атома от центра квадрата, является ключевой. Действительно, если бы зеленый атом находился в центре квадрата и был приподнят над плоскостью, соответствующее СОВ было бы $\propto i\eta_1 \sin(k_x)$, что не способствует образованию магнитного момента. В дополнение, комбинация t и η_2 устраняет симметрии истинных антиферромагнетиков. Мы строим график проводимости АЭХ модели для $m_y \neq 0$ как функции температуры на рис. 3. При выводе кривизны Берри мы использовали собственные функции, численно полученные из ур. (16), а не из редуцированного гамильтониана (ур. (18)).

VII. Слабые ферромагнетики на решетке рутила. Антиферромагнетик на решетке рутила, показанной на рис. 5, является классическим примером

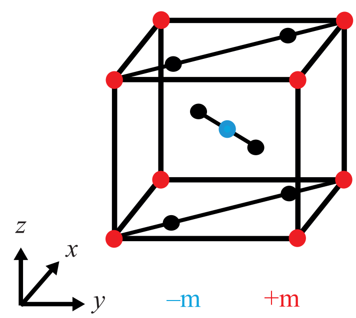

Рис. 5. (Цветной онлайн) Неелевский порядок на решетке рутила. Черные узлы – немагнитные атомы. Красные и синие узлы соответствуют магнитным узлам с намагниченностью $\pm\mathbf{m}$. Черные узлы создают единственное спин-орбитальное взаимодействие в системе. Фермионы находятся на красных и синих узлах

слабого ферромагнетика [3]. Комбинация поворота на $\frac{\pi}{2}$, трансляции и обращения времени запрещает неелевскому порядку в $\mathbf{e}_z$ развивать какую-либо намагниченность в системе. Инварианты Дзялошинского – $M_x L_y$ и $M_y L_x$, и в этой системе допускается псевдовектор $\mathbf{M}$. Опять же, этот псевдовектор может быть отклонением (кантингом) неелевского порядка Дзялошинского, или орбитальными магнитными моментами фермионов или магнонов. CoF_2, MnF_2, FeF_2

[31, 32] – примеры слабого ферромагнетика на решетке рутила. Направление неелевского порядка в этих материалах находится вдоль оси z, и в них нет псевдовектора. Эти материалы являются диэлектриками. $\mathrm{RuO_2}$ – это металлический антиферромагнетик на решетке рутила с неелевским упорядочением в z-направлении. Диэлектрик $\mathrm{NiF_2}$ – еще один антиферромагнетик на решетке рутила, неелевский вектор которого, как полагают, находится в плоскости $x{-}y$ [32]. Тем не менее, мы устанавливаем неелевский порядок в плоскости $x{-}y$ и предполагаем, что спины на двух подрешетках коллинеарны друг другу. Мы хотим понять, развивается ли псевдовектор $\mathbf{M}$ в орбитальной намагниченности фермионов, которые взаимодействуют с неелевским порядком.

Гамильтониан проводящих фермионов на решетке рутила имеет структуру (ур. (6)) со следующими элементами: $\xi_{\mathbf{k}} = \xi\cos(k_x)\cos(k_y)\cos(k_z)$, $\gamma^x_{\mathbf{k}} = -\gamma\sin(k_z)\sin(k_x)\cos(k_y)$, $\gamma^y_{\mathbf{k}} = \gamma\sin(k_z)\cos(k_x)\times\sin(k_y)$, и $t_{\mathbf{k}} = t\sin(2k_x)\sin(2k_y)$. Мы устанавливаем неелевский порядок в направлении $\mathbf{e}_x$. Подход, примененный в разделе V, применим к данной системе. После поворота мы получаем $a_{\mathbf{k}} = \gamma^x_{\mathbf{k}}$, $a_{\mathbf{k};12} = -i\gamma^y_{\mathbf{k}}$. Легко показать, что $a_{\mathbf{k};12}$ и $t_{\mathbf{k}}$ приводят к нулевой кривизне Берри. Мы полагаем их равными нулю и изучаем фазу матрицы $\hat{C}$ в ур. (7), сводя гамильтониан к двум эквивалентным блокам,

$$\hat{H}_{\mathrm{rutile}} = \begin{bmatrix} m_x & \xi_{\mathbf{k}} + ia_{\mathbf{k}} \\ \xi_{\mathbf{k}} - ia_{\mathbf{k}} & -m_x \end{bmatrix}, \qquad (24)$$

записанный в базисе $(\tilde{\Psi}_{\mathrm{R};\uparrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{B};\uparrow})^{\mathrm{T}}$ и $(\tilde{\Psi}_{\mathrm{B};\downarrow}, \tilde{\Psi}_{\mathrm{R};\downarrow})^{\mathrm{T}}$. Кривизна Берри, соответствующая магнитному моменту в направлении $\mathbf{e}_y$:

$$\Omega^{\pm}_{\mathbf{k};xz} = \pm\frac{m_x\xi\gamma\cos^2(k_y)\left[\sin^2(k_x) - \sin^2(k_z)\right]}{2\left[m_x^2 + \xi_{\mathbf{k}}^2 + a_{\mathbf{k}}^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \qquad (25)$$

и может показаться, что она также интегрируется в ноль. Однако АЭХ ненулевой благодаря членам $a_{\mathbf{k};12}$ и $t_{\mathbf{k}}$ в спектре (ур. (13)). Эти члены не важны в кривизне Берри, но должны быть восстановлены в спектре, поскольку они нарушают симметрию в направлениях x и z. Знак "$\pm$" в ур. (25) соответствует зонам проводимости/валентной зоне. Знаки кривизны Берри для зон проводимости одинаковы. Это контрастирует со слабым ферромагнетиком, обсуждавшимся в предыдущем разделе. Величина АЭХ проводимости очень мала для реалистичных параметров. Мы заключаем, что представленный расчет кривизны Берри согласуется с инвариантом Дзялошинского M_yL_x. Существование второго инварианта M_xL_y в системе может быть доказано таким же образом. В итоге, АЭХ равен $\mathbf{j}^{\mathrm{AHE}} = \sigma_{xz}L_x[\mathbf{e}_y\times\mathbf{E}] + \sigma_{yz}L_y[\mathbf{e}_x\times\mathbf{E}]$.

VIII. Выводы. В этой работе мы построили двумерные теоретические минимальные модели коллинеарных металлических антиферромагнетиков с неелевским упорядочением, которые демонстрируют АЭХ. Мы подчеркиваем, что нас интересовал случай, когда АЭХ обусловлен неелевским вектором $\mathbf{L}$ и в системе отсутствует отклонение (кантинг) неелевского порядка. Мы показали, что только коллинеарные ферримагнетики и коллинеарные слабые ферромагнетики демонстрируют АЭХ. Ферримагнетики – это антиферромагнетики с неелевским упорядочением, т.е. с равными по величине и антипараллельными спинами, у которых нет симметрии, связывающей магнитные подрешетки. Слабые ферромагнетики, напротив, являются антиферромагнетиками с Неелевским упорядочением, которые имеют симметрию, связывающую магнитные подрешетки. Мы проанализировали и получили инварианты Дзялошинского для существования конечной намагниченности в антиферромагнетиках с неелевским упорядочением для предложенных нами теоретических моделей. Микроскопические расчеты кривизны Берри для наших теоретических моделей подтвердили структуру инвариантов Дзялошинского. Мы выявили два основных механизма АЭХ в коллинеарных ферримагнетиках и слабых ферромагнетиках. Первый – это взаимодействие зависящего от импульса спинового расщепления проводящих фермионов, обусловленного взаимодействием с Неелевским порядком, и разрешенного кристаллической симметрией спин-орбитального взаимодействия. Все составляющие для ненулевого АЭХ возникают из нарушенных симметрий, которые допускают инварианты Дзялошинского в системе.

Мы благодарим И. В. Соловьева, В. П. Минеева и Г. Е. Воловика за обсуждения. В. П. Голубинский благодарит Летнюю школу теоретической физики Института Ландау 2025 года. В. А. Зюзин благодарит Пиринемскую Школу Теоретической Физики за гостеприимство летом 2025 года.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках государственного задания FFWR-2024-0016.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. Е. А. Туров, *Физические свойства магнитоупорядоченных кристаллов* (Изд-во АН СССР, М., 1963) [E. A. Turov, *Physical Properties Of Magnetically Ordered Crystals* (Academic Press, N.Y., London, 1965].

2. А. С. Боровик-Романов, М. П. Орлова, "Магнитные свойства карбонатов кобальта и марганца", ЖЭТФ **4**, 531 (1957) [A. S. Borovik-Romanov and M. P. Orlova, "Magnetic properties of cobalt and manganese carbonates", Soviet Phys. JETP **4**, 531 (1957)].
3. И. Е. Дзялошинский, "Термодинамическая теория "слабого" ферромагнетизма антиферромагнетиков", ЖЭТФ **6**, 1547 (1957) [I. E. Dzyaloshinskii, "A thermodynamic theory of "weak", ferromagnetism of antiferromagnetics", Phys. Chem. Solids **4**, 241 (1958)].
4. С. В. Вонсовский, Е. А. Туров, *Динамические и кинетические свойства магнетиков* (Наука, М., 1986) [S. V. Vonsovskii and E. A. Turov, *Dynamic and kinetic properties of magnets* (Nauka, Moscow, 1986)].
5. Е.А. Туров, *Кинетические, оптические и акустические свойства антиферромагнетиков* (УрО АН СССР, Свердловск, 1990) [E. A. Turov, *Kinetic, optic, and acoustic properties of antiferromagnets* (Sverdlovsk, USSR, 1990)] [in Russian].
6. Е. А. Туров, В. Г. Шавров, "О некоторых гальвано- и термомагнитных эффектах в антиферромагнетиках", ЖЭТФ **16**, 1606 (1963) [E. A. Turov and V. G. Shavrov, "On some galvano- and thermomagnetic effect in antiferromagnets", Sov. Phys. JETP **16**, 1606 (1963)].
7. T. Moriya, "Anisotropic Superexchange Interaction and Weak Ferromagnetism", Phys. Rev. Lett. **120**, 91 (1960).
8. L. Shekhtman, O. Entin-Wohlman, and A. Aharony, "Moriya s Anisotropic Superexchange Interaction, Frustration, and Dzyaloshinsky's Weak Ferromagnetism", Phys. Rev. Lett. **69**, 836 (1992).
9. I. V. Solovyev, "Magneto-optical effect in the weak ferromagnets $LaMO_3$ $M = Cr$, Mn, and Fe", Phys. Rev. B **55**, 8060 (1997).
10. L. Šmejkal, R. González-Hernández, T. Jungwirth, and J. Sinova, "Crystal time-reversal symmetry breaking and spontaneous Hall effect in collinear antiferromagnets", Sci. Adv. **6**, eaaz8809 (2020).
11. I. V. Solovyev, S. A. Nikolaev, and A. Tanaka, "Altermagnetism and Weak Ferromagnetism", arXiv:2503.23735 (2025).
12. M. Naka, S. Hayami, H. Kusunose , Y. Yanagi, Y. Motome, and H. Seo, "Anomalous Hall effect in κ-type organic antiferromagnets" Phys. Rev. B **102**, 075112 (2020).
13. V. A. Zyuzin, "Anomalous Hall effect in metallic collinear antiferromagnets with charge-density wave order", Phys. Rev. B **110**, 174426 (2024).
14. V. A. Zyuzin, "Metallic collinear antiferromagnets with mirror-symmetric and asymmetric spin-splittings", Phys. Rev. B **112**, 165104 (2025).
15. V. A. Zyuzin, "Magnon thermal Hall effect in collinear antiferromagnets", arXiv:2505.22317.
16. Y. Noda, K. Ohno, and S. Nakamura, "Momentum-dependent band spin splitting in semiconducting MnO_2: a density functional calculation", Phys. Chem. Chem. Phys. **18**, 13294 (2016).
17. T. Okugawa, K. Ohno, Y. Noda, and S. Nakamura, "Weakly spin-dependent band structures of antiferromagnetic perovskite $LaMO_3$ ($M = Cr$, Mn, Fe)", J. Phys.: Condens. Matter **30**, 075502 (2018).
18. S. Hayami, Y. Yanagi, and H. Kusunose, "Momentum-Dependent Spin Splitting by Collinear Antiferromagnetic Ordering", J. Phys. Soc. Jpn. **88**, 123702 (2019).
19. K.-H. Ahn, A. Hariki, K.-W. Lee, and J. Kuneš, "Antiferromagnetism in RuO_2 as d-wave Pomeranchuk instability", Phys. Rev. B **99**, 184432 (2019).
20. L.-D. Yuan, Z. Wang, J.-W. Luo, E. I. Rashba, and A. Zunger, "Giant momentum-dependent spin splitting in centrosymmetric low-Z antiferromagnets", Phys. Rev. B **102**, 144422 (2020).
21. S. Hayami, Y. Yanagi, and H. Kusunose, "Bottom-up design of spin-split and reshaped electronic band structures in antiferromagnets without spin-orbit coupling: Procedure on the basis of augmented multipoles", Phys. Rev. B **102**, 144441 (2020).
22. M. Naka, S. Hayami, H. Kusunose, Y. Yanagi, Y. Motome, and H. Seo, "Spin current generation in organic antiferromagnets", Nat. Commun. **110**, 4305 (2019).
23. B. Brekke, A. Brataas and A. Sudbø, "Two-dimensional altermagnets: Superconductivity in a minimal microscopic model", Phys. Rev. B **108**, 224421 (2023).
24. M. Roig, A. Kreisel, Y. Yu, B. M. Andersen, and D. F. Agterberg, "Minimal models for altermagnetism", Phys. Rev. B **110**, 144412 (2024).
25. Н. Ф. Харченко, А. В. Бибик, В. В. Еременко, "Квадратичное магнитное вращение плоскости поляризации света в антиферромагнетике CoF_2", Письма в ЖЭТФ **42**, 447, (1985) [N. F. Kharchenko, A. V. Bibik, and V. V. Eremenko, Pis'ma v ZhETF **42**, 447 (1985)].
26. V. V. Eremenko and N. F. Kharchenko, "Magneto-optics of antiferromagnets", Phys. Rep. **155**, 379, (1987).
27. D. L. Vorobev and V. A. Zyuzin, "*d*-wave Hall effect and linear magnetoconductivity in metallic collinear antiferromagnets", Phys. Rev. B **109**, L180411 (2024).
28. N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A. H. MacDonald, and N. P. Ong, "Anomalous Hall effect", Rev. Mod. Phys. **82**, 1539 (2010).
29. D. Xiao, M. C. Chang, and Q. Niu, "Berry phase effects on electronic properties", Rev. Mod. Phys. **82**, 1959 (2010).
30. D. Vanderbilt, *Berry Phases in Electronic Structure Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2018).
31. А. С. Боровик-Романов, "Пьезомагнетизм в антиферромагнитных фторидах кобальта и марганца", ЖЭТФ **38**(4), 1088 (1960).
32. А. С. Боровик-Романов, А. Н. Бажан, Н. М. Крейнес, "Слабый ферромагнетизм NiF_2", ЖЭТФ **64**(4), 1367 (1973) [A. S. Borovik-Romanov, A. N. Bazhan, and N. M. Kreines, "The weak ferromagnetism of NiF_2", JETP **37**(4), 695 (1973)].