Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 8, с. 526 – 533

Корреляции градиентов фазы световой волны, распространяющейся в турбулентной среде в режиме слабых сцинтилляций

В. А. Богачев[+], *И. В. Колоколов*[*1)], *В. В. Лебедев*[*], *А. В. Немцева*[+×], *Ф. А. Стариков*[+○]

[+]*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, 607188 Саров, Россия*

[*]*Институт теоретической физики имени Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[×]*Филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в г. Сарове, Физический факультет, 607328 Саров, Россия*

[○]*Саровский физико-технический институт – филиал Научно-исследовательского ядерного университета Московский инженерно-физический институт, 607186 Саров, Россия*

Поступила в редакцию 5 марта 2026 г.
После переработки 12 марта 2026 г.
Принята к публикации 13 марта 2026 г.

Мы численно исследуем корреляционные функции фазы световых волн, распространяющихся в турбулентных средах. Особое внимание уделяется недиагональной составляющей корреляционной функции фазовых градиентов, которая нечувствительна к внешнему масштабу турбулентности. Результаты нашего моделирования находятся в хорошем согласии с аналитическими выражениями, полученными в работе (I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, JOSA A **42**(11), 1654 (2025)). Таким образом, мы численно подтверждаем ожидания, основанные на однородности теории возмущений для логарифма огибающей.

DOI: 10.7868/S3034576626040141

Наше исследование посвящено численному моделированию светового пучка, распространяющегося в турбулентной среде, такой как атмосфера Земли. Турбулентные пульсации вызывают флуктуации показателя преломления, которые, в свою очередь, приводят к искажениям пучка.

Основные идеи, необходимые для понимания особенностей распространения света в турбулентной атмосфере, восходят к основополагающим работам Колмогорова и Обухова [1–3], в которых используется концепция каскада энергии. В этих работах были установлены законы, которые описывают статистические свойства флуктуаций скорости в так называемом инерционном интервале масштабов. Этот диапазон охватывает масштабы между длиной, на которой сосредоточена накачка, и длиной, на которой включается вязкая диссипация. Позже Обухов [4] и Коррсин [5] расширили этот подход, включив в него флуктуации пассивного скаляра, такого, как температура или концентрация примесей, в турбулентной среде. Показатель преломления относится к этому классу полей, и его статистические свойства в турбулентной среде могут быть описаны теми же законами скейлинга в инерционном интервале масштабов.

Результаты начального периода исследований были изложены в нескольких монографиях и обзорах [6–12]. Эти исследования были в основном сосредоточены на режиме слабых сцинтилляций, при котором возмущения фазы и амплитуды световой волны, вызванные турбулентностью, относительно малы. Кроме того, были получены некоторые важные результаты для режима сильных сцинтилляций, см., например, [13].

Интерес к этой теме возродился благодаря достижениям в области численного моделирования, позволяющим проводить более детальный анализ влияния турбулентности на световой пучок, см. [14–18]. Недавно теоретически были установлены статистические свойства событий, соответствующих аномально высоким значениям интенсивности, см. [19, 20].

1)e-mail: igor.kolokolov@gmail.com

Искажения, вызванные атмосферной турбулентностью, могут быть частично исправлены с помощью метода, называемого адаптивной оптикой, см. [21, 22]. В работе [23], мы предложили новый метод измерения параметра Фрида, r_0, введенного в работе [24]. Этот параметр является важнейшей характеристикой излучения в турбулентной атмосфере, определяющей требования к пространственному разрешению в адаптивных оптических системах. Идея работы [23] заключается в использовании недиагональной составляющей корреляционной функции градиента фазы волны, которая может быть измерена, скажем, с помощью датчика волнового фронта Шака–Хартмана [25]. Выражения, представленные в работе [23], были получены для случая, когда расстояние r между точками наблюдения намного больше радиуса первой зоны Френеля. Результаты, представленные в работе [26], дают выражения для произвольных расстояний r.

Выражения, представленные в работах [26] и [23], были получены из линеаризованного уравнения для логарифма огибающей волнового пакета. Необходимым условием для применения этого подхода является малость дисперсии Рытова σ_R^2, см., например, [6]. Однако, как было указано в работах [8, 27, 28], малости σ_R^2 может быть недостаточно для корректного вычисления корреляционной функции фазы на всех расстояниях r между точками наблюдения в рамках теории возмущений. Причина этого заключается в том, что в ряду возмущений могут быть члены, которые являются сингулярными при $r \to 0$ или $r \to \infty$, что нарушает однородность приближения. Действительно, разложение по σ_R^2 корреляционных функций огибающей Ψ перестает быть корректным при достаточно большом r.

Однако в ряду возмущений для корреляционных функций фазы огибающей присутствуют только градиенты логарифма огибающей. Это делает теорию возмущений для фазы однородной в σ_R^2. Вычисления следующего порядка в σ_R^2 для функции фазовой корреляции, описанной в работе [29], подтверждают это утверждение. Более того, теория возмущений, по-видимому, работает при больших r даже для $\sigma_R^2 > 1$.

Здесь мы приводим результаты прямого численного моделирования, чтобы показать применимость приближения, описанного в работе [26], в широком диапазоне расстояний r. Наши расчеты были выполнены с использованием традиционного подхода [30], в котором непрерывная турбулентная среда моделируется с помощью серии экранов, на которых происходят случайные фазовые сдвиги световой волны. Волна свободно распространяется между экранами. Статистика этих фазовых сдвигов выбрана таким образом, чтобы имитировать влияние непрерывных флуктуаций показателя преломления на световую волну.

Мы рассматриваем световые волновые пакеты, распространяющиеся в турбулентной среде, такой как атмосфера, предполагая, что мы имеем дело с монохроматической волной. Эти волновые пакеты могут быть охарактеризованы их огибающей, Ψ, которая описывает структуру волнового пакета на масштабах, превышающих его длину волны. Огибающая Ψ представляет собой комплексное поле, определяющее, скажем, электрическое поле, которое пропорционально $\mathrm{Re}\,[\Psi \exp(ik_0 z)]$, где k_0 – волновой вектор несущей волны, а z – координата в направлении распространения волнового пакета.

Огибающая Ψ подчиняется следующему параболическому уравнению

$$i\partial_z \Psi + \frac{1}{2k_0}\nabla^2\Psi + k_0\nu\Psi = 0. \tag{1}$$

Здесь ν обозначает флуктуацию показателя преломления, а ∇ обозначает градиент в направлении, перпендикулярном оси Z, $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$. Уравнение (1) подразумевает, что огибающая, Ψ, мгновенно подстраивается под состояние среды, которое описывается полем ν. Это свойство объясняется очень высокой скоростью света.

Исследование распространения света, основанное на уравнении (1), обычно включает в себя несколько этапов. Прежде всего, вводится источник, генерирующий некоторую начальную огибающую $\Psi_0(x, y, 0)$ при $z = 0$. Затем решается эволюционное уравнение (1) вдоль z с начальным условием $\Psi_0(x, y, 0)$ в заданном поле ν. И, наконец, можно найти корреляционные функции, в нашем случае для фазы Ψ, в конечной точке z, где находится приемник.

Статистические свойства показателя преломления ν можно охарактеризовать с помощью его структурной функции второго порядка. В инерционном интервале длин структурная функция подчиняется степенному закону

$$\langle[\nu(\mathbf{r}_1, z_1) - \nu(\mathbf{r}_2, z_2)]^2\rangle = C_n^2(r^2 + z^2)^{1/3}, \tag{2}$$

характерному для пассивного скаляра, см. [4, 5]. Здесь и ниже угловые скобки обозначают усреднение по времени. В выражении (2) величина C_n^2 определяет мощность флуктуаций показателя преломления, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $z = z_1 - z_2$. Выражение (2) означает, что турбулентные флуктуации в инерционном интервале статистически однородны и изотропны, что согласуется с экспериментальными наблюдениями, см. [31, 32].

Мы предполагаем, что длина трассы волнового пакета намного больше, чем все его характерные поперечные масштабы. Тогда поле ν можно рассматривать как величину, которая имеет короткую корреляцию вдоль оси Z. Это свойство мотивирует аппроксимацию

$$\langle \nu(\mathbf{r}_1, z_1)\nu(\mathbf{r}_2, \mathbf{z}_2)\rangle = \delta(z_1 - z_2)C_n^2\mathcal{A}(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Функция $\mathcal{A}$ в уравнении (3) определяется спектром флуктуаций показателя преломления. Широко используется спектр фон Кармана [33] $\propto (k^2 + \kappa^2)^{-5/6}$, где k – волновой вектор, а κ определяет внешний масштаб турбулентности L_0, $L_0 = 2\pi/\kappa$. Для спектра фон Кармана [23]

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) = \mathcal{A}_0 - 1.4572\, r^{5/3} + 1.1727\kappa^{1/3}r^2, \tag{4}$$

где $\mathcal{A}_0 \sim L_0^{5/3}$. Выражение (4) получено в предположении, что r намного меньше, чем L_0, и представляет собой начальные члены разложения по малому параметру r/L_0.

Корреляционная длина огибающей Ψ в поперечном направлении, которая является параметром Фрида r_0, определяется в соответствии с [24]

$$r_0^{-5/3} = 0.423\, k_0^2 \int_0^z d\zeta\, C_n^2(\zeta). \tag{5}$$

Для однородной среды, где C_n^2 не зависит от z

$$r_0^{-5/3} = 0.423\, k_0^2 z C_n^2. \tag{6}$$

Значение r_0 уменьшается по мере увеличения расстояния z, пройденного волновым пакетом.

Традиционно уровень мерцаний характеризуется безразмерным параметром, называемым дисперсией Рытова σ_R^2. Для возмущенной плоской волны дисперсия Рытова определяется как

$$\sigma_R^2 = 2.25\, k_0^{7/6} z^{5/6} \int_0^z d\zeta\, (1 - \zeta/z)^{5/6} C_n^2(\zeta), \tag{7}$$

см., например, [34]. Для однородной среды можно найти

$$\sigma_R^2 = 1.23\, C_n^2 k_0^{7/6} z^{11/6}, \tag{8}$$

взяв интеграл в (7). Значение σ_R^2 растет по мере прохождения волнового пакета.

Можно построить теорию возмущений для корреляционных функций $\Psi, \Psi^\star$. Как было отмечено в работе [6], условие применимости теории возмущений связано с малостью дисперсии Рытова σ_R^2 (8). Однако члены ряда возмущений растут по мере увеличения расстояния между точками. Следовательно, для получения разумных результатов необходимо провести глубокое пересуммирование ряда возмущений [13, 35]. Чтобы избежать этой трудности, мы переходим к уравнению для логарифма огибающей, $\ln\Psi$.

Фаза φ огибающей Ψ является мнимой частью $\ln\Psi$, тогда как действительная часть $\ln\Psi$ определяет абсолютное значение $|\Psi|$ огибающей. Уравнение (1) приводит к следующему уравнению для логарифма Ψ

$$\partial_z \ln\Psi - \frac{i}{2k_0}\nabla^2 \ln\Psi - \frac{i}{2k_0}(\nabla \ln\Psi)^2 - ik_0\nu = 0. \tag{9}$$

Обратим внимание, что, в отличие от линейного уравнения (1), уравнение (9) является нелинейным, оно имеет нелинейность второго порядка.

Логарифм огибающей, $\ln\Psi$, включает в себя как вклад от свободного распространения огибающей (без случайной дифракции), так и вклад от флуктуаций, обусловленных ν. Удобно исключить первый вклад, приходящийся на флуктуирующую величину $\eta = \ln(\Psi/\Psi_0)$, где Ψ_0 – огибающая для свободного распространения волны. Огибающая Ψ_0 является решением уравнения (9) для $\nu = 0$, завися от начального профиля огибающей. Уравнение для величины η может быть получено из уравнения (9), это

$$\begin{aligned}\partial_z\eta - \frac{i}{2k_0}\nabla^2\eta - \frac{i}{k_0}\nabla\ln\Psi_0\nabla\eta =\\ = ik_0\nu + \frac{i}{2k_0}(\nabla\eta)^2.\end{aligned} \tag{10}$$

Обратим внимание, что это уравнение, вообще говоря, пространственно неоднородно из-за наличия члена, содержащего Ψ_0. Уравнение (10) должно быть решено с нулевым начальным условием $\eta = 0$ при $z = 0$.

Введем следующие корреляционные функции

$$\varPhi(\mathbf{r}_1, z_1; \mathbf{r}_2, z_2) = \langle \eta(\mathbf{r}_1, z_1)\eta(\mathbf{r}_2, z_2)\rangle, \tag{11}$$
$$\varXi(\mathbf{r}_1, z_1; \mathbf{r}_2, z_2) = \langle \eta(\mathbf{r}_1, z_1)\eta^\star(\mathbf{r}_2, z_2)\rangle, \tag{12}$$

связанные с η. Здесь угловые скобки обозначают усреднение по времени или, в теоретическом контексте, усреднение по статистике ν. Парная корреляционная функция флуктуаций фазы φ огибающей Ψ выражается как

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1, z_1)\varphi(\mathbf{r}_2, z_2)\rangle = -\frac{1}{4}\left(\varPhi + \varPhi^\star - \varXi - \varXi^\star\right), \tag{13}$$

где все функции в правой части уравнения имеют аргументы $r_1, z_1; r_2, z_2$.

Корреляционные функции (11), (12) можно найти, если пренебречь нелинейным членом в уравнении (10). Тогда уравнение (10) становится линейным и η может быть выражена через ν с использованием функции Грина. Затем корреляционные функции (11), (12) могут быть найдены усреднением произведения $\eta_1\eta_2$ и $\eta_1\eta_2^\star$ с использованием выражения (3), для разных Ψ_0.

Программа была выполнена в работе [26] для начальных профилей $\Psi_0(x,y,0)$, соответствующих плоской волне и точечному источнику. В этих случаях корреляционные функции (11), (12) записываются в терминах вырожденной гипергеометрической функции. Переходя к парной корреляционной функции фазы (13) и беря градиенты, находим парную корреляционную функцию производных фазы

$$Q_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r_{1\alpha}}\varphi(\mathbf{r}_1,z)\frac{\partial}{\partial r_{2\beta}}\varphi(\mathbf{r}_2,z)\right\rangle. \quad (14)$$

Она может быть записана явно для двух упомянутых случаев, см. [26].

Для начальной плоской волны парная корреляционная функция градиентов фазы записывается в виде

$$Q_{\alpha\beta} = 1.435\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/3}\left\{\frac{5}{3}\left[1+f_1(\xi)\right]\delta_{\alpha\beta} + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{3}\left[1+f_2(\xi)\right]\left(\delta_{\alpha\beta}-2\frac{r_\alpha r_\beta}{r^2}\right)\right\} - \frac{10.2}{L_0^{1/3}r_0^{5/3}}\delta_{\alpha\beta}, \quad (15)$$

где

$$\xi = k_0 r^2/(4z), \quad (16)$$

а функции $f_1(\xi), f_2(\xi)$ равны нулю при $\xi=0$ и стремятся к единице при $\xi\to\infty$. Графики этих функций можно найти в [26]. Интересным свойством выражения (15) является то, что недиагональная величина Q_{xy} не зависит от L_0 и достигает локального максимума при

$$r^* = 1.66(\sigma_R^2)^{3/5} r_0. \quad (17)$$

Это свойство позволяет извлекать информацию о дисперсии Рытова из экспериментальных данных.

Поправки к парным корреляционным функциям (15) связаны с нелинейным членом в уравнении. (10). Первые неисчезающие поправки появляются во втором порядке разложения по нелинейности. Можно подробно проанализировать первую поправку. Результаты анализа приведены в работе [29]. Опуская технические подробности, мы приводим здесь только основные результаты.

На малых расстояниях, где $r \ll \sqrt{z/k_0}$, в теории возмущений появляются сингулярные вклады. Однако эти вклады компенсируют друг друга при вычислении $Q^{(1)}_{\alpha\beta}$. В результате для $r \lesssim \sqrt{z/k_0}$ оказывается справедливой следующая оценка:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}/Q^{(0)}_{\alpha\beta} \sim \sigma_R^2. \quad (18)$$

Заметим, что эта оценка верна, несмотря на то, что обе величины, $Q^{(0)}_{\alpha\beta}$ и $Q^{(1)}_{\alpha\beta}$, расходятся при $r\to 0$, см. (15).

Для больших расстояний, $r \gg \sqrt{z/k_0}$, поправка к $Q^{(0)}_{\alpha\beta}$ имеет дополнительную малость:

$$Q^{(1)}_{\alpha\beta}/Q^{(0)}_{\alpha\beta} \sim \sigma_R^2\frac{z}{k_0 r^2} \ll \sigma_R^2. \quad (19)$$

Эта оценка показывает, что применимость теории возмущений улучшается, несмотря на увеличение флуктуаций фазы. Это связано с тем, что нелинейный член в уравнении (10) содержит пространственные производные поля η, а не его амплитуду. В свою очередь, корреляции градиентов $\nabla\eta$ уменьшаются с увеличением r.

Можно проверить, что такие неравенства имеют место и в более высоких порядках теории возмущений. Это означает однородность аппроксимации для $Q_{\alpha\beta}$, основанной на разложении в σ_R^2. Таким образом, можно ожидать, что выражение (15) хорошо описывает наблюдаемые данные при условии $\sigma_R^2 \ll 1$. Основная цель этой работы – проверить утверждение численно.

Далее мы представляем результаты нашего численного моделирования. Оно соответствует монохроматической волне с длиной волны $\lambda = 0.55$ микрон, которая распространяется по статистически однородной траектории. Исходный профиль Ψ имеет ширину 1.5 м и характеризуется плоской центральной частью и супергауссовыми крыльями. Ширина намного превышает размер неоднородностей, связанных с флуктуациями показателя преломления. Таким образом, в области вблизи оси пучка реализуется режим плоской волны. Траектория луча характеризуется определенными значениями параметра Фрида r_0 и дисперсии Рытова σ_R^2.

Предполагается, что распространение пучка определяется параболическим уравнением (1). Численно уравнение (1) решалось методом конечных разностей с разделением процессов дифракции и преломления, см., например, [36]. Непрерывная турбулентная среда моделируется цепочкой бесконечно тонких фазовых экранов, расположенных перпендикулярно направлению распространения пучка. На каждом экране генерируется случайный скачок фазы огибающей, см., например, [30]. Вычислительный процесс включает в себя серию последовательных преобразований огибающей Ψ, включая добавление фазовых скачков на экранах и свободной дифракции Ψ между ними.

Дифракция излучения в областях между экранами рассчитывалась путем решения уравнения распространения с использованием разностной схемы Ладагина [37], которая имеет нулевую амплитудную погрешность и фазовую погрешность четвертого порядка при интегрировании оператора дифракции. Цепочка экранов была подобрана таким образом, чтобы при переходе от одного экрана к другому фазовый сдвиг из-за дифракции был небольшим, а дисперсия фаз на экране не превышала 1 рад^2. Наименьший масштаб пространственных неоднородностей, то есть эффективный внутренний масштаб турбулентности, в численной модели определяется шагом расчетной сетки и лежит в диапазоне от 0.25 до 1 см.

Добавление скачка фазы $\Delta\varphi$ на экране означает следующее преобразование огибающей

$$\Psi_+(x,y) = \exp[i\Delta\varphi(x,y)]\Psi_-(x,y). \qquad (20)$$

Здесь $\Psi-$ – огибающая перед экраном, а $\Psi+$ – ее значение после экрана. Заметим, что преобразование (20) не затрагивает абсолютное значение огибающей Ψ.

Скачки фазы для разных экранов являются независимыми случайными функциями. Для каждого экрана они генерируются с использованием парной корреляционной функции

$$\langle \Delta\varphi(\mathbf{r}_1)\Delta\varphi(\mathbf{r}_2)\rangle = C_n^2 k_0^2 \mathcal{A}(\mathbf{r})\Delta z, \qquad (21)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и Δz – расстояние между экранами. Выражение (21) представляет интегральное влияние случайного показателя дифракции ν в слое шириной Δz в соответствии с уравнениями (3), (10). Функция $\mathcal{A}(r)$ была выбрана соответствующей спектру фон Кармана [33]

$$\mathcal{A}(r) = \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \frac{8.19}{(q^2+\kappa^2)^{11/3}}, \qquad (22)$$

где $\kappa = 2\pi/L_0$.

Генерация случайных скачков фазы $\Delta\varphi$ на экранах осуществлялась с использованием комбинации обычного спектрального метода [30] и так называемого метода субгармоник [38, 39] (подробнее см. ссылку [40]). Метод субгармоник позволяет нам расширить диапазон применимости степенной корреляционной функции показателя преломления, тем самым улучшая численный процесс. В спектральном методе случайное фазовое поле формируется путем фильтрации гауссовского псевдослучайного поля, а передаточная функция фильтра определяется пространственным спектром флуктуаций фазы. Этот метод позволяет формировать фазовые экраны с внешним масштабом турбулентности $L_0 \le D/2$, где D – поперечный размер счетной области.

Метод субгармоник используется для моделирования крупномасштабных искажений с $L_0 > D/2$ при сохранении размера области подсчета D. Основная идея этого метода заключается в уплотнении узлов вычислительной сетки в спектральной плоскости вокруг нулевой гармоники. Это делается итеративно путем добавления гармоник (субгармоник) к низкочастотной части пространственного спектра. На каждой итерации к фазовому спектру добавляются дополнительные 32 гармоники с шагом, в три раза меньшим, чем предыдущий. Таким образом, точность воспроизведения низкочастотной части фазового спектра возрастает с увеличением числа итераций. В наших расчетах количество итераций варьировалось от 4 до 8.

Мы использовали 100–200 фазовых экранов в зависимости от интенсивности сцинтилляций, чтобы гарантировать, что приращение фазы между соседними экранами невелико. В конце турбулентной трассы записывался профиль огибающей Ψ. При прохождениях волны по случайным реализациям турбулентной трассы, сформированным методом Монте-Карло, набирался случайный набор Ψ. В расчетах его размер варьировался от 300 до 500. Используя этот набор, можно найти усредненные характеристики излучения. Мы отслеживали процесс сходимости и останавливали его, когда корреляционная функция переставала изменяться в наиболее интересной области (вблизи максимума), получая репрезентативный результат.

Точность рассчитанной модели была определена следующим образом. Для набора поперечных распределений $\Psi(x,y)$, записанных в конце трассы, была рассчитана парная корреляционная функция

$$F_{\mathrm{num}}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \langle \Psi(\mathbf{r}_1)\Psi^\star(\mathbf{r}_2)\rangle, \qquad (23)$$

где $\mathbf{r}_1 = (x_1,y_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2,y_2)$, а угловые скобки обозначают усреднение по набору Ψ. Для статистически однородной и изотропной турбулентности парная корреляционная функция зависит только от расстояния между точками, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, и является реальной. Действительно, эти свойства проявляются после усреднения.

Для начальной плоской волны, проходящей турбулентную рассу, где флуктуации показателя преломления определяются спектром фон Кармана, нормированная парная корреляционная функция равна

$$\ln\left[F(r)/F(0)\right] = -3.44\left(\frac{r}{r_0}\right)^{5/3}\times$$
$$\times\left[1 - 1.485\left(\frac{r}{L_0}\right)^{1/3}\right]. \qquad (24)$$

Выражение было получено аналитически при малых r/L_0, см. [41, 42].

Сравнение аналитического выражения (24) и численных данных, полученных в результате моделирования, для конкретных значений параметров σ_R^2, r_0 и L_0 показано на рис. 1. Видно, что числовые данные довольно хорошо воспроизводят аналитическое выражение, что указывает на то, что все основные параметры турбулентности адекватно воспроизведены в нашем моделировании.

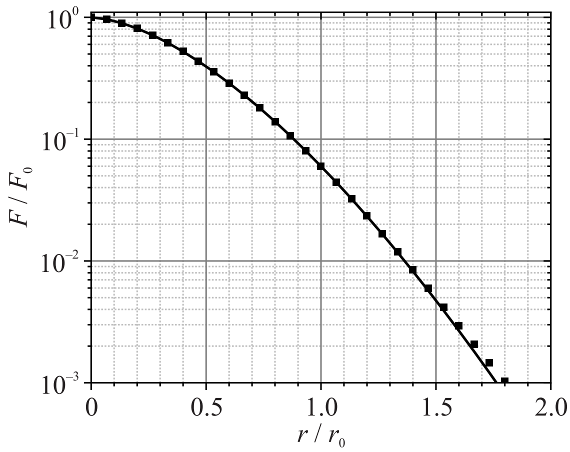

Рис. 1. Парная корреляционная функция (23) как функция от r/r_0 для $\sigma_R^2 = 0.5$, $r_0 = 3.75$ см, $L_0 = 20$ м. Сплошная линия проведена с использованием аналитического выражения (24), а заполненные квадраты представляют числовые данные, полученные в результате моделирования

Теперь перейдем к нашим числовым данным для парной корреляционной функции градиентов фазы $Q_{\alpha\beta}$. Мы сосредоточимся на недиагональных компонентах корреляционной функции фазового градиента, которые нечувствительны к крупномасштабным флуктуациям показателя преломления. Сравнение численных данных с аналитическим выражением (15) показано на рис. 2, 3. Мы видим удовлетворительное соответствие между численными данными и аналитическими предсказаниями для двух

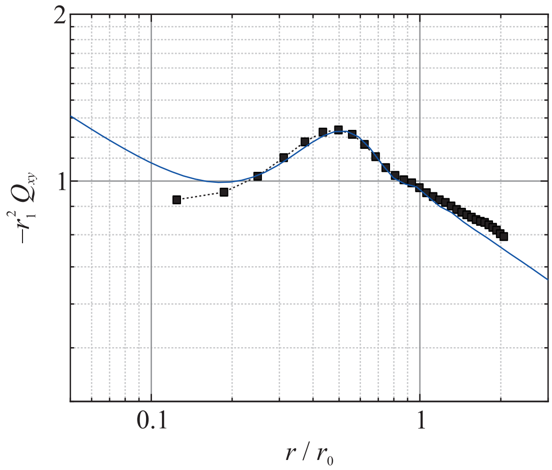

Рис. 2. (Цветной онлайн) Произведение $-r_0^2 Q_{xy}$ как функция r/r_0, взятое при $x = y = r/\sqrt{2}$ для $\sigma_R^2 = 0.14$, $r_0 = 5.69$ см, $L_0 = 20$ м, где Q_{xy} – это недиагональная составляющая парной корреляционной функции градиентов фазы. Сплошная линия проведена с использованием аналитического выражения (15), а заполненные квадраты представляют числовые данные, полученные в результате моделирования

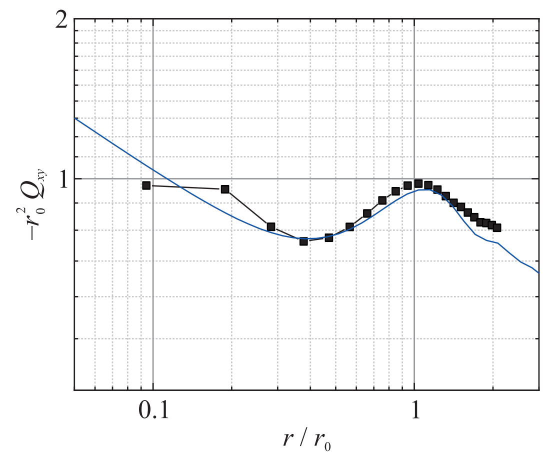

Рис. 3. (Цветной онлайн) Произведение $-r_0^2 Q_{xy}$ как функция r/r_0, взятое при $x = y = r/\sqrt{2}$ для $\sigma_R^2 = 0.5$, $r_0 = 3.75$ см, $L_0 = 20$ м, где Q_{xy} – это недиагональная составляющая функции парной корреляционной функции градиентов фазы. Сплошная линия проведена с использованием аналитического выражения (15), а заполненные квадраты представляют численные данные, полученные в результате моделирования

случаев, соответствующих $\sigma_R^2 = 0.14$ и $\sigma_R^2 = 0.5$. Мы наблюдаем отклонения численных данных от аналитических прогнозов как на малых, так и на больших расстояниях, что указывает на недостаточное усреднение. На малых расстояниях это объясняется сингулярным поведением корреляционной функции градиентов фазы, а на больших расстояниях – ее малым значением.

Одной из замечательных особенностей недиагональной составляющей корреляционной функции градиентов фазы, Q_{xy}, является то, что она имеет максимум, который можно увидеть на рис. 2, 3. Положение максимума обозначается как r^*. В соответствии с результатами работы [26] $\sigma_R^2 \propto (r^*/r_0)^{5/3}$. Коэффициент в законе пропорциональности может быть найден численно из явных аналитических выражений, приведенных в [26]. Найденные численно точки, изображенные треугольниками, представлены на рис. 4, они соответствуют закону $\sigma_R^2 = 0.43(r^*/r_0)^{5/3}$, см. уравнение (17). Мы видим хорошее соответствие между аналитическими предсказаниями и численными результатами.

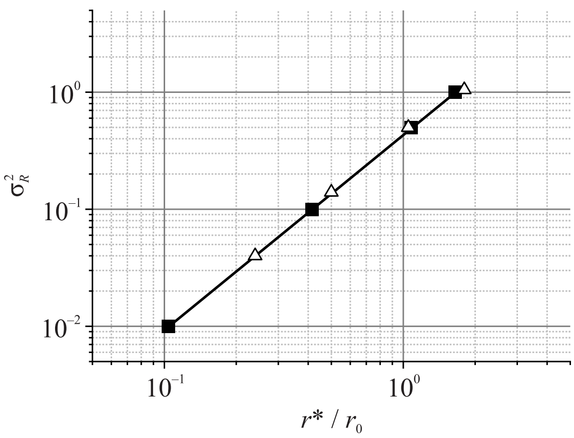

Рис. 4. Зависимость σ_R^2 от r^*/r_0, где r^* – это расстояние, при котором наблюдается максимум недиагональной составляющей корреляционной функции градиентов фазы Q_{xy}. Квадраты представляют собой аналитические предсказания, треугольники – результаты численного моделирования, а сплошная линия определяется соотношением $\sigma_R^2 = 0.43(r^*/r_0)^{5/3}$

Основываясь на численных наблюдениях, мы приходим к выводу, что аппроксимация нулевого порядка для корреляционной функции фазовых градиентов (15) хорошо работает, по крайней мере, до $\sigma_R^2 = 0.5$. Это открывает возможность его использования в приложениях адаптивной оптики, работающих в режиме слабых сцинтилляций.

Финансирование работы. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики Российской Федерации, Секция 4, этап 2026–2028.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. N. Kolmogorov, “The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers”, DAN **30**, 299 (1941).
2. A. N. Kolmogorov, “Dissipation of Energy in Locally Isotropic Turbulence”, DAN **32**, 19 (1941).
3. A. M. Obukhov, “On the distribution of energy in the turbulent flow spectrum”, DAN **32**, 22 (1941).
4. A. M. Obukhov, “The structure of the temperature field in a turbulent flow”, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Geogr. and Geophys. **13**, 58 (1949).
5. S. Corrsin, “On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in isotropic turbulence”, J. Appl. Phys. **22**, 469 (1951).
6. V. I. Tatarskii, *Wave propagation in turbulent atmosphere* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian] [V. I. Tatarskii, *The Effects of the Turbulence Atmosphere on Wave Propagation* (Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971)].
7. J. W. Goodman, *Statistical Properties of Laser Speckle Pattern*, in *Laser Speckle and Related Phenomena*, ed. by J. C. Dainty, (Springer-Verlag, Berlin, 1975).
8. Yu. A. Kravtsov, S. M. Rytov, and V. I. Tatarskii, “Statistical problems in diffraction theory”, Sov. Phys.-Uspekhi **18**, 118 (1975).
9. S. M. Rytov, Yu. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics 4: Wave Propagation through Random Media* (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
10. J. W. Strohbehn (editor), *Laser Beam Propagation in the Atmosphere* (Springer, N.Y., 1978).
11. L. C. Andrews and R. L. Phillips, *Laser Beam Propagation Through Random Media, Press Monograph Series*, PM **53** (SPIE Optical Engineering Press, 1998).
12. A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (Academic Press, N.Y., 1978).
13. M. I. Charnotskii, “Asymptotic analysis of finite-beam scintillations in a turbulent medium”, Waves in Random Media **4**, 243 (1994).
14. M. A. Vorontsov, G. W. Carhart, V. S. R. Gudimetla, T. Weyrauch, E. Stevenson, S. L. Lachinova, L. A. Beresnev, J. Liu, K. Rehder, and J. F. Riker, *Characterization of atmospheric turbulence effects over 149 km propagation path using multi-wavelength laser beacons*, in *Proc. 2010 AMOS Conf.* (Curran Associates, Inc., 2010).
15. M. A. Vorontsov, V. R. Gudimetla, G. W. Carhart, T. Weyrauch, S. L. Lachinova, E. Polnau, J. Rierson, L. A. Beresnev, J. Liu, and J. F. Riker, *Comparison of turbulence-induced scintillations for multi-wavelength laser beacons over tactical (7 km) and long (149 km) atmospheric propagation paths*, in *Proc. 2011 AMOS Conf.* (Curran Associates, Inc., 2011).
16. S. L. Lachinova and M. A. Vorontsov, “Giant irradiance spikes in laser beam propagation in volume turbulence: analysis and impact”, J. Opt. **18**, 025608 (2016).

17. P. M. Lushnikov and N. Vladimirova, "Toward defeating diffraction and randomness for laser beam propagation in turbulent atmosphere", Pis'ma v ZhETF **108**, 611 (2018) [P. M. Lushnikov and N. Vladimirova, "Toward defeating diffraction and randomness for laser beam propagation in turbulent atmosphere", JETP Lett. **108**, 571 (2018)].
18. V. P. Aksenov, V. V. Dudorov, V. V. Kolosov, and V. Yu. Venediktov, "Probability distribution of intensity fluctuations of arbitrary-type laser beams in the turbulent atmosphere", Opt. Express **27**, 024705 (2019).
19. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev "Universal tail of the probability density function of the intensity of light propagating in a turbulent medium", Phys. Rev. E **111**, 064104 (2025).
20. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, "High intensity statistics of light propagating in turbulent fluid", Usp. Fiz. Nauk, **195**, 1179 (2025) [I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, "High intensity statistics of light propagating in turbulent fluid", Phys.-Uspekhi **68**(11), 1112 (2025)].
21. J. M. Beckers, "Adaptive Optics for Astronomy: Principles, Performance, and Applications", Annu. Rev. Astron. Astrophys. **31**, 13 (1993).
22. R. Tyson, *Principles of Adaptive Optics*, Third ed. (Taylor and Francis, London, 2010).
23. V. A. Bogachev, I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, "Matrix of Correlations between the Gradients of the Phase of the Light Wave as a Way to Measure the Principal Parameters of Turbulence", Pis'ma v ZhETF **120**, 598 (2024) [V. A. Bogachev, I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, "Matrix of Correlations between the Gradients of the Phase of the Light Wave as a Way to Measure the Principal Parameters of Turbulence", JETP Lett. **120**, 573 (2024)].
24. D. L. Fried, "Differential angle of arrival: theory, evaluation and measurement feasibility", Radio Sci. **10**, 71 (1975).
25. B. C. Platt and R. Shack, "History and Principles of Shack-Hartmann Wavefront Sensing", J. Refract. Surg. **17**(5), 573 (2001).
26. I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, "Correlations of the phase fluctuations in the presence of weak scintillations", JOSA A **42**(11), 1654 (2025).
27. M. I. Sancer and A. D. Varvatsis, "A comparison of the Born and Rytov methods", Proc. IEEE **58**, 140 (1970).
28. Yu. N. Barabanenkov, Yu. A. Kravtsov, S. M. Rytov, and V. I. Tatarskii, "Status of the theory of propagation of waves in a randomly inhomogeneous medium", Sov. Phys.-Uspekhi **13**, 551 (1970).
29. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, "Perturbation theory for phase correlations of a light wave propagating in a turbulent medium", arXiv:2601.08279 [physics.optics] (2026).
30. V. P. Kandidov, "Monte Carlo method in nonlinear statistical optics", Phys.-Uspekhi **39** (12), 1243 (1996).
31. A. S. Monin and A. M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence* (MIT Press, 1975).
32. U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, "Progress in the Statistical Theory of Turbulence", (Cambridge University Press, N.Y., 1995).
33. T. von Karman, "Progress in the Statistical Theory of Turbulence", Proceedings of the National Academy of Sciences **34**, 530 (1948).
34. M. F. Spencer, *Limitations of deep-turbulence problem*, in *Proc. Optica*, article PW3F.1 (Optica Publishing Group, Washington, DC, 2021).
35. I. Kolokolov, V. Lebedev, and P. Lushnikov, "Statistical properties of a laser beam propagating in a turbulent medium", Phys. Rev. E **101**, 042137 (2020).
36. J. A. Fleck, J. R. Morris, and M. D. Feit, "Time-dependent propagation of a high energy laser beam through the atmosphere", Appl. Phys. **10**(1), 129 (1976).
37. V. K. Ladagin, "Numerical integration of quasioptical equation", VANT. Ser. Metodiki i Programmy Chislennogo Resheniya Zadach Matematicheskoy Fiziki **1**, 19 (1985) [in Russian].
38. V. P. Kandidov, M. P. Tamarov, and S. A. Shlyonov, "Influence of the atmospheric turbulence outer scale on the variance of a laser beam gravity center shifts", Atmos. Ocean. Opt. **11**(1), 23 (1998).
39. E. M. Johansson and D. T. Gavel, *Simulation of stellar speckle imaging, Proc. SPIE 2200, Amplitude and Intensity Spatial Interferometry II* (SPIE Optical Engineering Press, 9 June 1994).
40. V. A. Bogachev, A V. Nemtseva, and F. A. Starikov, "Star imaging under the influence of angular anisoplanatism in turbulent atmosphere", Tech. Phys. **69**(6), 769 (2024).
41. V. I. Shishov, "On the theory of wave propagation in random media", Izv. VUZ, Radiofiz. **11**, 866 (1968).
42. V. I. Tatarskii, "Light Propagation in a Medium with Random Refractive Index Inhomogeneities in the Markov Random Process Approximation", ZhETF **56**, 2107 (1969). [V. I. Tatarskii, "Light Propagation in a Medium with Random Refractive Index Inhomogeneities in the Markov Random Process Approximation", Sov. Phys. JETP **29**, 1133 (1969)].