Уменьшение систематической ошибки считывания оптических кубитов на ионах ^{171}Yb^{+} с использованием микроволновой накачки

Ю. П. Аносов[1], *А. С. Борисенко, И. В. Заливако, Н. В. Семенин, И. А. Семериков, К. Ю. Хабарова, Н. Н. Колачевский*

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 14 февраля 2026 г.
После переработки 14 февраля 2026 г.
Принята к публикации 19 февраля 2026 г.

В данной работе экспериментально продемонстрировано повышение достоверности считывания оптического кубита в ионе ^{171}Yb^{+} за счет добавления перед измерением этапа микроволновой накачки. Добавление микроволнового π-импульса между сверхтонкими компонентами основного состояния иона перед считыванием позволяет избежать фазы оптической накачки в начале измерения, которая приводит к возникновению систематической ошибки определения состояния. В работе были экспериментально подтверждены выводы теоретической модели процесса считывания и продемонстрировано улучшение точности считывания с 98.98 ± 0.10 % до 99.48 ± 0.07 %.

DOI: 10.7868/S3034576626040109

1. Введение. В настоящее время задача по созданию квантового компьютера, вычислительной мощности которого будет достаточно для решения прикладных задач, является чрезвычайно актуальной. Интерес к разработке обусловлен тем, что квантовый компьютер с достаточным числом кубитов и точностью операций сможет быстро выполнять ряд задач, для выполнения которых классическому компьютеру понадобится существенно большее количество времени или памяти [1–4]. Разрабатываются компьютеры на различных физических платформах, в том числе: компьютеры на фотонных системах [5], на полупроводниковых квантовых точках [6], на сверхпроводящих кубитах [7], на нейтральных атомах [8], на ионах в радиочастотных ловушках. Основные достоинства ионных систем – высокое время когерентности, которое может достигать часа [9], и достоверность двухкубитных операций, которая в ряде случаев достигает 99.99 % [10].

Одна из важных процедур, без которой невозможно функционирование квантового компьютера, – это считывание состояния регистра кубитов в конце каждого запуска алгоритма. Ошибки считывания могут приводить к существенному искажению результатов вычислений. Достоверность считывания состояния регистра из n кубитов имеет степенную зависимость от достоверности считывания состояния одного кубита. Так, для 50-кубитного квантового компьютера улучшение достоверности считывания состояния одного кубита с 99 до 99.5 % будет соответствовать улучшению достоверности считывания состояния регистра с 61 до 78 %. Несмотря на то, что существуют методы, позволяющие скорректировать ошибки регистрации состояния кубитов [11, 12], они требуют увеличения числа запусков квантовых цепочек, а значит – увеличения длительности вычислений. Таким образом, увеличение достоверности считывания позволяет сократить вычислительное время на квантовом процессоре. Кроме считывания состояния регистра кубитов в конце вычисления, для выполнения устойчивых к ошибкам квантовых операций также необходимы промежуточные измерения (“midcircuit measurements”) – считывания состояний вспомогательных кубитов для получения сигнала ошибки и коррекции ошибок непосредственно в процессе вычислений [13]. В этом случае достоверность считывания будет напрямую влиять на эффективность реализации кодов коррекции ошибок. Достоверность считывания одного кубита в коммерчески доступных ионных квантовых обычно соствляет порядка 99.5 % [14, 15], а рекордное значение, полученное для иона ^{40}Ca^{+}, составляет 99.991 % [16].

Нами был создан прототип квантового компьютера на ионах ^{171}Yb^{+} в радиочастотной ловушке [17, 18]. Была реализована система, где в каждом ионе кодируется кубит в состояниях $|0\rangle = {}^2S_{1/2}(F = 0, m_F = 0) \leftrightarrow |1\rangle {}^2D_{3/2}(F = 2, m_F = 0)$, связанных оптическим электрическим квадрупольным переходом (см. рис. 1). Чтобы считать состояние квантового регистра, при помощи лазерного

[1] e-mail: uriy.anosov@yandex.ru

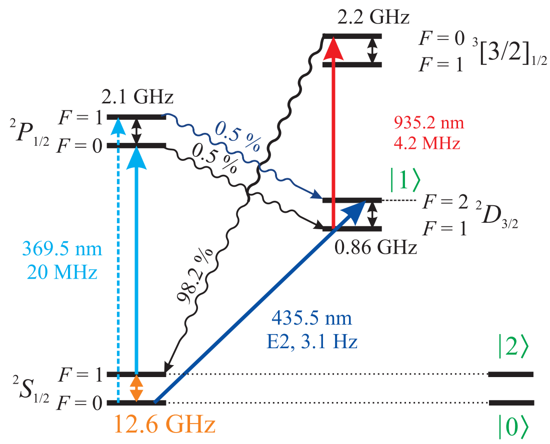

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема уровней $^{171}\mathrm{Yb}^+$, а также лазерных полей, участвующих в процедуре считывания. Пунктирными линиями показаны поля, создаваемые путем фазовой модуляции лазерных пучков

излучения реализуется оптическая накачка с уровня $|0\rangle$ на уровень $|2\rangle = {}^2S_{1/2}(F=1)$, возбуждается квазициклический электронный переход $|2\rangle \to {}^2P_{1/2}(F=0)$ и детектируется люминесценция спонтанного распада при помощи высокочувствительной камеры или фотоэлектронного умножителя (ФЭУ). Ионы, которые находились в состоянии $|1\rangle$ при этом не люминесцируют, в то время как частицы, спроецированные в состояние $|0\rangle$, начинают рассеивать фотоны. Эти два случая могут быть эффективно различены между собой путем анализа числа зарегистрированных детектором рассеянных фотонов [19]. Данный метод носит название "electron shelving" [20].

В нашей предыдущей работе [19] было теоретически показано, что при считывании оптического кубита, закодированного в состояниях $|0\rangle$ и $|1\rangle$ иона $^{171}\mathrm{Yb}^+$, из-за процесса оптической накачки из состояния $|0\rangle$ в $|2\rangle$ в начале процедуры возникает систематическая ошибка величиной 0.6 %. Так же было предложено использование радиочастотного π-импульса, связывающего сверхтонкие подуровни основного состояния иона $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ [19] перед процедурой считывания для устранения данного эффекта. В данной работе мы экспериментально подтвердили корректность представленной в [19] теоретической модели процедуры считывания, а также экспериментально продемонстрировали увеличение достоверности считывания состояния кубита на 0.50 ± 0.17 % за счет подачи микроволнового импульса на ионы в ловушке. Также была исследована достоверность проведения такого π-импульса методом рандомизированного бенчмаркинга [21].

2. Динамика населенности уровней во время считывания. Процесс считывания можно разделить на два этапа. На первом этапе производится перенос состояния иона в подпространство, включающее в себя уровни $^2P_{1/2}(F=0)$ и $|2\rangle$, которое мы далее называем "светлым", если он изначально находится в $|0\rangle$. Если ион изначально находится в состоянии $|1\rangle$, которое мы далее обозначаем "темным", то состояние остается неизменным. Первый этап можно реализовать как при помощи оптической накачки из состояния $|0\rangle$ в состояние $|2\rangle$ через $^2P_{1/2}(F=1)$, так и при помощи микроволнового π-импульса, связывающего состояния $|0\rangle$ и $|2\rangle$. На втором этапе, если ион изначально был в состоянии $|0\rangle$ и попал в "светлое" подпространство, он начинает рассеивать фотоны на длине волны 369 нм за счет наличия населенности в равновесном режиме на уровне $^2P_{1/2}(F=0)$. Если же кубит изначально был в состоянии $|1\rangle$ и оказался в "темном" подпространстве, рассеяния не происходит. Важно отметить, что как и с использованием оптической накачки, так и с использованием микроволнового импульса, в приближении отсутствия спонтанных распадов с уровня $^2D_{3/2}$ и нерезонансных переходов, создаваемая конфигурация лазерных полей не вызывает изменения суммарных населенностей в этих подпространствах на втором этапе. Во время обоих этапов считывания высокочувствительной камерой или ФЭУ детектируется люминесценция иона на длине волны 369 нм. В результате сравнения количества детектированных фотонов с уровнем дискриминатора – числом, посчитанным исходя из параметров установки или оптимизированным экспериментально, делается вывод о том, находился ли ион в $|0\rangle$ или $|1\rangle$. Если число фотонов больше уровня дискриминатора, то считается, что ион находится в $|0\rangle$, иначе – в $|1\rangle$ (см. рис. 2).

Для реализации считывания с оптической накачкой (см. рис. 3а) к иону на обоих этапах прикладываются лазерные поля на двух длинах волн: 369 нм, резонансное с переходом $|2\rangle \to {}^2P_{1/2}(F=0)$, и 935 нм, возбуждающее переход $^2D_{3/2}(F=1) \to {}^3[3/2]_{1/2}(F=0)$. Излучение на длине волны 369 нм также модулируется по фазе на частоте 14.7 ГГц, что создает спектральную компоненту, резонансную с переходом $|0\rangle \to {}^2P_{1/2}(F=1)$ (см. рис. 1). В работе [19] теоретически показано, что на первом этапе существует вероятность, равная 0.625 %, перехода иона из состояния $|0\rangle$ на уровень $|1\rangle$ вместо $|2\rangle$. В этом случае ион, изначально находившийся в состоянии $|0\rangle$, попадает в "темное" подпространство и ошибочно регистрируется как $|1\rangle$, создавая систематическую ошибку считывания.

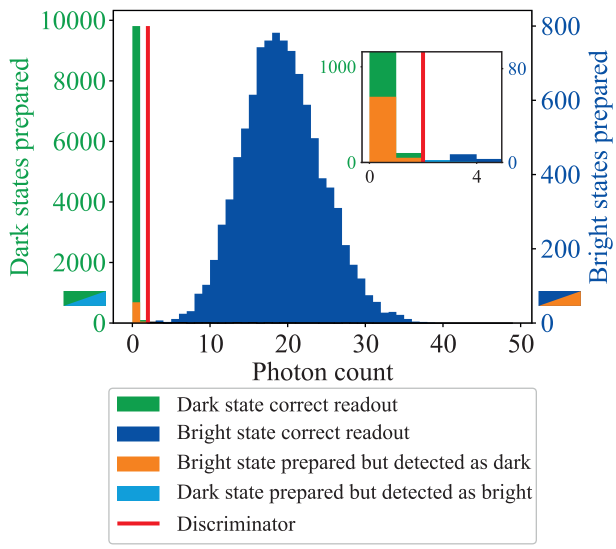

Рис. 2. (Цветной онлайн) Различение состояний при помощи дискриминатора. По горизонтали – число фотонов, зарегистрированных детектором, по вертикали – число экспериментов, в которых такое число было зарегистрировано. На одной гистограмме приведены данные для серии экспериментов по считыванию без микроволнового импульса как темных, так и светлых состояний. Пик справа от красной линии дискриминатора – светлые состояния, слева – темные состояния. Масштаб по вертикали для серий со светлыми и темными состояниями разный

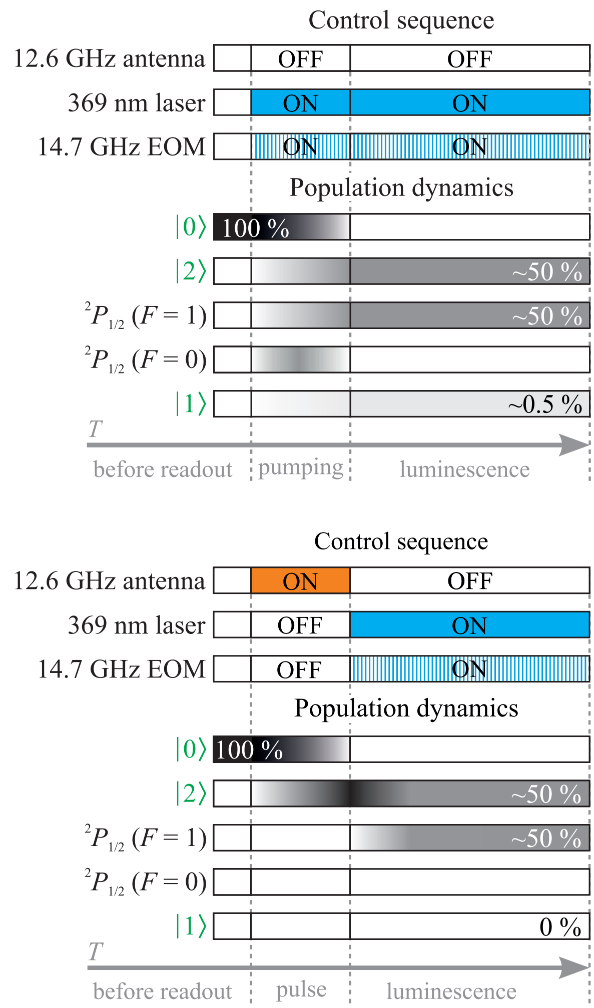

Рис. 3. (Цветной онлайн) Управляющие импульсы и динамика населенностей для считывания состояния $|0\rangle$ с оптической накачкой (a) в состояние $|2\rangle$ и с микроволновым π-импульсом (b), переводящим $|0\rangle$ в $|2\rangle$. (a) – Антенна не используется, лазер на 369 нм и ЭОМ на 14.7 ГГц включены во время всей процедуры считывания. С уровня ${}^2P_{1/2}(F=0)$, заселенного во время накачки, происходят распады в уровень $|1\rangle$. (b) – Микроволновый импульс перед включением лазеров на 369 и 935 нм осуществляет накачку перед основным этапом считывания. Утечки населенности с уровня $|0\rangle$ на уровень $|1\rangle$ во время накачки подавлены

Для реализации же считывания с микроволновым π-импульсом в начале процесса (см. рис. 3b) на ион подается импульс на частоте 12.6 ГГц (см. рис. 1), а только потом подается лазерное излучение. При высокой достоверности микроволновой операции, канал ошибки за счет утечек $|0\rangle \to |1\rangle$ сильно подавляется.

Вне зависимости от реализации первого этапа, на этапе люминесценции в равновесном режиме лазерное излучение на длине 369 нм так же необходимо модулировать на случай нерезонансной накачки $|2\rangle \to {}^2P_{1/2}(F=1)$ и последующего распада в ${}^2P_{1/2}(F=1) \to |0\rangle$.

3. Модернизация установки. Предыдущая конфигурация установки, описанная в [22], позволяла выполнять только метод считывания с использованием оптической накачки. Чтобы реализовать считывание с микроволновой накачкой, нами была изготовлена система подачи микроволновых импульсов на ион: антенна-монополь и модуль управляющей электроники, подключаемый к компьютеру реального времени. Генерация микроволновых импульсов осуществлялась путем смешения опорного сигнала на частоте 12.3 ГГц от высокостабильного генератора и сигнала от Direct digital synthesizer (DDS) из состава компьютера реального времени, управляющего установкой (см. рис. 4). Такая схема позволяет быстро управлять параметрами микроволнового поля, такими как амплитуда, фаза и частота.

4. Эксперимент. Экспериментальная демонстрация описанных выше методов производилась путем считывания состояния кубита, представляющего собой одиночный ион, удерживаемый при

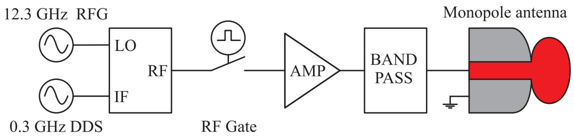

Рис. 4. (Цветной онлайн) Схема блока электроники. На смесителе частот из 12.3 ГГц, подаваемых с генератора частоты и 0.3 ГГц, подаваемых с DDS, помимо прочих компонент получается сигнал на 12.6 ГГц. При помощи радиочастотного ключа осуществляется формирование импульсов, которые далее усиливаются и проходят через полосовой фильтр перед подачей на антенну-монополь

помощи линейной ловушки Пауля с секулярными частотами $\omega_{\{x,y,z\}} = 2\pi \times \{3,7;3,6;0,13\}$ МГц. Перед каждым экспериментом ион охлаждался до температуры около 1.5 мК [23] методом доплеровского охлаждения и подготавливался в основном состоянии $|0\rangle$, что выполнялось при помощи оптической накачки. Стоит заметить, что в эксперименте сложно измерить достоверность подготовки состояния и достоверность считывания отдельно друг от друга, в связи с чем корректнее будет говорить, что была измерена достоверность подготовки и считывания состояния (SPAM – state preparation and measurement). По результатам моделирования достоверность подготовки начального состояния составляет более 99.9 %. В экспериментах, где исследовалась точность считывания состояния $|1\rangle$, его подготовка осуществлялась проведением композитной квантовой операции $R_x(\pi)$, реализованной в соответствии с протоколом SK1 [24], позволяющим компенсировать ошибки калибровки данного гейта. Операция производилась при помощи лазерного пучка на длине волны 435 нм, направленного перпендикулярно оси ловушки. Точность однокубитных операций, измеренная методом рандомизированного бенчмаркинга, составила 99.95 %. Более подробная информация об установке представлена в [18].

Считывание производилось при помощи диодных лазерных источников на длинах волн 369 и 935 нм, модулирование которых по фазе осуществлялось при помощи электро-оптических модуляторов. Оба пучка во время считывания были направлены вдоль оси ловушки. Интенсивности обоих пучков соответствовали приблизительно интенсивностям насыщения. Для снятия вырождения по магнитным подуровням и подавления эффекта когерентного пленения населенности, подавляющего люминесценцию ионов [25], ионы находились в постоянном магнитном поле величиной 7.5 Гс, направленном под углом ко всем осям ловушки. Поляризации пучков подбирались эмпирически для максимизации сигнала люминесценции. Сигнал люминесценции регистрировался при помощи объектива с апертурой 0.48, в плоскости изображения которого было установлено многомодовое волокно, доводящее излучение до ФЭУ. Выходной сигнал ФЭУ усиливался и количество импульсов регистрировалось при помощи компьютера реального времени. По результатам эксперимента эффективность детектирования фотона можно оценить как 10^{-2}. Была замерена частота темновых срабатываний ФЭУ, когда в ловушке не было ионов (определяются темновыми шумами ФЭУ и засветкой от лазерного излучения на длине волны 369 нм) – в среднем 32 фотона в секунду, а также частота срабатываний ФЭУ, когда подготовлено люминесцирующее состояние – в среднем 47×10^3 фотонов в секунду.

Достоверность операций, производимых между уровнями $|0\rangle$ и $|2\rangle$, также была оценена методом рандомизированного бенчмаркинга. График, соответствующий измеренной достоверности цепочки от количества клиффордовских гейтов, представлен на рис. 5, а полученная достоверность микроволнового гейта – 99.94 %.

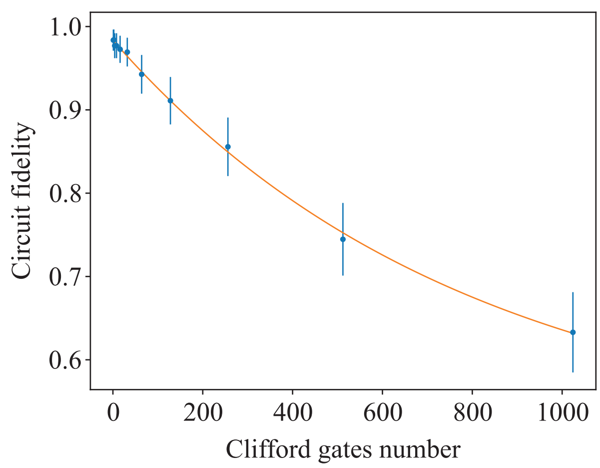

Рис. 5. (Цветной онлайн) Зависимость достоверности цепочки клиффордовских однокубитных гейтов для системы уровней $|0\rangle$ и $|2\rangle$ от ее длины. Точками показаны экспериментальные данные, кривой – аппроксимация экспоненциальным затуханием

Величину достоверности считывания f в данной работе мы определяем как $\min(f_{\text{dark}}, f_{\text{bright}})$. Здесь f_{dark} – вероятность того, что если перед считыванием было подготовлено темное состояние, то число зарегистрированных при считывании фотонов будет меньше либо равно уровню дискриминатора и состояние будет определено как темное, а f_{bright} – вероятность того, что если перед считыванием было под-

Таблица 1. Значения достоверности считывания с микроволновым импульсом перед считыванием (микроволновая накачка) и без него (оптическая накачка), а также использованные в эксперименте параметры длительности считывания и уровня дискриминатора, оптимальные значения которых были получены из теоретической модели на основании параметров установки. Значение достоверности считывания кубита – это минимум значений достоверности считывания обоих состояний

Method	t, μs	N	f_{dark} (readout of $\|1\rangle$)	f_{bright} (readout of $\|0\rangle$)	f
Optical pumping	174	0	$98.98 \pm 0.10\,\%$	$99.33 \pm 0.07\,\%$	$98.98 \pm 0.10\,\%$
Microwave pumping	174	1	$99.48 \pm 0.07\,\%$	$99.51 \pm 0.07\,\%$	$99.48 \pm 0.07\,\%$

готовлено светлое состояние, то число зарегистрированных при считывании фотонов будет больше уровня дискриминатора и состояние будет определено как темное. Из всех параметров установки, влияющих на достоверность считывания, фиксированными были интенсивности лазерных полей, эффективность детектирования фотонов и частота темновых срабатываний ФЭУ, а оптимизировались время считывания t и уровень дискриминатора N. Время считывания и уровень дискриминатора были изначально оценены исходя из теоретической модели [19] и оптимизированы по результатам экспериментов.

Были проведены четыре серии по 10 000 экспериментов: по подготовке и считыванию “светлого” и “темного” состояний, без использования и с использованием микроволновой накачки (рис. 6). Результаты экспериментов сведены в табл. 1. Погрешность была посчитана методом BCa Bootstrapping [26], число повторных выборок составило 10000. Полученные в эксперименте результаты в пределах погрешности соответствуют теоретическому приросту точности на 0.6 %. Также на приведенных графиках (рис. 6) хорошо видно, что при применении микроволнового π-импульса небольшой пик, соответствующий экспериментам, в которых при считывании подготовленного состояния $|0\rangle$ не было зарегистрировано ни одного фотона, отсутствует в отличие от эксперимента с оптической накачкой, что согласуется с теоретической моделью. Отличия наблюдаемых гистограмм числа наблюдаемых фотонов от теоретически предсказанных на рис. 6, могут быть объяснены флуктуациями положения иона и вибрациями в оптической схеме системы считывания, приводящими к флуктуациям эффективности сбора флуоресценции иона. Флуктуации положения иона вызваны шумами напряжений электродов ловушки. Это предположение потенциально объясняет уширение полученной в эксперименте гистограммы “светлого” состояния по сравнению с теоретической моделью.

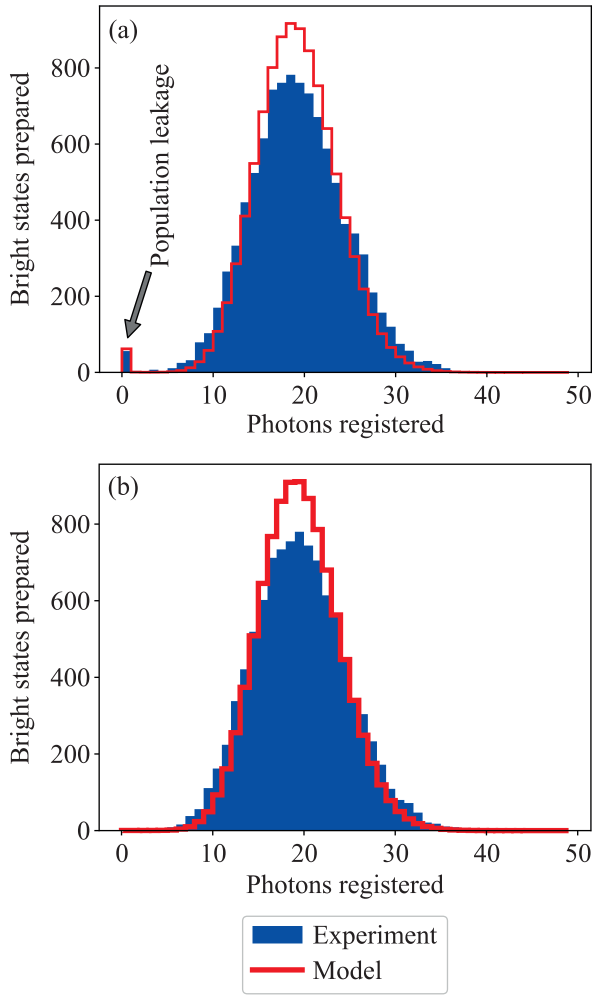

Рис. 6. (Цветной онлайн) Статистика фотонов, детектированных ФЭУ при считывании заранее подготовленного светлого состояния. Синие столбцы соответсвуют экспериментальным данным, красный контур – теоретической модели [19]. (a) – Оптическая накачка; (b) – микроволновая накачка

5. Заключение. В результате работы были показаны преимущества, обеспечиваемые возможностью возбуждения радиочастотного перехода между сверхтонкими подуровнями основного состояния в ионе иттербия. Повышена достоверность считывания оптического кубита на $0.50 \pm 0.17\,\%$. Измерена достоверность однокубитных операций на сверхтонком кубите при помощи рандомизированного бенчмаркинга, составившая 99.94 %. Для дальнейшего улучшения достоверности считывания необходимо как бороться с флуктуациями положения иона, так и улучшать схему детектирования фотонов: использовать объектив считывания с большей апертурой и более эффективный и менее шумный ФЭУ или камеру. Развивая успехи работы, можно также применить аналогичный метод для считывания состояния кудитов (многоуровневых квантовых систем) на основе ионов $^{171}\mathrm{Yb}^+$.

Финансирование работы. Данная работа была поддержана госкорпорацией "Росатом" в рамках Дорожной карты по квантовым вычислениям (Договоры # 868-1.3-15/15-2021 от "5" октября 2021 года и # 868/1653-Д от "21" августа 2025 года.)

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A.K. Fedorov, N. Gisin, S.M. Beloussov, and A.I. Lvovsky, "Quantum computing at the quantum advantage threshold: a down-to-business review", arXiv:2203.17181 (2022).
2. P.W. Shor, "Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring", in *Proceedings 35th annual symposium on foundations of computer science*, (IEEE Computer Society Press, Santa Fe, New Mexico, 1994), p. 124.
3. S. McArdle, S. Endo, A. Aspuru-Guzik, S.C. Benjamin, and X. Yuan, "Quantum computational chemistry", Rev. Mod. Phys. **92**(1), 015003 (2020).
4. A. Abbas, A. Ambainis, B. Augustino et al. (Collaboration), "Challenges and opportunities in quantum optimization", Nat. Rev. Phys. **6**(12), 718 (2024).
5. S. Slussarenko and G.J. Pryde, "Photonic quantum information processing: A concise review", Appl. Phys. Rev. **6**, 041303 (2019).
6. C. Kloeffel and D. Loss, "Prospects for spin-based quantum computing in quantum dots", Annu. Rev. Condens. Matter Phys. **4**(1), 51 (2013).
7. H.-L. Huang, D. Wu, D. Fan, and X. Zhu, "Superconducting quantum computing: a review", Science China Information Sciences **63**, 1 (2020).
8. L. Henriet, L. Beguin, A. Signoles, T. Lahaye, A. Browaeys, G.-O. Reymond, and C. Jurczak, "Quantum computing with neutral atoms", Quantum **4**, 327 (2020).
9. P. Wang, C.-Y. Luan, M. Qiao, M. Um, J. Zhang, Y. Wang, X. Yuan, M. Gu, J. Zhang, and K. Kim, "Single ion qubit with estimated coherence time exceeding one hour", Nat. Commun. **12**(1), 1 (2021).
10. A. Hughes, R. Srinivas, C. Löschnauer, H. Knaack, R. Matt, C. Ballance, M. Malinowski, T. Harty, and R. Sutherland, "Trapped-ion two-qubit gates with $>99.99\,\%$ fidelity without ground-state cooling", arXiv preprint arXiv:2510.17286 (2025).
11. M.R. Geller and M. Sun, "Toward efficient correction of multiqubit measurement errors: Pair correlation method", Quantum Science and Technology **6**(2), 025009 (2021).
12. J. Lin, J.J. Wallman, I. Hincks, and R. Laflamme, "Independent state and measurement characterization for quantum computers", Physical Review Research **3**(3), 033285 (2021).
13. L. Postler, S. Heuen, I. Pogorelov, M. Rispler, T. Feldker, M. Meth, C.D. Marciniak, R. Stricker, M. Ringbauer, R. Blatt, P. Schindler, M. Müller, and T. Monz, "Demonstration of fault-tolerant universal quantum gate operations", Nature **605**, 675 (2022).
14. https://ionq.com/quantum-systems/forte. Accessed: 2025-11-09.
15. https://docs.quantinuum.com/systems/data_sheets/Quantinuum%20H2%20Product%20Data%20Sheet.pdf. Accessed: 2025-11-09.
16. A.H. Myerson, D.J. Szwer, S.C. Webster, D.T.C. Allcock, M.J. Curtis, G. Imreh, J.A. Sherman, D.N. Stacey, A.M. Steane, and D.M. Lucas, "High-fidelity readout of trapped-ion qubits", Phys. Rev. Lett. **100**, 200502 (2008).
17. I.V. Zalivako, I.A. Semerikov, A.S. Borisenko, M.D. Aksenov, K.Y. Khabarova, and N.N. Kolachevsky, "Experimental study of the optical qubit on the 435-nm quadrupole transition in the $^{171}\mathrm{Yb}^+$ ion", JETP Lett. **114**(2), 59 (2021).
18. И.В. Заливако, Н.В. Семенин, Н.О. Жаднов, К.П. Галстян, П.А. Каменских, В.Н. Смирнов, А.Е. Корольков, П.Л. Сидоров, А.С. Борисенко, Ю.П. Аносов, И.А. Семериков, К.Ю. Хабарова, Н.Н. Колачевский, "Квантовые вычисления на ионах в ловушках: принципы, достижения и перспективы", Успехи физических наук **195**(6), 585 (2025) [I.V. Zalivako, N.V. Semenin, N.O. Zhadnov, K.P. Galstyan, P.A. Kamenskikh, V.N. Smirnov, A.E. Korolkov, P.L. Sidorov, A.S. Borisenko, Yu.P. Anosov, I.A. Semerikov, K.Yu. Khabarova, and N.N. Kolachevsky, "Quantum computing with trapped ions: principles, achievements, and prospects", Phys.-Uspekhi **68**, 552 (2025)].
19. N.V. Semenin, A.S. Borisenko, I.V. Zalivako, I.A. Semerikov, K.Y. Khabarova, and N.N. Kolachevsky, "Optimization of the readout fidelity of the quantum state of an optical qubit in the $^{171}\mathrm{Yb}^+$ ion", JETP Lett. **114**, 486 (2021).
20. D. Leibfried, R. Blatt, C. Monroe, and D. Wineland, "Quantum dynamics of single trapped ions", Rev. Mod. Phys. **75**(1), 281 (2003).
21. E. Knill, D. Leibfried, R. Reichle, J. Britton, R.B. Blakestad, J.D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, S. Seidelin, and D.J. Wineland, "Randomized benchmarking of quantum gates", Physical Review A – Atomic, Molecular, and Optical Physics **77**(1), 012307 (2008).

22. I. V. Zalivako, A. S. Nikolaeva, A. S. Borisenko, A. E. Korolkov, P. L. Sidorov, K. P. Galstyan, N. V. Semenin, V. N. Smirnov, M. A. Aksenov, K. M. Makushin, M. Konstantin, E. O. Kiktenko, A. K. Fedorov, I. A. Semerikov, K. Yu. Khabarova, and N. N. Kolachevsky, "Towards a Multiqudit Quantum Processor Based on a $^{171}Yb^{+}$ Ion String: Realizing Basic Quantum Algorithms", Quantum Reports **7**(2), 19 (2025).
23. N. V. Semenin, A. S. Borisenko, I. V. Zalivako, I. A. Semerikov, M. D. Aksenov, K. Y. Khabarova, and N. N. Kolachevsky, "Determination of the heating rate and temperature of an ion chain in a linear paul trap by the dephasing of rabi oscillations", JETP Lett. **116**(2), 77 (2022).
24. K. R. Brown, A. W. Harrow, and I. L. Chuang, "Arbitrarily accurate composite pulse sequences", Phys. Rev. A **70**, 052318 (2004).
25. D. J. Berkeland and M. G. Boshier, "Destabilization of dark states and optical spectroscopy in Zeeman-degenerate atomic systems", Phys. Rev. A **65**(3), 13 (2002).
26. B. Efron, "Better bootstrap confidence intervals", J. Am. Stat. Assoc. **82**(397), 171 (1987).