Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 10, с. 706 – 711

Трехмерное векторное туннелирование оптической волны в ENZ-среде

В. П. Рубан[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 10 апреля 2026 г.
После переработки 17 апреля 2026 г.
Принята к публикации 19 апреля 2026 г.

Для эффективно изотропной ENZ-среды с учетом керровской нелинейности, слабой пространственной неоднородности, диссипации и внешней накачки численно исследовано туннелирование специфических тороидальных световых структур между двумя потенциальными ямами в рамках соответствующего векторного уравнения Гинзбурга–Ландау. Оптическое поле характеризуется двумя комплексными (псевдо)векторами $\mathbf{C}_{1,2}(t)$, так что каждый вектор задает амплитуду и пространственную ориентацию структуры в своей яме. Векторы $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ связаны туннельным взаимодействием, параметры которого различны для компонент вдоль и поперек геометрической оси. Динамика приближенно описывается замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, где наряду с нелинейностью и туннелированием также учитываются диссипативные эффекты, в том числе и те, что обусловлены возбуждением (в неоднородной среде) слабого коротковолнового потенциального электрического поля.

DOI: 10.7868/S3034576626050155

Введение. Туннелирование волн – одно из наиболее фундаментальных физических явлений. Этот эффект привлек к себе внимание не только в квантовой механике [1], но и в классической физике. Например, в оптике туннелирование света играет важную роль, в частности – при формировании солитонов в системах близко расположенных световодов (см., например, [2–7] и ссылки там). В подобных конфигурациях эффективный многоямный потенциал, в котором распространяется волна, имеет двумерный характер (по поперечным координатам), тогда как продольная координата играет роль эволюционной переменной.

В данной работе нас будет интересовать более сложное, существенно трехмерное туннелирование векторного оптического поля. Реализация такого нового режима представляется возможной в объемных ENZ-средах (Epsilon Near Zero) – искусственно созданных композитных материалах, в которых собственные числа вещественной части тензора эффективной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{jl}(\omega)$ проходят через ноль в области частот видимого либо инфракрасного спектра (см., например, [8–18] и ссылки там). Вариант подобной ENZ-среды – диэлектрическая матрица, в которую включены металлические шарики субволнового размера (см. [19] и ссылки там). Для простоты мы будем предполагать среду эффективно изотропной, с частотой ω_0 перехода через ноль [20]. Очень важно, что уравнение движения (см. далее (6)), которому подчиняется комплексная временная огибающая $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ электрического поля оптической волны, в главном приближении суть уравнение Шредингера для "поперечно-векторной" частицы. Если размер шариков плавно меняется в пространстве, то возникает эффективный внешний потенциал $U(\mathbf{r})$, который при наличии достаточно глубокого минимума (или нескольких минимумов) способен полностью захватить световую волну. Как мы увидим далее, в центрально симметричной потенциальной яме (когда функция $U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}|)$ фактически зависит только от радиальной координаты r) существуют связанные состояния с тороидальной симметрией вида

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\rm tor}(\mathbf{r};\mathbf{C})e^{i\Xi t} = \Big[\mathbf{C}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\Big]R(r)e^{i\Xi t}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{C}$ – произвольный малый комплексный (псевдо)вектор, Ξ – положительное собственное значение. Вещественная функция $R(r)$ удовлетворяет обычному скалярному радиальному уравнению Шредингера для состояний с моментом импульса $l = 1$ [1]:

$$-R'' - 2\frac{R'}{r} + 2\frac{R}{r^2} + V(r)R = -\Xi R. \qquad (2)$$

[1)]e-mail: ruban@itp.ac.ru

Нас интересует решение с радиальным квантовым числом $n_r = 0$ (самое низкое по частоте/энергии), причем нормированное условием

$$\frac{8\pi}{3}\int_0^\infty R^2 r^2 dr = 1. \tag{3}$$

Это обеспечивает удобную для дальнейшего анализа нормировку

$$\int |\mathbf{E}_{\rm tor}(\mathbf{r};\mathbf{C})|^2 d\mathbf{r} = |\mathbf{C}|^2. \tag{4}$$

По сути, мы имеем здесь два вещественных вектора – $\mathrm{Re}\,\mathbf{C}$ и $\mathrm{Im}\,\mathbf{C}$, которые в общем случае задают два по-разному ориентированных в пространстве вещественных тора. В линейном пределе оба вектора неподвижны, но при учете слабой нелинейности керровского типа, как будет показано далее, они вращаются вокруг их векторного произведения.

Пусть теперь у нас имеются две одинаковые ямы с подобными световыми сгустками, на расстоянии d одна от другой (не слишком далеко, но и не слишком близко), причем

$$U(\mathbf{r}) = V(|\mathbf{r}-\mathbf{d}/2|) + V(|\mathbf{r}+\mathbf{d}/2|). \tag{5}$$

Очевидно, что между ямами должно происходить туннелирование света. В результате совместного действия туннелирования и нелинейности, а также с учетом дисперсионной диссипации и общего линейного усиления, динамика соответствующих комплексных векторов $\mathbf{C}_1(t)$ и $\mathbf{C}_2(t)$ окажется довольно нетривиальной.

Цель данной работы – вывести соответствующую приближенную эволюционную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) для $\mathbf{C}_{1,2}(t)$, а также впервые пронаблюдать подобное векторное туннелирование непосредственно в трехмерном численном эксперименте на основе недавно предложенной модели [20].

Аналитические оценки. В рассматриваемой нами модели ENZ-среды квазимонохроматическая световая волна описывается векторным уравнением Гинзбурга–Ландау, которое мы сразу же представим в обезразмеренном виде (см. подробности в [20]):

$$\begin{aligned} i\mathbf{E}_t = (1-i\nu_\perp)\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} - (D_\parallel - i\nu_\parallel)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) +\\ + [U(\mathbf{r}) + iG]\mathbf{E} - (1+i\sigma)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} - \eta(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}^*. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь G – малый коэффициент линейного усиления за счет внешней накачки, $D_\parallel$ – малый дисперсионный параметр для потенциальных волн, которые с необходимостью присутствуют в изотропной ENZ-среде [21] и являются аналогом ленгмюрровских волн в плазме [22–25], $\nu_\perp$ и $\nu_\parallel$ – дисперсионно-диссипативные коэффициенты, имеющие такой же порядок малости, что и $D_\parallel$. Рассматриваемая фокусирующая нелинейность керровского типа характеризуется диссипативным параметром σ и (вообще говоря, комплексным) параметром η. Однако для удобства численного моделирования мы далее положим $\sigma = 0$, $\eta = 0.5$ (см. [20]), так что вся диссипация будет происходить диффузионным образом за счет $\nu_\perp$ и $\nu_\parallel$.

Принципиально важно, что в силу малости $D_\parallel \sim 10^{-3}$ соответствующие потенциальные волны оказываются короткими по сравнению с соленоидальными волнами той же частоты, и поэтому затухают гораздо быстрее. “Самостоятельные” потенциальные структуры могут сформироваться только при сильно различных коэффициентах усиления $G_\parallel \gg G_\perp$ [20]. Здесь же имеется в виду случай равных $G_\parallel = G_\perp = G$, так что основной интерес для нас представляют почти соленоидальные решения уравнения (6).

Положим временно $G = 0$ и заметим, что в случае одной центрально-симметричной ямы в линейном пределе существуют строго соленоидальные решения уравнения (6) вида

$$\mathbf{E}_\perp = [\mathbf{r}\times\nabla\Psi(\mathbf{r},t)], \tag{7}$$

где скалярная комплексная функция $\Psi(\mathbf{r},t)$ удовлетворяет уравнению Шредингера для частицы с комплексной массой:

$$i\Psi_t = -(1-i\nu_\perp)\hat{\Delta}\Psi + V(r)\Psi. \tag{8}$$

Естественно, что $D_\parallel$ и $\nu_\parallel$ никак не влияют на такие поперечно-электрические решения. В частности, имеются собственные функции

$$\Psi = Y_{l,m}(\mathbf{r}/r)\psi_l(r), \tag{9}$$

соответствующие состояниям с угловым моментом l (начиная с $l = 1$) и магнитным квантовым числом m [1]. Нас далее будут интересовать решения при $l = 1$, когда

$$\mathbf{E} = \Big[\mathbf{C}\times\frac{\mathbf{r}}{r}\Big]\psi_1(r)e^{\Lambda t}, \tag{10}$$

где Λ – комплексное собственное число. В силу малости $\nu_\perp$ диссипация здесь дает лишь малые поправки к консервативному решению (1), так что $\psi_1(r) \approx R(r)$, $\Lambda \approx -\gamma + i\Xi$, причем малый коэффициент затухания $\gamma \sim \nu_\perp/S^2$, где S – характерная ширина ямы. Учет параметра G приводит к сдвигу собственного значения $\Lambda \to \Lambda + G$.

Все остальные собственные функции линеаризованного уравнения (6) имеют поперечно-магнитную структуру

$$\mathbf{E}_{\rm TM} = \mathbf{r}Y_{l,m}(\mathbf{r}/r)F(r) + \nabla[Y_{l,m}(\mathbf{r}/r)\Phi(r)]. \quad (11)$$

В них присутствует заметная, а то и вовсе основная доля коротких потенциальных волн, что дает большие коэффициенты затухания. Такие решения нас не интересуют.

Пусть теперь имеются две потенциальные ямы с центрами на вертикальной оси в точках $z = \pm d/2$. В этом случае чисто соленоидальные решения возможны лишь для осесимметричных конфигураций, когда $\mathbf{C}_{1,2} \propto \mathbf{e}_z$. Как и при скалярном туннелировании, существуют два близких по частоте $\Omega = -\Xi \mp J_\parallel$ собственных состояния

$$\mathbf{E}^{(z)}_{\pm} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\mathbf{E}_{\rm tor}\Big(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{d}}{2};\mathbf{e}_z\Big) \pm \mathbf{E}_{\rm tor}\Big(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{d}}{2};\mathbf{e}_z\Big)\Big], \quad (12)$$

причем знаку “+” соответствует состояние с меньшей частотой $\Omega \approx -\Xi - J_\parallel$. Коэффициент затухания для обоих решений мало отличается от γ.

Заметим попутно, что осесимметричные соленоидальные решения вида $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}]F(\sqrt{x^2+y^2}, z, t)$ возможны при произвольном потенциале $U(\sqrt{x^2+y^2}, z)$. В этом случае туннелирование носит, как правило, скалярный характер.

Двухямные собственные решения с поперечными по отношению к оси симметрии векторами $\mathbf{C}_{1,2}$ с необходимостью включают в себя малые потенциальные коротковолновые добавки. Эти добавки обусловлены взаимодействием между соленоидальным и потенциальным полями через слагаемое $U(\mathbf{r})\mathbf{E}$ в уравнении (6). Надо сказать, что потенциальный вклад заметно увеличивает общий темп диссипации двухямных “поперечных” состояний, хотя в главном приближении они по-прежнему представляют собой линейные комбинации тороидальных полей:

$$\mathbf{E}^{(x,y)}_{\pm} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\mathbf{E}_{\rm tor}\Big(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{d}}{2};\mathbf{e}_{x,y}\Big) \pm \mathbf{E}_{\rm tor}\Big(\mathbf{r}+\frac{\mathbf{d}}{2};\mathbf{e}_{x,y}\Big)\Big]. \quad (13)$$

Теперь состояние с меньшей частотой $\Omega \approx -\Xi - J_\perp$ соответствует знаку “$-$”, при котором два поперечно ориентированных тороидальных поля с разнесенными центрами конструктивно суммируются вблизи начала координат. Нетривиальный факт состоит в том, что из-за различия в потенциальных добавках коэффициенты затухания для поперечных состояний существенно различаются между собой: более низкое по частоте состояние затухает быстрее:

$$\gamma^{(-)}_\perp > \gamma^{(+)}_\perp > \gamma. \quad (14)$$

Это обстоятельство выяснилось при численном моделировании линеаризованного уравнения (6). Аналитические оценки для $\gamma^{(\pm)}_\perp$ пока отсутствуют. Кроме того, подтвердилось естественное предположение о справедливости неравенства туннельных параметров $J_\perp > J_\parallel$, которое обусловлено несколько большим поперечным размером тора по сравнению с его продольным размером и, как следствие этого, более благоприятными условиями для туннелирования при поперечной ориентации.

Рассмотрим суперпозицию собственных состояний (без учета общего множителя $\exp(i\Xi t)$) с коэффициентами $A^{(j)}_\pm$, где $j = \{x, y, z\}$. Принимая во внимание вышеизложенные замечания, мы приходим к выводу, что в линейном приближении эти величины удовлетворяют диагональной системе ОДУ:

$$\dot A^{(z)}_\pm = [G-\gamma \pm iJ_\parallel]A^{(z)}_\pm, \quad \dot A^{(x,y)}_\pm = [G-\gamma^{(\pm)}_\perp \mp iJ_\perp]A^{(x,y)}_\pm. \quad (15)$$

Нам, однако, будет более удобно иметь дело именно с векторами $\mathbf{C}_{1,2}$, поскольку нелинейный вклад тогда выглядит проще. С учетом равенств

$$C^{(j)}_1 = \frac{[A^{(j)}_+ + A^{(j)}_-]}{\sqrt{2}}, \qquad C^{(j)}_2 = \frac{[A^{(j)}_+ - A^{(j)}_-]}{\sqrt{2}} \quad (16)$$

и нормировки функции $R(r)$, получаем приближенные уравнения, определяющие динамику векторов $\mathbf{C}_{1,2}$:

$$i\dot C^{(z)}_{1,2} = i[G-\gamma]C^{(z)}_{1,2} - J_\parallel C^{(z)}_{2,1} + \frac{\partial H_{\rm nl}}{\partial C^{*(z)}_{1,2}}, \quad (17)$$

$$i\dot C^{(x,y)}_{1,2} = \frac{i}{2}\big[2G - \gamma^{(+)}_\perp - \gamma^{(-)}_\perp\big]C^{(x,y)}_{1,2} + \\ + \Big(\frac{i}{2}\big[\gamma^{(-)}_\perp - \gamma^{(+)}_\perp\big] + J_\perp\Big)C^{(x,y)}_{2,1} + \frac{\partial H_{\rm nl}}{\partial C^{*(x,y)}_{1,2}}. \quad (18)$$

Мы включили сюда нелинейные добавки в общем виде, исходя из гамильтоновой структуры нелинейности в уравнении (6) при условиях $\sigma = 0$, $\mathrm{Im}\,\eta = 0$. Оценку нелинейного гамильтониана $H_{\rm nl}$ произведем вариационным методом. Очевидно, что в главном приближении нелинейная связь между $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ отсутствует, и поэтому можно рассмотреть по отдельности каждую яму. Подставим выражение (1) в соответствующую часть гамильтонова функционала (см. [20]),

$$\mathcal{H}_{\rm nl} = -\frac{1}{2}\int \Big[|\mathbf{E}|^4 + \eta|(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})|^2\Big]d\mathbf{r}. \quad (19)$$

После простых вычислений получим

$$H_{\rm nl} = -\frac{1}{2}\sum_{s=1,2}\Big[\tilde\alpha|\mathbf{C}_s|^4 + \tilde\beta|(\mathbf{C}_s\cdot\mathbf{C}_s)|^2\Big], \quad (20)$$

где новые эффективные керровские коэффициенты $\tilde{\alpha} = I_4(7 + 2\eta)$, $\tilde{\beta} = I_4(1 + 6\eta)$, а параметр I_4 представляет собой интеграл

$$I_4 = \frac{4\pi}{15} \int_0^\infty R^4(r) r^2 dr. \quad (21)$$

Учет слабой керровской нелинейности сводится таким образом к подстановке в правые части дифференциальных уравнений (17)–(18) соответствующих компонент векторного выражения

$$\frac{\partial H_{\rm nl}}{\partial \mathbf{C}^*_{1,2}} = -\tilde{\alpha}|\mathbf{C}_{1,2}|^2 \mathbf{C}_{1,2} - \tilde{\beta}(\mathbf{C}_{1,2} \cdot \mathbf{C}_{1,2}) \mathbf{C}^*_{1,2}. \quad (22)$$

Как было показано в работе [20], взятая сама по себе подобная нелинейная динамика для отдельной ямы соответствует (при $\tilde{\beta} \neq 0$) вращению вещественной и мнимой частей вектора $\mathbf{C}_{1,2}$ вокруг их не зависящего от времени векторного произведения (если отвлечься от накрутки фазы). Мы видим, что в общем случае с учетом этого вращения все компоненты векторов оказываются взаимно “зацепленными”, и это делает динамику (17)–(18) достаточно нетривиальной.

Численное моделирование. В данной работе было проведено качественное сравнение конечномерной модели векторного туннелирования (17)–(18) и полной волновой динамики в рамках уравнения (6). При компьютерном моделировании уравнения (6) использовался численный метод, описанный в работе [20]. Профиль каждой потенциальной ямы задавался в гауссовой форме,

$$V(r) \approx -35.0 \exp(-2.0 r^2), \quad (23)$$

а затем использовалась формула (5). Расстояние между центрами ям $d = 2.4$ обеспечивало подходящий режим туннелирования. Ненормированная функция $\tilde{R}(r)$, необходимая для составления начального состояния, бралась по вариационному приближению в виде $\tilde{R}(r) \approx r \exp(-2.15 r^2)$. Знаки приближенного равенства в этих формулах связаны с требованием гладкости функций при выполнении периодических граничных условий для вычислительной области $(2\pi) \times (2\pi) \times (2\pi)$. В зависимости от выбранных значений параметров $D_\parallel$, $\nu_\perp$ и $\nu_\parallel$, использовалось пространственное разрешение 160^3, 192^3 либо 240^3 точек трехмерной числовой решетки. Самое мелкое разрешение потребовалось для корректного учета потенциальной компоненты электрического поля $\mathbf{E}_{\rm pot}$ в случае малых параметров $D_\parallel = 0.005$, $\nu_\perp = 0.0005$ и $\nu_\parallel = 0.005$ (эти значения использованы в представленных далее численных примерах). При этом доля потенциальной части волнового действия $\mathcal{A}_{\rm pot} = \int |\mathbf{E}_{\rm pot}|^2 d\mathbf{r}$ не превышала нескольких процентов от полного действия $\mathcal{A} = \int |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{r}$ на протяжении всего периода времени.

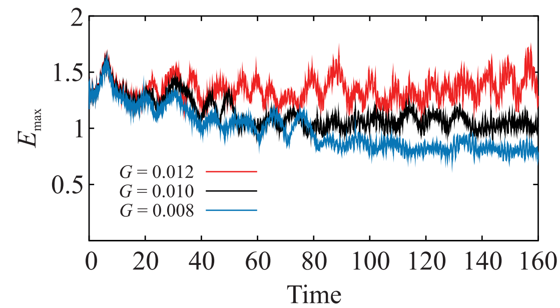

Рис. 1. (Цветной онлайн) Эволюция максимального значения амплитуды электрического поля при туннелировании тороидальных световых структур в рамках уравнения (6) для трех различных значений коэффициента усиления. Одинаковое начальное состояние задавалось (ненормированным) векторами $\tilde{\mathbf{C}}_1(0) = (4, 0, 0)^T$ и $\tilde{\mathbf{C}}_2(0) = (0, 0, 4)^T$. Значения остальных параметров указаны в тексте

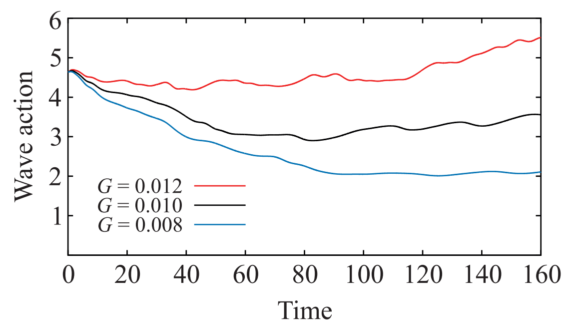

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость волнового действия от времени для трех численных экспериментов, соответствующих рис. 1

Характерные численные результаты показаны на рис. 1, 2 и 3. Так, на рисунке 1 проведено сравнение зависимостей максимального значения электрического поля $E \equiv |\mathbf{E}|$ от времени для трех различных значений коэффициента линейного усиления. Если отвлечься от сравнительно мелких возмущений, вызванных несовершенством начальных условий (присутствуют незахваченные ямами волны), то обе кривые состоят в основном из характерных выпуклых вверх участков, когда поле в одной яме сильнее поля в другой яме. Изломы кривых происходят при смене доминирования в результате туннелирования.

На рисунке 2 показаны соответствующие временные зависимости для волнового действия $\mathcal{A}$. Они далеки от суммы трех экспонент (с коэффициентами $2[G - \gamma_\perp^{(-)}]$, $2[G - \gamma_\perp^{(+)}]$ и $2[G - \gamma]$), как было бы в линейной системе. Фактически скорость диссипации волнового действия увеличивалась при горизонтальном положении оси более сильного тора, в согласии с предсказанием системы ОДУ (17)–(18) при выполнении неравенств (14).

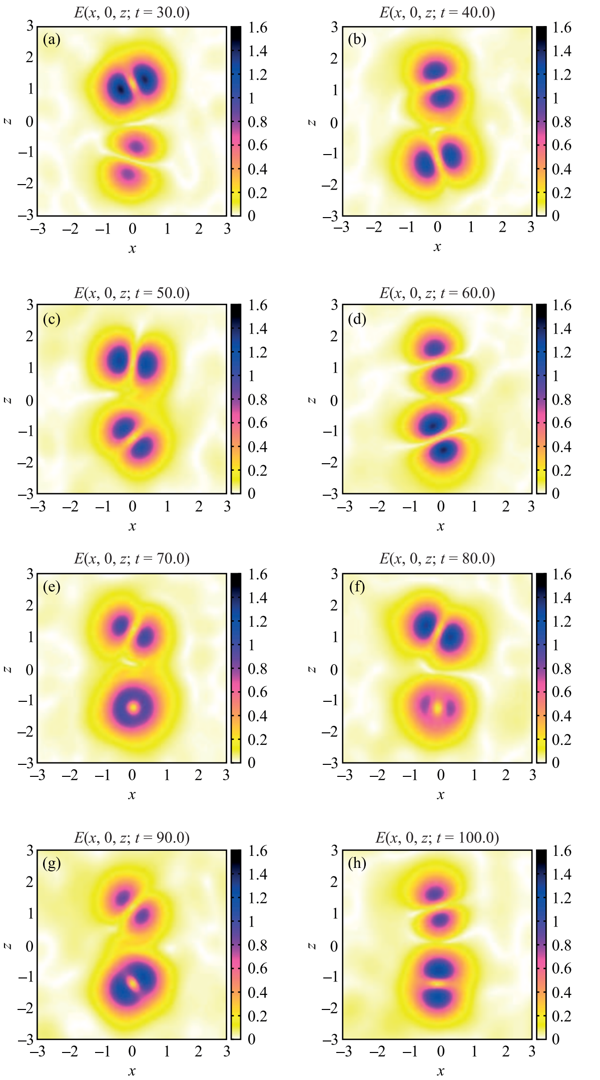

Рис. 3. (Цветной онлайн) Пример динамики тороидальных волновых структур, который соответствует кривой $G = 0.012$ на рис. 1. Показана амплитуда электрического поля в плоскости $y = 0$ в моменты времени: (a) – $t = 30$; (b) – $t = 40$; (c) – $t = 50$; (d) – $t = 60$; (e) – $t = 70$; (f) – $t = 80$; (g) – $t = 90$; (h) – $t = 100$. Использована негативная цветовая шкала, когда темные оттенки означают большую амплитуду, что позволяет лучше различать слабые волны вне потенциальных ям

На рисунке 3 представлена амплитуда поля в секущей плоскости $y = 0$ в последовательные моменты времени для одного из экспериментов. Здесь ясно видны повороты осей торов в плоскости (x, z) и смена максимумов амплитуды, в согласии с упрощенной системой ОДУ (17)–(18). Во избежание недоразумений обратим отдельное внимание на рис. 3e, где на первый взгляд кажется, что ось нижнего тора ориентирована примерно вдоль оси y, которая перпендикулярна плоскости рисунка. На самом же деле мы имеем здесь наложение интенсивностей двух примерно одинаковых по амплитуде торов (действительного и мнимого) с взаимно перпендикулярными осями, лежащими по-прежнему в плоскости (x, z). При этом максимальная интенсивность поля достигается в нижней яме в двух точках, расположенных симметрично относительно плоскости $y = 0$ и не попадающих поэтому на данный рисунок.

Надо еще сказать, что упомянутые выше слабые незахваченные волны с неизбежностью усиливаются с течением времени, и на временах $t \gtrsim 200$ они уже довольно серьезно искажают картину явления.

В целом, предсказанный на основе аналитических оценок механизм векторного туннелирования нашел свое подтверждение в численных экспериментах.

Заключение. Таким образом, в этой работе впервые показано, что векторная нелинейная волна в двухямном внешнем потенциале способна существовать и туннелировать в виде специфических структур. С учетом использованного в работе [20] способа обезразмеривания уравнения (6), реальный пространственный масштаб этих объектов есть $S_{\rm phys} \sim$ $\sim Qc/\omega_0$, временной масштаб их существования $T_{\rm phys} \sim 10^2 Q^2/\omega_0$, а масштаб электрического поля $E_{\rm phys} \sim 1/(Q\sqrt{|\alpha|})$, где c – скорость света, Q – произвольное достаточно большое число (порядка сотни), α – физическая величина соответствующего керровского коэффициента на частоте ω_0.

В данной работе рассмотрен случай, когда оптические структуры параметризуются (псевдо)векторами. В принципе, как видно из формулы (9), аналогичным образом можно рассмотреть и более сложные структуры, которые параметризуются неприводимыми тензорами ранга $l \geq 2$ (либо сферическими гармониками $Y_{l,m}$). Такая задача остается на будущее, равно как и более детальное сопоставление системы ОДУ (17)–(18) и трехмерной волновой динамики (6), включая получение аналитических оценок для поперечных коэффициентов затухания $\gamma_\perp^{(\pm)}$ и вычисление туннельных параметров.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках госзадания по теме FFWR-2024-0013.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (Наука, М., 1974) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, v. 3: *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Pergamon, N.Y., 1977)].
2. M. J. Ablowitz and Z. H. Musslimani, "Discrete vector spatial solitons in a nonlinear waveguide array", Phys. Rev. E **65**, 056618 (2002).
3. X. Luo, Q. Xie, and B. Wu, "Nonlinear coherent destruction of tunneling", Phys. Rev. A **76**, 051802(R) (2007).
4. F. Lederer, G. I. Stegeman, D. N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, and Ya. Silberberg, "Discrete solitons in optics", Phys. Rep. **463**, 1 (2008).
5. A. Szameit, Y. V. Kartashov, F. Dreisow, M. Heinrich, T. Pertsch, S. Nolte, A. Tünnermann, V. A. Vysloukh, F. Lederer, and L. Torner, "Inhibition of Light Tunneling in Waveguide Arrays", Phys. Rev. Lett. **102**, 153901 (2009).
6. I. L. Garanovich, S. Longhi, A. A. Sukhorukov, Yu. S. Kivshar, "Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides", Phys. Rep. **518**, 1 (2012).
7. R. A. Vicencio, C. Cantillano, L. Morales-Inostroza, B. Real, C. Mejia-Cortes, S. Weimann, A. Szameit, and M. I. Molina, "Observation of Localized States in Lieb Photonic Lattices", Phys. Rev. Lett. **114**, 245503 (2015).
8. R. Maas, J. Parsons, N. Engheta, and A. Polman, "Experimental realization of an epsilon-near-zero metamaterial at visible wavelengths", Nat. Photonics **7**, 907 (2013).
9. I. Liberal and N. Engheta, "Near-zero refractive index photonics", Nat. Photonics **11**, 149 (2017).
10. N. Kinsey, C. DeVault, A. Boltasseva, and V. M. Shalaev, "Near-zero-index materials for photonics", Nat. Rev. Mater. **4**, 742 (2019).
11. J. Wu, Z. T. Xie, Y. Sha, H. Y. Fu, and Q. Li, "Epsilon-near-zero photonics: infinite potentials", Photonics Res. **9**(8), 1616 (2021).
12. J. E. Sipe and R. W. Boyd, "Nonlinear susceptibility of composite optical materials in the Maxwell Garnett model", Phys. Rev. A **46**, 1614 (1992).
13. G. L. Fischer, R. W. Boyd, R. J. Gehr, S. A. Jenekhe, J. A. Osaheni, J. E. Sipe, and L. A. Weller-Brophy, "Enhanced Nonlinear Optical Response of Composite Materials", Phys. Rev. Lett. **74**, 1871 (1995).
14. A. Ciattoni, C. Rizza, and E. Palange, "Extreme nonlinear electrodynamics in metamaterials with very small linear dielectric permittivity", Phys. Rev. A **81**, 043839 (2010).
15. C. Rizza, A. Ciattoni, and E. Palange, "Two-peaked and flat-top perfect bright solitons in nonlinear metamaterials with epsilon near zero", Phys. Rev. A **83**, 053805 (2011).
16. O. Reshef, I. De Leon, M. Z. Alam, and R. W. Boyd, "Nonlinear optical effects in epsilon-near-zero media", Nat. Rev. Mater. **4**, 535 (2019).
17. D. Fomra, A. Ball, S. Saha, J. Wu, Md. Sojib, A. Agrawal, H. J. Lezec, and N. Kinsey, "Nonlinear optics at epsilon near zero: From origins to new materials", Appl. Phys. Rev. **11**(1), 011317 (2024).
18. L. Sun, X. Yang, and J. Gao, "Loss-compensated broadband epsilon-near-zero metamaterials with gain media", Appl. Phys. Lett. **103**, 201109 (2013).
19. В. В. Тюрнев, "Расчет эффективной диэлектрической проницаемости композитного материала, содержащего наполнитель с отрицательной диэлектрической проницаемостью", ЖЭТФ **166**, 603 (2024) [V. V. Tyurnev, "Calculation of the effective permittivity of a composite material containing a filler with negative permittivity," ZhETF **166**, 603 (2024)].
20. В. П. Рубан, "Численное моделирование световых структур в объемных ENZ-средах с керровской нелинейностью", Письма в ЖЭТФ **123**, 105 (2026) [V. P. Ruban, "Numerical Simulation of Light Structures in Bulk Epsilon-Near-Zero Media with Kerr Nonlinearity", JETP Lett. **123**, 93 (2026)].
21. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (Наука, М., 1982) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, v. 8: *Electrodynamics of Continuous Media* (Pergamon, N.Y., 1984)].
22. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика* (Наука, М., 1979) [E. M. Lifshits and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics* (Pergamon, Oxford, 1981)].
23. E. A. Kuznetsov, "The collapse of electromagnetic waves in a plasma", ZhETF **66**, 2037 (1974) [Sov. Phys. JETP **39**(6), 1003 (1974)].
24. V. E. Zakharov, S. L. Musher, and A. M. Rubenchik, "Hamiltonian approach to the description of non-linear plasma phenomena", Phys. Rep. **129**, 285 (1985).
25. E. A. Kuznetsov, A. M. Rubenchik, and V. E. Zakharov, "Soliton stability in plasmas and hydrodynamics", Phys. Rep. **142**, 103 (1986).