Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 5, стр. 236 – 238 *10 сентября 1989 г.*

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КУЛОНОВСКАЯ ЗАДАЧА И СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

Б.А.Арбузов, Э.Э.Боос, В.И.Саврин, С.А.Шичанин

Прослеживается тесная связь между положительными уровнями релятивистской кулоновской задачи и состояниями Вигнера-фон Неймана, погруженными в непрерывный спектр.

В недавней работе [1] при рассмотрении казалось бы известной релятивистской кулоновской задачи взаимодействия двух частиц с одинаковыми массами на основе численного решения квазипотенциального уравнения была обнаружена целая система связанных состояний при положительных энергиях связи $(\epsilon > 0)$. Неожиданным оказалось и то, что в области $\epsilon > 0$ новые состояния появились в системах как разноименно, так и одноименно заряженных частиц. При этом, как это и должно быть, в области отрицательных энергий связи $(\epsilon < 0)$ воспроизвелись известные кулоновские уровни в системе разноименных зарядов, а в системе одноименных зарядов было показано отсутствие каких-либо дискретных уровней.

Полученные результаты позволили с единой точки зрения интерпретировать [1] на первый взгляд совершенно не связанные между собой экспериментальные данные по новым e^+e^--резонансам, обнаруженным в столкновениях тяжелых ионов (см., например, [2]) (*GSI*-резонансы) и обнаруженным необычным дипротонным резонансам [3,4]. Важно отметить, что численные предсказания для этих уровней получены с использованием в качестве параметров лишь фундаментальных констант $\alpha = 1/137$ и значений масс электрона и протона.

В настоящей работе мы хотели бы обратить внимание на аналогию рассмотренной в [1] задачи с известным примером Вигнера-фон Неймана [5] о существовании связанных состояний, погруженных в непрерывный спектр.

В работе [1] исследовалось квазипотенциальное уравнение вида

$$2\omega(M-2\omega)\varphi(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}'}{2\omega'} V(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|M)\varphi(\mathbf{p}'), \tag{1}$$

где $\omega = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, $\omega' = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m^2}$, M – масса связанного состояния, а квазипотенциал имеет вид:

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|M) = \frac{(2me)^2}{|\mathbf{q}|(M-\Omega+io)}, \tag{2}$$

в котором $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$, $\Omega = \omega + \omega' + |\mathbf{q}|$, $e^2/4\pi \equiv \alpha$.

Уравнение (1) с квазипотенциалом (2) описывает взаимодействие двух разноименно заряженных частиц массы m в приближении обмена одним безмассовым нейтральным скалярным фотоном. Отметим, что уравнение, описывающее взаимодействие двух одноименно заряженных частиц, получается из (1) и (2) путем замены $\alpha \to -\alpha$. Потенциал вида (2) был получен ранее в работах [6,7], а для случая спинорной электродинамики – в работе [8]. Выражение (2) приводит к нелокальному, зависящему от энергии выражению для потенциала в координатном пространстве. Однако, если в формуле (2) $|p|, |p'| \ll m$, то потенциал (2) принимает более простой вид:

$$V(\mathbf{p}, \mathbf{p}'|M) = \frac{(2me)^2}{|\mathbf{q}|(\epsilon - |\mathbf{q}| + io)}, \tag{3}$$

где $\epsilon = M - 2m$ – энергия связи. В области связанных состояний $(\epsilon < 0)$ знаменатель в (3) не приводит к дополнительным особенностям и предельный переход $\epsilon \to 0$ дает нерелятивистское кулоновское выражение для потенциала $-(2me)^2/|\mathbf{q}|^2$. Поведение потенциала (3) в координатном пространстве при произвольном ϵ исследовалось в работе [7]. При $\epsilon > 0$ выражение (3) имеет особенность при $\epsilon = |\mathbf{q}|$, и предельный переход к нерелятивистскому случаю становится проблематичным. Правило обхода полюса в выражениях (2) и (3) является очень важным и прямо следует из фейнмановских правил обхода полюсов в пропагаторах взаимодействующих частиц [1], что гарантирует для потенциалов (2), (3) правильные причинные свойства. Уравнение (1) в рассматриваемом приближении можно переписать в виде уравнения Шредингера в импульсном пространстве:

$$(\epsilon - \frac{p^2}{m})\varphi(\mathbf{p}) = \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p}' \frac{1}{|\mathbf{q}|(\epsilon - |\mathbf{q}| + io)} \varphi(\mathbf{p}'). \qquad (4)$$

Переходя в (4) в координатное пространство с учетом зависимости квазипотенциала лишь от разности импульсов, получим следующее уравнение Шредингера

$$[-\frac{\vec{\nabla}^2}{m} + V(r)]\tilde{\varphi}(\mathbf{r}) = \epsilon\tilde{\varphi}(\mathbf{r}) \qquad (5)$$

с потенциалом вида

$$V(r) = -\frac{2\alpha}{\pi}\frac{1}{r}\ \{\cos(\epsilon r)[\mathrm{si}\ (\epsilon r) + \pi] - \sin(\epsilon r)\,\mathrm{ci}(\epsilon r) + i\pi \sin(\epsilon r)\}, \qquad (6)$$

где $\mathrm{si}(x)$ и $\mathrm{ci}(x)$ – интегральные синус и косинус соответственно. Аналогичный вид потенциала для случая спинорной электродинамики получен в работе [8].

Отметим ключевое свойство потенциала (6), а именно, осциллирующий характер поведения его действительной части при $r \to \infty$:

$$\mathrm{Re}\, V(r) \underset{r\to\infty}{\to} -2\alpha\frac{\cos(\epsilon r)}{r}. \qquad (7)$$

Именно это свойство осциллирующего поведения на бесконечности на фоне медленного убывания $1/r$ является наиболее характерной особенностью полученного потенциала и, фактически, приводит к возможности появления уровней с положительной энергией связи ϵ.

С математической точки зрения возникающая здесь ситуация аналогична классическому примеру Вигнера-фон Неймана [5]. Как известно, Вигнер и фон Нейман построили явно потенциал с асимптотическим поведением $-8\sin(2r)/r$, в котором существует уровень энергии с положительным значением энергии связи $\epsilon = 1$ в кулоновских единицах, т.е. существует положительный уровень, погруженный в непрерывный спектр.

В самой работе [5] был построен лишь один уровень с положительной энергией связи. В дальнейшем были найдены и другие примеры уровней с $\epsilon > 0$ для потенциалов типа Вигнера-фон Неймана. В частности, в работе [9] приводится уровень с $\epsilon = 4$ в кулоновских единицах, который лежит выше всех положительных максимумов потенциала. Как уже говорилось, нами для более сложного случая потенциала (2) была получена целая система уровней с $\epsilon > 0$ [1].

Физический смысл появления положительных уровней в осциллирующих потенциалах состоит в том, что при определенных значениях энергии происходят когерентные отражения от горбов потенциала, что приводит к затуханию убегающей на бесконечность волны [10].

Пример Вигнера-фон Неймана воспринимался, как чисто математический результат, лишенный реального физического смысла. Мы же показали, что при рассмотрении проблемы связанных состояний в квантовой теории поля могут возникать потенциалы, в которых существуют дискретные уровни с положительной энергией связи аналогичные уровням, погруженным в непрерывный спектр, в примерах типа Вигнера-фон Неймана. Подчеркнем еще раз, что существование столь необычного спектра состояний с физической точки зрения связано с тем, что взаимодействие двух релятивистских заряженных частиц описываются осциллирующим потенциалом, зависящим от энергии.

В заключение мы хотим выразить искреннюю благодарность А.А.Логунову, А.А.Архипову, Н.А.Свешникову и Н.Б.Скачкову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Арбузов Б.А. и др.* Препринт НИИЯФ МГУ, 1989, 89-1/78, Москва; В кн.: Проблемы физики высоких энергий и теории поля. Под ред. В.А.Петрова. М.: Наука, 1989, с. 362.
2. *Cowan T. et al.* Phys. Rev. Lett., 1986, 56, 444.
3. *Троян Ю.А. и др.* Препринт ОИЯИ, 1988, Д1-88-399, Дубна.
4. *Абдинов О.Б. и др.* Препринт ОИЯИ, 1988, Р1-88-102, Дубна.
5. *Von Neumann J., Wigner E.* Phys. Z., 1929, 30, 365.
6. *Kadyshevski V.G.* Nucl. Phys. B, 1968, 6, 125.
7. *Капшай В.Н. и др.* ТМФ, 1986, 69, 400.
8. *Архипов А.А.* ТМФ, 1988, 74, 69.
9. *Stillinger F.H., Herrick D.R.* Phys. Rev. A, 1975, 11, 446.
10. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.4 Анализ операторов. М.: Мир, 1982.

Научно-исследовательский институт ядерной физики
Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Поступила в редакцию
12 июля 1989 г.