Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 5, стр. 217 – 219 *10 сентября 1989 г.*

ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА В КОНФОРМНЫХ ТЕОРИЯХ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ОДНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

А.В.Забродин[1] , *А.Д.Миронов*

С помощью эффектов конечного размера найдена длинноволновая асимптотика вакуумных средних некоторых нелокальных операторов в одномерных квантовых системах.

1. Новые методы двумерной конформной теории поля, развитые в связи с задачами теории струн, имеют многообразные применения. Так, для большого класса конформных теорий (полученных так называемой ГКО-конструкцией), проверена их эквивалентность теории свободных полей, что сильно упростило вычисление корреляторов конформных локальных операторов. С другой стороны, проблема струнной компактификации тесно связана с задачей нахождения длинноволновой асимптотики различных вакуумных средних в квантовых одномерных моделях. В последнее время был предложен метод определения длинноволновой асимптотики корреляторов различных локальных операторов в одномерных квантовых системах, основанный на вычислении эффектов конечного размера в конформных теориях [1-7]. Идея этого подхода заключается в том, что в подобных системах при нулевой температуре происходит фазовый переход, и в длинноволновом пределе система обладает конформной симметрией [8].

Более конкретно, аномальные размерности Δ, $\overline{\Delta}$ конформных операторов $\phi_{\Delta,\overline{\Delta}}$ связаны с энергией E_L^ϕ наинизших возбужденных состояний $|\,\phi\,\rangle$ таких, что $\langle\,\mathrm{vac}\,|\,\phi\,|\,\phi\,\rangle \neq 0$

$$E_L^\phi - E_L^{\mathrm{vac}} = 2\pi v h_\phi/L. \tag{1}$$

Здесь $h_\phi \equiv \Delta_\phi + \overline{\Delta}_\phi$ – масштабная размерность оператора ϕ, L – длина системы, v – групповая скорость на поверхности Ферми, E_L^{vac} – энергия основного состояния системы. Длинноволновая асимптотика (одновременного) коррелятора полей $\phi_{\Delta,\overline{\Delta}}$ имеет вид

$$\langle\,\phi(x)\phi(0)\,\rangle \sim \cos(P^\phi x)\, x^{-2h_\phi}, \tag{2}$$

где P^ϕ – импульс состояния $|\,\phi\,\rangle$, отличный от нуля при наличии щели в спектре оператора импульса.

Аналогично, центральный заряд c возникающей алгебры Вирасоро связан с объемной поправкой $\sim L^{-1}$ к энергии основного состояния системы [3,4]. Для большинства однокомпонентных систем (таких, как одномерный бозе- или ферми-газ, магнетик Гейзенберга со спином 1/2 и др.) $c = 1$ [2,5,6]. Тем самым указанные теории попадают в класс универсальности однокомпонентной гауссовой модели [9]. Спектр аномальных размерностей локальных (примарных) операторов $\phi_{n,m}$ в гауссовой модели зависит от одного непрерывного параметра R и имеет вид:

$$h_\phi = n^2/R^2 + m^2R^2/4, \quad n, m \text{ – целые числа.} \tag{3}$$

Величина R зависит от параметров исходной модели: $R^2 = 8\pi N/vL$, где N – число частиц в системе (или число перевернутых спинов в случае магнетика). В термодинамическом пределе $N \to \infty$, $L \to \infty$, $N/L = \rho = \mathrm{const}$.

2. Мы покажем, что аналогичные методы позволяют найти корреляторы некоторых нелокальных операторов в одномерных системах. Рассмотрим вначале XXZ-антиферромагнетик

---
[1] Институт химической физики АН СССР.

Гейзенберга, описываемый гамильтонианом

$$\hat{H}_1 = -1/2 \sum_{i=1}^{L} (\sigma_i^1 \sigma_{i+1}^1 + \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^2 - \cos\gamma \cdot \sigma_i^3 \sigma_{i+1}^3), \quad 0 \leqslant \gamma < \pi. \quad (4)$$

Представляет интерес [10,11] найти средние по антиферромагнитному вакууму от нелокальных операторов $S_{xy} \equiv \prod_{j=x}^{y} \sigma_j^3 = \exp\{i\pi q(x, y)\}$ ($q(x, y)$ – оператор числа перевернутых спинов на узлах от x до y), и $T_{xy} = P_{xx+1} P_{x+1x+2} \ldots P_{y-1y} P_{yx}$, где $P_{xy} \equiv (1 + \vec{\sigma}_x \vec{\sigma}_y)/2$ – оператор перестановки спинов на узлах x, y. Оператор T_{xy} является оператором циклической перестановки на узлах от x до y: $x \to x+1, x+1 \to x+2, \ldots, y-1 \to y, y \to x$. В силу трансляционной инвариантности $\langle \text{vac} | S_{xy} | \text{vac} \rangle$ и $\langle \text{vac} | T_{xy} | \text{vac} \rangle$ зависят только от $x - y$.

Нам потребуется рассматривать гильбертово пространство, включающее в себя одновременно все состояния спиновой цепочки с разным числом узлов и различными граничными условиями. Введем операторы, меняющие число узлов на единицу: $a_{x\alpha}^+$ ($a = \pm 1$), который рождает узел со спином α между узлами исходной цепочки с номерами x и $x+1$, и $b_{x\alpha}$, который уничтожает x-й узел (со спином β_x) в случае $\beta_x = \alpha$, и зануляет состояния, у которых $\beta_x = -\alpha$. Таким образом, операторы $a_{x\alpha}^+$ действуют из сектора с числом узлов L в сектор с числом узлов $L+1$, а операторы $b_{x\alpha}$ – наоборот, уменьшают число узлов на единицу. Введем также оператор $S_x \equiv \prod_{j=x}^{L} \sigma_j^3$, который связывает сектора с периодическими и антипериодическими граничными условиями. Очевидно,

$$T_{xy} = \sum_\alpha a_{x\alpha}^+ b_{y\alpha}, \quad S_{xy} = S_x S_y. \quad (5)$$

Обозначим вакуум цепочки из L узлов с периодическими (антипериодическими) граничными условиями через $|L, +\rangle$ ($|L, -\rangle$) (в термодинамическом пределе эти состояния совпадают, но сейчас нам важны поправки по L^{-1}). Тогда имеем $\langle L-1, + | b_{x\alpha} | L, + \rangle \neq 0$, $\langle L+1, + | a_{x\alpha}^+ | L, + \rangle \neq 0$, $\langle L, - | S_x | L, + \rangle \neq 0$, и для нахождения асимптотики средних от операторов (5) при больших $|x-y|$ мы можем воспользоваться формулой (2), найдя размерности операторов $b_{x\alpha}$ и S_x из (1). Для этого надо вычислить сдвиг энергий состояний $|L+1, +\rangle$ и $|L, -\rangle$ по сравнению с $|L, +\rangle$, а также их импульсы. Оказывается, что получающийся таким образом спектр дается формулой (3) с полуцелыми n и m. В частности, $b_{\pm 1}$ можно отождествить с нелокальными операторами $\phi_{\pm 1/2, 0}$ в расширенной гауссовой модели, а S – с $\phi_{0, 1/2}$. В результате получаем

$$\langle \text{vac} | \exp\{i\pi q(x, y)\} | \text{vac} \rangle \sim \cos[\pi(x-y)/2] \cdot |x-y|^{-\lambda}, \quad (6а)$$

$$\langle \text{vac} | T_{xy} | \text{vac} \rangle \sim |x-y|^{-\mu}, \quad (6б)$$

причем $\lambda = R^2/8$, $\mu = R^{-2}/2$, где $R^2 = 2\pi(\pi-\gamma)^{-1}$ совпадает с обратной масштабной размерностью операторов σ^1, σ^2 [2,5].

Отметим, что в изотропном случае XXX-модели ($\gamma = 0$ в (4)) оператор S_x имеет масштабную размерность 1/8 и является спин-полем [12].

3. Тот же метод работает и в случае одномерной модели бозе- или ферми-газа, описываемого непрерывным гамильтонианом

$$\hat{H}_2 = \int_0^L dx\, \partial_x \psi^*(x)\, \partial_x \psi(x) + \frac{1}{2} \cdot g \int\int_0^L dx dy \cdot \psi^*(x) \psi^*(y) V(x-y) \psi(x) \psi(y), \quad (7)$$

где $V(x)$ – некоторый потенциал парного взаимодействия (отталкивания) достаточно общего вида. Аналог оператора S_{xy} определяется той же формулой $S_{xy} = \exp[i\pi q(x, y)]$, где $q(x, y)$ теперь является оператором числа частиц на отрезке от x до y. При $|x-y| \gg L/N = \rho^{-1}$ мы находим

$$\langle \text{vac} | S_{xy} | \text{vac} \rangle \sim \cos(\pi\rho|x-y|) \cdot |x-y|^{-1/4\theta}, \quad (8)$$

где $\theta = 2R^2 = \upsilon(4\pi\rho)^{-1}$ – критический индекс коррелятора бозонных полей ψ [10], ρ – плотность, а υ – то же, что в (1).

Оператор S осуществляет преобразование Йордана–Вигнера от бозонных операторов ψ_B к фермионным ψ_F: $\psi_F(x) = \psi_B(x) S_{xL}$, $\psi^*_F(x) = S^*_{xL}\psi^*_B(x)$. Это дает возможность отождествить ψ_F с оператором $\phi_{1,1/2}$ в гауссовой модели и вычислить асимптотику коррелятора полей фермионной модели (7):

$$\langle \mathrm{vac} \mid \psi^*_F(x)\psi_F(y) \mid \mathrm{vac} \rangle \sim \cos(\pi\rho|x-y|) \cdot |x-y|^{-\theta-(1/4)\theta} . \qquad (9)$$

В общем случае спектр размерностей фермионной модели (7) определяется формулой (3) со следующим условием на n и m: при n четном m целое, а при n нечетном m полуцелое.

Один из нас (А.З.) благодарен А.А.Овчинникову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Cardy J.L.* Nucl. Phys. B, 1986, **270**[**FS16**], 186.
2. *Боголюбов Н.М. и др.* Письма в ЖЭТФ, 1986, **44**, 405.
3. *Blöte H.W. et al.* Phys., Rev. Lett., 1986, **56**, 742.
4. *Affleck I.* Phys. Rev. Lett., 1986, **56**, 746.
5. *Alcaraz F. et al.* Ann. Phys., 1988, **182**, 280.
6. *De Vega H.J., Karowski M.* Nucl. Phys. B, 1987, **285** [**FS19**], 619.
7. *Von Gehlen G. et al.* J. Phys. A, 1987, **20**, 2577.
8. *Belavin A.A. et al.* Nucl. Phys. B, 1984, **241**, 333.
9. *Kadanoff L.P.* Ann. Phys., 1979, **120**, 39.
10. *Забродин А.В., Овчинников А.А.* ЖЭТФ, 1986, **90**, 2260; *Забродин А.В., Овчинников А.А.* ЖЭТФ, 1989, **97**, 1110.
11, *Корепин В.Е.* Функ. анализ и его прил. 1989, **23**, вып. 1, 15.
12. *Dijkgraaf R. et al.* Comm. Math. Phys., 1988, **115**, 649.

Физический институт им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 июня 1989 г.