Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 7, с. 481 – 488 © 2026 г. 10 апреля

Топологический переход в спектре скирмионного кристалла с одноосной анизотропией

В. Е. Тимофеев[+*1)], *Д. А. Бедяев*[+*], *Д. Н. Аристов*[*+]

[+] *Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 С.-Петербург, Россия*

[*] *НИЦ "Курчатовский институт" – ПИЯФ, 188300 Гатчина, Россия*

Поступила в редакцию 20 ноября 2025 г.
После переработки 23 февраля 2026 г.
Принята к публикации 2 марта 2026 г.

В работе исследуется зонная структура элементарных возбуждений скирмионного кристалла в тонкой ферромагнитной пленке с взаимодействием Дзялошинского–Мории и одноосной магнитной анизотропией во внешнем магнитном поле. В отсутствии анизотропии в спектре скирмионного кристалла происходит топологический переход: щель между дыхательной модой и модой вращения против часовой стрелки закрывается, при этом меняется знак кривизны Берри этих зон. В настоящей работе мы демонстрируем, что такой топологический переход существует в некоторой области значений одноосной анизотропии. Мы показываем, что значение магнитного поля топологического перехода выше в легкоплоскостной области фазовой диаграммы и ниже для анизотропии типа "легкая ось".

DOI: 10.7868/S3034576626040065

Введение. Магнитные скирмионы представляют собой квазидвумерные вихри локальной намагниченности. Существует несколько механизмов их стабилизации: взаимодействие Дзялошинского–Мории (ДМ) [1, 2], фрустрация [3, 4], обменное взаимодействие высоких порядков [5] и др. Ключевой особенностью скирмионов является топологический заряд – целочисленная характеристика, отражающая степень *закрученности* скирмиона [6]. Магнитные скирмионы являются ярким примером системы в физике конденсированных сред, чья нетривиальная топология влияет на ее физические свойства [7]. В присутствии скирмионов наблюдается дополнительный топологический вклад в холловскую проводимость электронов [8], магнонный тепловой эффект Холла [9] и др.

В присутствии асимметричного взаимодействия ДМ возникает диапазон значений внешнего магнитного поля, при котором скирмионы упорядочиваются в регулярную решетку, так называемый скирмионный кристалл (СкК) [1, 2]. Закрученная структура статической конфигурации скирмионов приводит к появлению специальных калибровочных потенциалов в уравнениях движения магнонов [10], поэтому зонная структура элементарных возбуждений в СкК также обладает нетривиальной топологией [11], проявляющейся в кривизне Берри и числах Черна [12, 13]. Зонная структура низкоэнергетических возбуждений СкК оказывается весьма сложной, в ней есть как топологически нетривиальные, так и тривиальные зоны [14, 15].

Ранее было показано, что в модели двумерного ферромагнетика с взаимодействием ДМ, во внешнем магнитном поле, в зонной структуре СкК происходит топологический переход [16]. Щель между дыхательной (Br) и модой вращения против часовой стрелки (CCW) в центре зоны Бриллюэна закрывается с ростом магнитного поля. Открытие щели с последующим увеличением поля сопровождается изменением чисел Черна этих зон [17]. В экспериментах наблюдается тенденция к уменьшению щели между Br и CCW модами [18, 19], однако полное закрытие щели экспериментально до сих пор не наблюдалось [20, 21]. Топологический переход в спектре возбуждений СкК должен оказывать существенное влияние на тепловой транспорт магнонов в образце [9], а также приводить к появлению краевых магнонных состояний в системе [16].

В данной работе мы исследуем влияние одноосной магнитной анизотропии на такой топологический переход. Вначале мы кратко обсуждаем исследуемую модель и используемые методы. Затем мы находим оптимальную статическую конфигурацию СкК, вычисляем спектр и определяем волновые функции элементарных возбуждений, анализируем тензор однородной восприимчивости. Мы показываем, что пере-

1)e-mail: viktor.timofeev@spbu.ru

сечение Br и CCW ветвей сопровождается изменением знака кривизны Берри, и находим положение топологического перехода на фазовой диаграмме. В конце работы мы приводим основные выводы.

Модель. Мы исследуем модель тонкой ферромагнитной пленки с взаимодействием ДМ и одноосной анизотропией во внешнем магнитном поле, направленном перпендикулярно пленке, с плотностью энергии

$$\mathcal{E} = \frac{C}{2}(\nabla \mathbf{S})^2 + D(\mathbf{S}, \nabla \times \mathbf{S}) - BS_z + AS_z^2\,, \quad (1)$$

где C – обменная жесткость, D – константа взаимодействия ДМ, величина B пропорциональна внешнему магнитному полю, а A – константа анизотропии. Мы рассматриваем случай низких температур, когда локальная намагниченность насыщена, $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, а ее направление не меняется в толщине пленки.

Введем естественную для модели (1) систему единиц, в которой длина измеряется в единицах $l = D/C$, а плотность энергии – в единицах $CS^2l^{-2} = S^2D^2/C$. Также удобно объединить два последних члена в выражении (1) в полный квадрат и отсчитывать плотность энергии от значения $-B^2/4A$. При этом модель (1) примет следующий вид:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{n})^2 + (\mathbf{n}, \nabla \times \mathbf{n}) + a\left(n_z - \frac{b}{2a}\right)^2, \quad (2)$$

где $b = BC/SD^2$ и $a = AC/D^2$ – безразмерные параметры. Конфигурация локальной намагниченности, соответствующая основному состоянию (2), зависит от этих двух параметров. Мы предполагаем, что $b > 0$, в то время как знак a может меняться. Анизотропии типа *легкая ось* для $a < 0$ и *легкая плоскость* $a > 0$ соответственно.

Модель (1) хорошо известна, ее фазовая диаграмма при $T = 0$ обсуждается в работах [22–24]. Было показано, что для фиксированного значения a с увеличением параметра b оптимальная конфигурация локальной намагниченности $\mathbf{S}$, отвечающая минимуму энергии, последовательно описывается магнитной спиралью, СкК и однородной конфигурацией. Такая последовательность фаз наблюдается в широком диапазоне умеренных значений a, но не наблюдается для сильной анизотропии типа "легкая ось", $a < -1.2$, когда для любых значений b формируется лишь однородная конфигурация, а также при сильной анизотропии типа "легкая плоскость", $a \gtrsim 2b > 1$, когда может реализовываться СкК с квадратной решеткой. В настоящей работе мы обсуждаем область умеренной анизотропии.

Подход стереографической проекции. Для построения СкК мы будем использовать подход стереографической проекции:

$$n_x + i\,n_y = \frac{2f}{1 + f\bar{f}}\,, \quad n_z = \frac{1 - f\bar{f}}{1 + f\bar{f}}\,, \quad (3)$$

где f – комплекснозначная функция, зависящая от пространственных координат x и y. Ранее нами было показано, что оптимальная конфигурация нескольких скирмионов может быть с хорошей точностью приближена суммой стереографических функций отдельных скирмионов [25, 26], $f_{\text{multi}}(\mathbf{r}) = \sum_j f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$, с правильно подобранным стереографическим образом отдельного скирмиона, $f_1(\mathbf{r})$.

Стереографическая функция $f_1(\mathbf{r})$ имеет единственный полюс первого порядка в центре скирмиона и быстро убывает на расстояниях, превышающих размер скирмиона. Такую профильную функцию можно найти численно с любой наперед заданной точностью, см. [24], но для простоты можно использовать подходящие пробные функции, описывающие профиль отдельных скирмионов. В настоящей работе мы используем хорошо известную профильную функцию, так называемый анзац 2π доменной стенки:

$$\theta_1(r) = \sum_{+-} \arcsin\left(\tanh\frac{-r \pm R}{\delta}\right) + \pi, \quad (4)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, R определяет радиус скирмиона, а δ – ширина доменной стенки. Тогда намагниченность одиночного блоховского скирмиона, расположенного в начале координат, выражается следующим образом: $\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (-y\sin\theta_1(r)/r, x\sin\theta_1(r)/r, \cos\theta_1(r))$. Профильная функция (4) используется как для описания экспериментальных профилей отдельных магнитных скирмионов [27], так и для построения теории изолированных скирмионов [28].

Стереографическая функция блоховского скирмиона с профильной функцией (4) дается следующим выражением:

$$f_1 = \frac{i\cosh R/\delta}{\bar{z}} \times \frac{\sqrt{z\bar{z}}}{\sinh\sqrt{z\bar{z}}/\delta}\,, \quad (5)$$

где $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$. Заметим, что радиус скирмиона, R_{sk}, определяемый условием $|f_1(\mathbf{r})| = 1$, находится из уравнения: $\sinh R_{sk}/\delta = \cosh R/\delta$.

Используя образ (5), стереографическая функция СкК строится следующим образом: $f_{SkX}(\mathbf{r}) = \sum_{m_j} f_1(\mathbf{r} - m_1\mathbf{a}_1 - m_2\mathbf{a}_2)$, где $\mathbf{a}_1 = d\,\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}d\,\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}d\,\mathbf{e}_y$ – вектора элементарных трансляций треугольной решетки, m_j – целые. В этом случае плотность энергии СкК зависит от трех параметров: d, R и δ. Оптимальная конфигурация находится путем минимизации для каждой пары a и b величины $\frac{1}{v}\int_{\rm cell} d\mathbf{r}\,\mathcal{E}$, где v – площадь элементарной ячейки двумерной решетки. Фазовая диаграмма, полученная с использованием такой процедуры, качественно и количественно согласуется с результатами предыдущих исследований [22–24] для интересующего нас диапазона параметров, см. рис. 1.

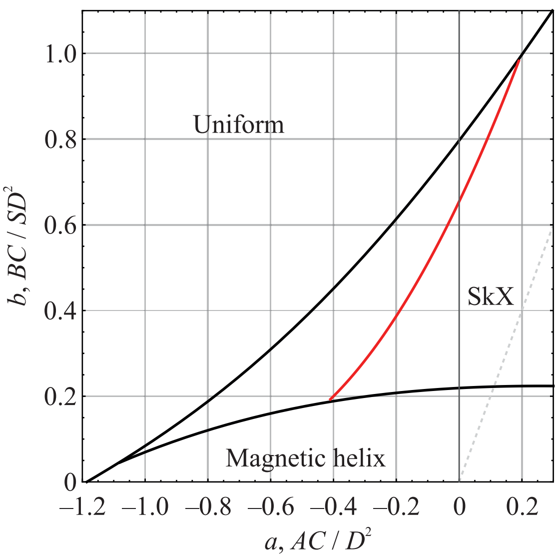

Рис. 1. (Цветной онлайн) Исследуемая область фазовой диаграммы модели (2). Черные линии обозначают границы трех фаз: однородной конфигурации, СкК и магнитной спирали. Красная линия соответствует топологическому переходу в спектре, когда резонансные частоты Br и CCW мод совпадают в центре зоны Бриллюэна. Серая пунктирная линия соответствует прямой $b = 2a$

Квазиклассическая динамика низкоэнергетических возбуждений. Динамика локальной намагниченности описывается известным уравнением Ландау–Лифшица (ЛЛ), которое можно рассматривать как уравнение Эйлера–Лагранжа с соответствующим кинетическим членом, $\mathcal{T}$, в лагранжиане: $L(f,\bar f,\partial_t f,\partial_t \bar f) = \int d\mathbf{r}(\mathcal{T}-\mathcal{E})$.

В подходе стереографической проекции кинетический член можно представить как [29]:

$$\mathcal{T} = \frac{i}{2}\frac{\bar f\partial_t f - f\partial_t \bar f}{1+f\bar f}, \tag{6}$$

где гиромагнитное отношение, фигурирующее в уравнении ЛЛ, включено в определение времени t.

Подход к исследованию динамики низкоэнергетических возбуждений топологических солитонов хорошо известен, см., например, [30, 31]. В нашем случае мы рассматриваем инфинитезимальные, зависящие от времени, флуктуации стереографической функции в следующей форме:

$$f(\mathbf{r},t) = f_0(\mathbf{r}) + (1+f_0(\mathbf{r})\bar f_0(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r},t)/\sqrt{2S}\,, \tag{7}$$

где $f_0(\mathbf{r})$ – статическая равновесная конфигурация стереографической функции. Множитель $1/\sqrt{2S}$ обеспечивает выполнение правильных коммутационных соотношений для компонент локальной намагниченности, см. [32]. Мы также предполагаем, что $1/\sqrt{2S}$ – малый параметр, позволяющий нам рассмотреть формальное разложение плотности лагранжиана: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1/\sqrt{2S} + \mathcal{L}_2/2S + O(S^{-3/2})$, где член $\mathcal{L}_0$ не зависит от времени, а $\mathcal{L}_1$ обращается в ноль, когда $f_0(\mathbf{r})$ обеспечивает минимум энергии. Член $\mathcal{L}_2$ представляет собой квадратичную форму по $\psi(t)$ и $\bar\psi(t)$ и описывает линейную теорию спиновых волн:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\bar\psi, & \psi\end{pmatrix}\left(i\begin{pmatrix}\partial_t & 0\\ 0 & -\partial_t\end{pmatrix} - \hat{\mathcal{H}}\right)\begin{pmatrix}\psi\\ \bar\psi\end{pmatrix}, \tag{8}$$

с оператором Гамильтона $\hat{\mathcal{H}}$ следующего вида

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix}(-i\nabla+\mathbf{A})^2+U & V\\ V^* & (i\nabla+\mathbf{A})^2+U\end{pmatrix}, \tag{9}$$

с $\nabla = \mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y$. Здесь U, V и $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y$ – громоздкие функции статической конфигурации $f_0(\mathbf{r})$ и ее производных, они приводятся в [13].

Лагранжиан (8) приводит к уравнению Эйлера–Лагранжа

$$-i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\psi\\ \bar\psi\end{pmatrix} = \sigma_3\hat{\mathcal{H}}\begin{pmatrix}\psi\\ \bar\psi\end{pmatrix}, \tag{10}$$

а энергии нормальных мод, ϵ_n, определяются из

$$\left(\epsilon_n\,\sigma_3 - \hat{\mathcal{H}}\right)\begin{pmatrix}u_n\\ v_n\end{pmatrix} = 0\,, \tag{11}$$

где σ_3 – матрица Паули. Характеристическое уравнение (11) является уравнением на коэффициенты Боголюбова u_n, v_n, удовлетворяющие соотношению ортогональности $\int d\mathbf{r}\,(u_n^* u_m - v_n^* v_m) = \delta_{nm}$, подробнее см. [13].

Для случая СкК нормальные моды уравнения (11) можно искать в виде блоховских функций:

$$\Psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\begin{pmatrix}u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})\\ v_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})\end{pmatrix} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}\sum_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}}\begin{pmatrix}u_{\mathbf{Q}}(\mathbf{k})\\ v_{\mathbf{Q}}(\mathbf{k})\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где $\mathbf{k}$ лежит в первой зоне Бриллюэна, а суммирование ведется по векторам обратной решетки СкК,

$\mathbf{Q} = n\mathbf{b}_1 + m\mathbf{b}_2$, с элементарными векторами $\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{d}\mathbf{e}_x - \frac{2\pi}{\sqrt{3}d}\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{b}_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}d}\mathbf{e}_y$. Нас интересует топологический переход между низколежащими ветвями спектра СкК, проявляющийся в закрытии щели между CCW и Br модами в точке Г, который ранее наблюдался в модели без анизотропии, $a = 0$, см. [17]. Для этого мы проанализируем тензор однородной динамической восприимчивости [32], и найдем те значения a и b, для которых резонансные частоты интересующих нас веток пересекаются.

Квантование намагниченности и тензор восприимчивости. Разложение стереографической функции вида (7) приводит к следующей форме локальной намагниченности:

$$S_i = Sn_i + \sqrt{S/2}(\bar{F}_i\psi + F_i\bar{\psi}) + O(1), \tag{13}$$

где индекс $i = 1, 2, 3$, а ψ и $\bar{\psi}$ раскладываются по базису нормальных мод (10). Комплексный вектор $\mathbf{F}$ выражается через статическую стереографическую функцию f_0:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{1 + f_0\bar{f}_0}\begin{pmatrix} 1 - f_0^2 \\ i(1 + f_0^2) \\ -2f_0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Три вектора, Re $\mathbf{F}$, Im $\mathbf{F}$ и $\mathbf{n}$, формируют локальный ортонормированный базис в любой точке $\mathbf{r}$ на плоскости.

Тензор восприимчивости $\chi_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \int dt\, e^{i\omega t}\chi_{ij}(\mathbf{k},t)$ является Фурье преобразованием от запаздывающей спиновой функции Грина:

$$\chi_{ij}(\mathbf{k},t) = -i\theta(t)\langle[S_i(\mathbf{k},t), S_j(-\mathbf{k},0)]\rangle. \tag{15}$$

Как было указано выше, нас интересует случай $\mathbf{k} = 0$. Тогда тензор восприимчивости принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\chi_{ij}(\omega) &= \chi_{\|}\hat{h}_i\hat{h}_j + \chi_{\perp}(\delta_{ij} - \hat{h}_i\hat{h}_j) + \chi_{as}\epsilon_{ijk}\hat{h}_k, \\
\chi_{\|} &= \sum_n \frac{\epsilon_n S\,|A_{3,n}|^2}{-(\omega + i\delta)^2 + \epsilon_n^2}, \\
\chi_{\perp} &= \sum_n \frac{\epsilon_n S\,|A_{1,n}|^2}{-(\omega + i\delta)^2 + \epsilon_n^2}, \\
\chi_{as} &= \sum_n \frac{i\omega S\,\mathrm{Im}(A_{1,n}\bar{A}_{2,n})}{-(\omega + i\delta)^2 + \epsilon_n^2},
\end{aligned} \tag{16}$$

где вектор $\hat{h} = (0, 0, 1)$ направлен перпендикулярно пленке, индекс суммирования n соответствует n-ой ветви спектра, а элементы матрицы в числителях определены следующим образом:

$$A_{j,n} = \int d\mathbf{r}\,(\bar{F}_j u_n + F_j v_n). \tag{17}$$

Ветви с различной симметрией волновых функций вносят разный вклад в компоненты восприимчивости. Дыхательная мода проявляется в продольной компоненте, $\chi_{\|}$, тогда как CW и CCW моды вносят вклад в поперечную компоненту, $\chi_{\perp}$; разница между последними двумя модами заключается в знаке мнимой части произведения, $\mathrm{Im}(A_{1,n}\bar{A}_{2,n})$. Таким образом, анализируя резонансы в $\chi_{\|}$, $\chi_{\perp}$, χ_{as}, мы определяем энергию и тип возбуждений. Для удобства читателя конфигурации возбужденных состояний схематически показаны на рис. 2.

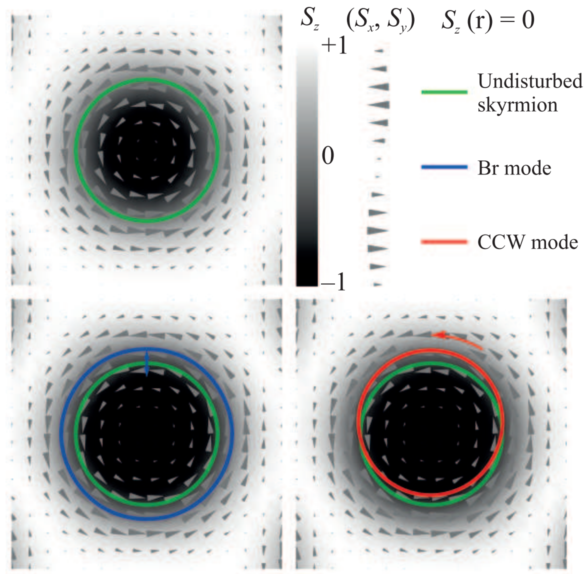

Рис. 2. (Цветной онлайн) Иллюстрации равновесной скирмионной конфигурации (левая верхняя панель), а также конфигураций, возмущенных Br и CCW модами (нижние левая и правая панели). Черно-белый градиент изображает проекцию намагниченности вне плоскости, а серые стрелки показывают намагниченность в плоскости. Цветные линии соответствуют условию $S_z = 0$ для всех трех конфигураций

Топология зонной структуры. Мы записываем блоховские состояния, ур. (12), относящиеся к n-й зоне, в следующем виде: $\Psi_{n\mathbf{k}} = e^{i\mathbf{kr}}\mathcal{V}_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$. Предполагая, что $\mathcal{V}_{n\mathbf{k}}$ есть гладкая функция $\mathbf{k}$, мы используем следующее выражение для связности Берри

$$\mathcal{A}_n^{\mu}(\mathbf{k}) = -\langle\mathcal{V}_{n\mathbf{k}}|\, i\partial_\mu\, |\mathcal{V}_{n\mathbf{k}}\rangle, \tag{18}$$

где $\partial_\mu = \partial/\partial k_\mu$, а скалярное произведение имеет вид:

$$\langle\mathcal{V}_{n\mathbf{k}}|\mathcal{V}_{n\mathbf{k}'}\rangle = \sum_{\mathbf{Q}}\left(u_{\mathbf{Q}}^*(\mathbf{k})u_{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}') - v_{\mathbf{Q}}^*(\mathbf{k})v_{\mathbf{Q}}(\mathbf{k}')\right).$$

Тогда кривизна Берри равна

$$\Omega_n(\mathbf{k}) = \partial_x\mathcal{A}_n^y(\mathbf{k}) - \partial_y\mathcal{A}_n^x(\mathbf{k}). \tag{19}$$

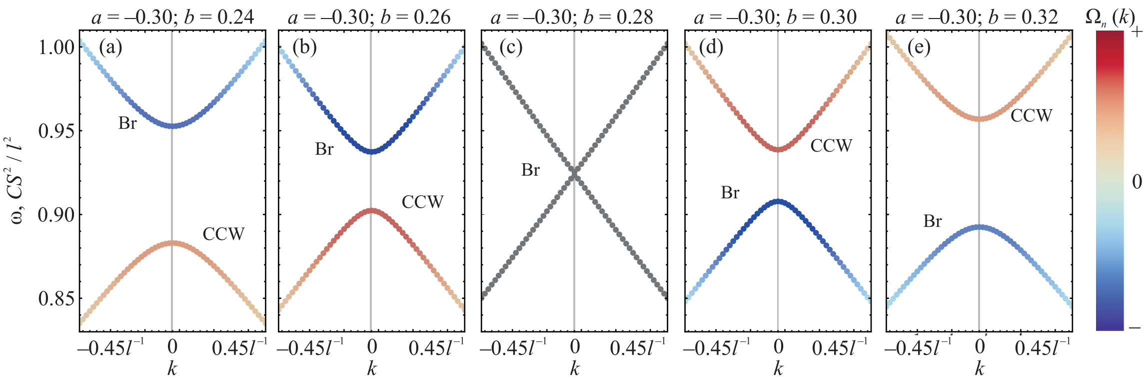

Рис. 3. (Цветной онлайн) На панелях (a)–(e) изображена эволюция зон Br и CCW мод для небольшой анизотропии типа “легкая ось”, $a = -0.3$, и $b \in [0.24, 0.32]$. Щель закрывается при $b = 0.28$. Знак кривизны Берри для каждой полосы обозначен цветом: синие точки соответствуют отрицательному знаку, а желто-красные точки – положительному. Аналогичная картина изменения знака кривизны Берри наблюдается вдоль всей красной линии на рис. 1

Интеграл по зоне Бриллюэна, $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{BZ}\Omega_n(\mathbf{k})$, является целым числом для каждой зоны и называется числом Черна.

Результаты. Мы вычислили энергии и волновые функции (11) двадцати низколежащих возбуждений СкК во всем диапазоне значений a и b, показанном на рис. 1. Для каждой ветви спектра мы проанализировали структуру однородного тензора восприимчивости (15) и построили на фазовой диаграмме, рис. 1, кривую, вдоль которой совпадают характерные частоты Br и CCW мод. Закрытие щели в центре зоны Бриллюэна происходит в диапазоне $-0.4 \lesssim a \lesssim 0.2$, при этом поле перехода $b_{tt}(a)$ монотонно увеличивается с ростом a.

Мы подтвердили, что закрытие щели сопровождается изменением знака кривизны Берри (19) соответствующих зон. На рисунке 3 показана эволюция структуры зон вблизи точки Γ для значения анизотропии $a = -0.3$. Аналогичное поведение кривизны Берри наблюдается во всем диапазоне $-0.4 \lesssim a \lesssim 0.2$ при пересечении b_{tt}.

Вообще говоря, зонная структура возбуждений СкК состоит из большого количества веток, включая плоские зоны [11, 12], энергия которых быстро растет с ростом магнитного поля. Когда такие плоские зоны не перекрываются с дисперсионными, мы можем легко вычислить их кривизну Берри и убедиться, что плоские зоны топологически тривиальны [13]. Однако в случае пересечения топологически тривиальных и нетривиальных зон вычисление характеристик отдельных зон затруднено, и более целесообразным становится исследовать так называемые многозонные топологические характеристики: связность и кривизну Берри [33], этот вопрос мы обсудим более подробно в следующих работах.

Обсуждение. Насколько нам известно, топологический переход в спектре возбуждений СкК пока не наблюдался экспериментально. Стоит отдельно обсудить, почему он не наблюдался, и как наши результаты соотносятся с экспериментальными данными.

Скирмионная фаза в объемных образцах соединений типа B20, таких как MnSi, $Fe_{1-x}Ge_x$, Cu_2OSeO_3 и др., наблюдается вблизи критической температуры в узком диапазоне магнитных полей, $0.4 \lesssim H/H_{c2} \lesssim 0.6$ [19]. Одноосная анизотропия в этих системах либо отсутствует, либо пренебрежимо мала. В то же время для образцов геометрии плоского диска диполь-дипольное взаимодействие в непрерывном пределе может эффективно заменяться анизотропией типа “легкая плоскость”. Последний случай соответствует $a \gtrsim 0$ на рис. 1, когда поле топологического перехода выше $0.6H_{c2}$. Следовательно, в таких системах щель не закрывается, хотя регулярно наблюдается тенденция к сближению резонансных частот с ростом магнитного поля [14, 18–20, 34, 35]. Отметим, что эта тенденция сохраняется даже в метастабильных низкотемпературных скирмионных фазах в Cu_2OSeO_3 [21].

Другой класс систем, в которых наблюдаются СкК – это многослойные гетероструктуры из тонких ферромагнитных пленок и тяжелых металлов Ir/Fe/Co/Pt, Pt/FeCoB и др. В таких системах возникает поверхностное взаимодействие ДМ и наблюдаются скирмионы неелевского типа. В таких системах решающую роль в стабилизации скирмионов играет анизотропия типа “легкая ось”. Эксперименты по поглощению микроволнового излучения показывают наличие как низкочастотных, так и высокочастотных CCW мод в ГГц диапазоне, тогда как численное моделирование демонстрирует обратный порядок Br и CCW мод [36–38], что соответствует случаю $a < -0.4$ в нашей модели, ур. (2).

Еще одна система со значительным вкладом анизотропии типа "легкая ось" – полярный магнитный полупроводник GaV_4S_8, в котором при низких температурах образуется стабильная решетка скирмионов неелевского типа. В работе [39] было показано, что ветвь Br моды в этом соединении лежит ниже ветви CCW моды во всем диапазоне магнитных полей. Для всех указанных в работе полей диапазон частот Br и CCW мод в вышеупомянутых системах варьируется от 2 до 4 ГГц для Cu_2OSeO_3 и от 5 до 8 ГГц для GaV_4S_8.

В низкотемпературной скирмионной фазе (НТСФ) Cu_2OSeO_3 было обнаружено изменение порядка характеристических резонансных частот Br и CCW мод [40]. Было показано, что кубическая анизотропия играет существенную роль в стабилизации этой фазы, одновременно приводя к гибридизации Br и октупольной мод. В результате эксперимент показал резкое изменение резонансной частоты Br моды: $\epsilon_{Br} > \epsilon_{CCW}$ – для $H/H_{c2} < 0.6$ и $\epsilon_{Br} < \epsilon_{CCW}$ – для $H/H_{c2} > 0.6$; это косвенно указывает на топологический переход. Изменение топологических свойств каждой ветки не обсуждалось и требует дальнейшего исследования.

Заключение. Мы изучили спектр низкоэнергетических возбуждений СкК в тонкой ферромагнитной пленке с взаимодействия ДМ, одноосной анизотропией во внешнем магнитном поле. В подходе стереографической проекции при помощи анзаца 2π доменных стенок для отдельных скирмионов мы построили оптимальную конфигурацию СкК в широком диапазоне параметров модели.

Вычисляя дисперсию и волновые функции низкоэнергетических возбуждений в СкК, мы изучили условия закрытия щели между Br и CCW ветками спектра, наблюдаемыми в экспериментах. Мы показали, что на фазовой диаграмме величина магнитного поля, при котором щель закрывается, растет с изменением константы одноосной анизотропии из области типа "легкая ось" в область типа "легкая плоскость".

Мы проанализировали волновые функции возбуждений Br и CCW вблизи центра первой зоны Бриллюэна и показали, что закрытие щели сопровождается изменением знака кривизны Берри для каждой из зон. Продемонстрировано, что топологические свойства возбуждений в СкК сильно зависят от параметров модели и могут контролироваться внешним магнитным полем и величиной одноосной анизотропии. Полученные результаты находятся в согласии с экспериментальными наблюдениями и с соответствующими расчетами и моделированием.

Мы надеемся, что наше исследование способствует дальнейшим экспериментальным и теоретическим исследованиям динамики СкК в системах с умеренной одноосной анизотропией типа "легкая ось", где топологический переход может наблюдаться напрямую в магниторезонансных экспериментах. Отметим, что обсуждаемый переход также влияет и на другие свойства СкК, в частности, он должен оказывать влияние на тепловой эффект Холла и приводить к возникновению краевых магнонных состояний.

Финансирование работы. Работа поддержана Российским научным фондом, грант # 24-72-00083. Работа В. Е. Тимофеева и Д. Н. Аристова также частично поддержана Фондом развития теоретической физики и Математики "БАЗИС".

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. N. Bogdanov and D. Yablonskii, "Thermodynamically stable "vortices" in magnetically ordered crystals. The mixed state of magnets", ZhETF **95**, 178 (1989).
2. A. Bogdanov and A. Hubert, "Thermodynamically stable magnetic vortex states in magnetic crystals", Journal of Magnetism and Magnetic Materials **138**, 255 (1994).
3. O. I. Utesov, Thermodynamically stable skyrmion lattice in a tetragonal frustrated antiferromagnet with dipolar interaction, Phys. Rev. B **103**, 064414 (2021).
4. O. I. Utesov, "Mean-field description of skyrmion lattice in hexagonal frustrated antiferromagnets", Phys. Rev. B **105**, 054435 (2022).
5. S. Paul, S. Haldar, S. von Malottki, and S. Heinze, "Role of higher-order exchange interactions for skyrmion stability", Nat. Commun. **11**, 4756 (2020).
6. A. A. Belavin and A. M. Polyakov, "Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets", JETP Lett. **22**, 245 (1975).
7. A. Fert, N. Reyren, and V. Cros, "Magnetic skyrmions: advances in physics and potential applications", Nat. Rev. Mater. **2**, 1 (2017).
8. B. Göbel, A. Mook, J. Henk, and I. Mertig, "The family of topological hall effects for electrons in skyrmion crystals", Eur. Phys. J. B **91**, 179 (2018).
9. M. Akazawa, H.-Y. Lee, H. Takeda, Y. Fujima, Y. Tokunaga, T.-h. Arima, J. H. Han, and M. Yamashita, "Topological thermal hall effect of magnons in magnetic skyrmion lattice", Phys. Rev. Research **4**, 043085 (2022).

10. C. Schütte and M. Garst, “Magnon-skyrmion scattering in chiral magnets”, Phys. Rev. B **90**, 094423 (2014).
11. A. Roldán-Molina, A. S. Nunez, and J. Fernández Rossier, “Topological spin waves in the atomic-scale magnetic skyrmion crystal”, New J. Phys. **18**, 045015 (2016).
12. M. Garst, J. Waizner, and D. Grundler, “Collective spin excitations of helices and magnetic skyrmions: review and perspectives of magnonics in non-centrosymmetric magnets”, J. Phys. D: Appl. Phys. **50**, 293002 (2017).
13. V.E. Timofeev and D.N. Aristov, “Magnon band structure of skyrmion crystals and stereographic projection approach”, Phys. Rev. B **105**, 024422 (2022).
14. T. Weber, D.M. Fobes, J. Waizner et al. (Collaboration), “Topological magnon band structure of emergent Landau levels in a skyrmion lattice”, Science **375**, 1025 (2022).
15. D. Ghader and B. Jabakhanji, “Momentum-space theory for topological magnons in two-dimensional ferromagnetic skyrmion lattices”, Phys. Rev. B **110**, 184409 (2024).
16. S.A. Díaz, T. Hirosawa, J. Klinovaja, and D. Loss, “Chiral magnonic edge states in ferromagnetic skyrmion crystals controlled by magnetic fields”, Phys. Rev. Research **2**, 013231 (2020).
17. V.E. Timofeev, Y.V. Baramygina, and D.N. Aristov, “Magnon topological transition in skyrmion crystal”, JETP Lett. **118**, 911 (2023).
18. Y. Onose, Y. Okamura, S. Seki, S. Ishiwata, and Y. Tokura, “Observation of magnetic excitations of skyrmion crystal in a helimagnetic Insulator Cu_2OSeO_3”, Phys. Rev. Lett. **109**, 037603 (2012).
19. T. Schwarze, J. Waizner, M. Garst, A. Bauer, I. Stasinopoulos, H. Berger, C. Pfleiderer, and D. Grundler, “Universal helimagnon and skyrmion excitations in metallic, semiconducting and insulating chiral magnets”, Nat. Mater. **14**, 478 (2015).
20. Y. Okamura, F. Kagawa, M. Mochizuki, M. Kubota, S. Seki, S. Ishiwata, M. Kawasaki, Y. Onose, and Y. Tokura, “Microwave magnetoelectric effect via skyrmion resonance modes in a helimagnetic multiferroic”, Nat. Commun. **4**, 1 (2013).
21. R. Takagi, M. Garst, J. Sahliger, C.H. Back, Y. Tokura, and S. Seki, “Hybridized magnon modes in the quenched skyrmion crystal”, Phys. Rev. B **104**, 144410 (2021).
22. S. Banerjee, J. Rowland, O. Erten, and M. Randeria, “Enhanced stability of skyrmions in two-dimensional chiral magnets with rashba spin-orbit coupling”, Phys. Rev. X **4**, 031045 (2014).
23. S.-Z. Lin, A. Saxena, and C.D. Batista, “Skyrmion fractionalization and merons in chiral magnets with easy-plane anisotropy”, Phys. Rev. B **91**, 224407 (2015).
24. U. Güngördü, R. Nepal, O.A. Tretiakov, K. Belashchenko, and A.A. Kovalev, “Stability of skyrmion lattices and symmetries of quasi-two-dimensional chiral magnets”, Phys. Rev. B **93**, 064428 (2016).
25. V.E. Timofeev, A.O. Sorokin, and D.N. Aristov, “Towards an effective theory of skyrmion crystals”, JETP Lett. **109**, 207 (2019).
26. V.E. Timofeev, A.O. Sorokin, and D.N. Aristov, “Triple helix versus skyrmion lattice in two-dimensional noncentrosymmetric magnets”, Phys. Rev. B **103**, 094402 (2021).
27. N. Romming, A. Kubetzka, C. Hanneken, K. von Bergmann, and R. Wiesendanger, “Field-dependent size and shape of single magnetic skyrmions”, Phys. Rev. Lett. **114**, 177203 (2015).
28. F. Büttner, I. Lemesh, and G.S.D. Beach, “Theory of isolated magnetic skyrmions: From fundamentals to room temperature applications”, Sci. Rep. **8**, 4464 (2018).
29. K.L. Metlov, “Vortex mechanics in planar nanomagnets”, Phys. Rev. B **88**, 014427 (2013).
30. R. Rajaraman, *Solitons and instantons* (North Holland, Amsterdam, N.Y., Oxford, 1982).
31. V.A. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002).
32. V.E. Timofeev and D.N. Aristov, “Dynamic susceptibility of skyrmion crystal”, JETP Lett. **117**, 676 (2023).
33. D. Vanderbilt, *Berry Phases in Electronic Structure Theory: Electric Polarization, Orbital Magnetization and Topological Insulators* (Cambridge University Press, Cambridge, 2018).
34. S. Seki, M. Garst, J. Waizner, R. Takagi, N.D. Khanh, Y. Okamura, K. Kondou, F. Kagawa, Y. Otani, and Y. Tokura, “Propagation dynamics of spin excitations along skyrmion strings”, Nat. Commun. **11**, 1 (2020).
35. P. Che, R. Ciola, M. Garst, V. Kravchuk, P.R. Baral, A. Magrez, H. Berger, T. Schönenberger, H.M. Rønnow, and D. Grundler, “Short-wave magnons with multipole spin precession detected in the topological bands of a skyrmion lattice”, Commun. Mater. **6**, 139 (2025);
36. V.L. Zhang, C.G. Hou, K. Di, H.S. Lim, S.C. Ng, S.D. Pollard, H. Yang, and M.H. Kuok, “Eigenmodes of néel skyrmions in ultrathin magnetic films”, AIP Adv. **7**, 055212 (2017).
37. B. Satywali, V.P. Kravchuk, L. Pan, M. Raju, S. He, F. Ma, A.P. Petrović, M. Garst, and C. Panagopoulos, “Microwave resonances of magnetic skyrmions in thin film multilayers”, Nat. Commun. **12**, 1909 (2021);
38. T. Srivastava, Y. Sassi, F. Ajejas, A. Vecchiola, I. Ngouagnia Yemeli, H. Hurdequint, K. Bouzehouane, N. Reyren, V. Cros, T. Devolder, J.-V. Kim, and G. de Loubens, “Resonant dynamics of three-dimensional skyrmionic textures in thin film multilayers”, APL Mater. **11**, 061110 (2023).

39. D. Ehlers, I. Stasinopoulos, V. Tsurkan, H.-A. Krug von Nidda, T. Fehér, A. Leonov, I. Kézsmárki, D. Grundler, and A. Loidl, "Skyrmion dynamics under uniaxial anisotropy", Phys. Rev. B **94**, 014406 (2016).

40. A. Aqeel, J. Sahliger, T. Taniguchi, S. Mändl, D. Mettus, H. Berger, A. Bauer, M. Garst, C. Pfleiderer, and C. H. Back, "Microwave spectroscopy of the low-temperature skyrmion state in Cu_2OSeO_3", Phys. Rev. Lett. **126**, 017202 (2021).