Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 10, с. 726 – 733 © 2026 г. 25 мая

Аналитические профили скирмионных мешков

М. С. Шустин[+1)], *М. Н. Поткина*[*], *А. Д. Федосеев*[×], *Д. М. Дзебисашвили*[×]

[+]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[*]*Университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия*

[×]*Институт физики им. Л. В. Киренского, Федеральный исследовательский центр*
"Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук", 660036 Красноярск, Россия

Поступила в редакцию 17 марта 2026 г.
После переработки 13 апреля 2026 г.
Принята к публикации 19 апреля 2026 г.

Топологически нетривиальные 2D магнитные структуры с топологическим зарядом $|Q| > 1$ привлекают значительное внимание исследователей в последнее десятилетие в связи с их экспериментальным и численным обнаружением. В данной работе мы предлагаем аналитический анзац, способный описывать как аксиально-симметричные $k\pi$-скирмионы, так и C_g-симметричные скирмионные мешки, с возможностью его естественного обобщения на более широкий класс многодоменных структур. Путем сравнения с результатами микромагнитного моделирования мы показываем, что предложенный анзац позволяет описывать профили скирмионных мешков с точностью, приемлемой для практических приложений.

DOI: 10.7868/S3034576626050182

1. Введение. Вслед за теоретическим предсказанием [1–4] и экспериментальным обнаружением [5–9], магнитные скирмионы (МС) привлекают значительное внимание исследователей как топологически устойчивые магнитные конфигурации в тонких пленках [2)]. Главное практическое достоинство магнитных скирмионов обусловлено их конфигурационной стабильностью, а именно, невозможностью преобразовать нетривиальное распределение намагниченности $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ ($|\mathbf{m}| = 1$), отвечающее топологическому индексу

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{m} \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} \right] d^2 r \qquad (1)$$

в распределение, отвечающее другому значению Q, без преодоления энергетического барьера [10, 11]. Сочетание конфигурационной стабильности и малых размеров (обычно вызванных стабилизирующим взаимодействием Дзялошинского–Мории) обуславливает интерес к магнитным скирмионам как к перспективным объектам для создания устройств логики и памяти следующего поколения [12–18]. До недавнего времени в основном исследовались магнитные скирмионы с $|Q| = 1$. Однако в последнее десятилетие также довольно активно стали изучаться аксиально-симметричные магнитные скирмионы высоких порядков с $|Q| > 1$ как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения [19–24]. Стоит также отметить, что структуры, топологически эквивалентные скирмионам (высоких порядков), но стабилизированные магнито-дипольными взаимодействиями (а не взаимодействием Дзялошинского–Мории), и поэтому имеющие гораздо больший размер, уже исследовались в литературе в контексте так называемых (жестких) цилиндрических магнитных доменов [25].

В недавних работах [26–28] на основе численного моделирования было предсказано существование в тонких пленках скирмионных структур с произвольными значениями Q, получивших название скирмионные мешки. В отличие от скирмионов высоких порядков, топологический заряд мешков $|Q| > 1$ обусловлен морфологическими особенностями их доменных стенок. Это открытие расширяет перспективы исследований топологических магнитных структур [29–31], и важным шагом в этом направлении является аналитическая параметризация пространственных профилей скирмионных мешков. Эта задача приобрела дополнительную актуальность в последние годы в виду экспериментального обнаружения мешков [24], а также их контролируемой генерации (в случаях малых топологических зарядов $|Q|$) с помощью лазерных импульсов [32].

В настоящее время, при моделировании динамики скирмионных мешков обычно используется полуаналитический подход, при котором статические профили находятся из численного моделирования,

[1)]e-mai: mshustin@yandex.ru

[2)]Под тонкими пленками мы подразумеваем такие, чья толщина меньше характерных размеров скирмионов.

а после подставляются в аналитические уравнения движения (см., например, работы [33, 34]). Кроме того, в настоящее время для скирмионных мешков отсутствует анализ роли квантовых флуктуаций, который также требует параметризации их профилей [35, 36]. Наконец, знание аналитической параметризации профилей скирмионных мешков может быть полезным при исследовании условий локализации в них майорановских мод в гибридных двумерных структурах сверхпроводник / киральный магнетик [37–42]. Последнее обусловливает интерес к скирмионным мешкам так же, как к перспективным объектам для реализации квантовых вычислений [41, 43, 44].

В настоящей работе мы обобщаем хорошо известный анзац π-доменной стенки, верифицированный для описания скирмионов с $|Q| = 1$ [45, 46], на случай аксиально-симметричных $k\pi$-скирмионов, а также доменных границ с g-кратной вращательной симметрией, $g \in \mathbb{N}$. В дальнейшем мы будем называть последние как C_g-симметричные доменные стенки. Далее, используя подход стереографической проекции [1, 2], мы формулируем анзац для локализованных многодоменных структур, качественно учитывающий эффекты перекрытия доменных стенок. Конкретной реализацией таких многодоменных структур являются скирмионные мешки.

2. Аналитические профили $K\pi$-скирмионов. Будем исследовать профили скирмионов в рамках стандартной модели тонкой киральной ферромагнитной пленки (плоскость xOy). Магнитная энергия пленки описывается обобщенной классической моделью Гейзенберга на двумерной решетке с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle i,j\rangle}\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_j - \sum_{\langle i,j\rangle}\mathbf{D}_{ij}\cdot(\mathbf{S}_i\times\mathbf{S}_j) - \\ - H\sum_i S_i^z - A\sum_i (S_i^z)^2. \tag{2}$$

Здесь первое слагаемое описывает ферромагнитное обменное взаимодействие между ближайшими соседними узлами решетки i и j (обозначено как $\langle i,j\rangle$) с амплитудой $J > 0$. Второе слагаемое соответствует киральному взаимодействию Дзялошинского–Мории. Его вектор $\mathbf{D}_{ij} = D\,[\mathbf{e}_z\times(\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i)]$ направлен перпендикулярно связи, соединяющей узлы i и j. Такая форма $\mathbf{D}_{ij}$ обуславливает неелевский характер доменных стенок скирмиона. Параметр $A > 0$ описывает одноионную анизотропию типа "легкая ось", а H описывает интенсивность внешнего магнитного поля, приложенного вдоль оси z. Отметим, что вклад анизотропии $\sim A$ может возникать как из-за кристаллических полей, так и эффективно индуцироваться диполь-дипольными взаимодействиями [47–49]. Последнее описание справедливо при условии, что размеры скирмионов (R_i и w_i в нижеследующих формулах) превышают толщину пленки, что мы будем предполагать в дальнейшем.

Считая размеры скирмионов существенно превосходящими постоянную решетки a, выполним стандартный переход от дискретного описания спинов на решетке к непрерывному полю намагниченности: $\mathbf{S}_i \to \mathbf{m}(\mathbf{r})$, $\mathbf{S}_j \to \mathbf{m}(\mathbf{r}+\mathbf{a})$. В результате придем к микромагнитному энергетическому функционалу:

$$\mathcal{H} - E_{FM} = \\ = \int d^2r\Big[\mathcal{J}\,(\nabla\mathbf{m})^2 + \mathcal{D}\,(\,m_z\nabla\mathbf{m} - (\mathbf{m}\nabla)\,m_z\,) + \\ + \mathcal{A}\left(1-m_z^2\right) + \mathcal{B}\,(1-m_z)\Big]. \tag{3}$$

Здесь E_{FM} – энергия пленки в ферромагнитном состоянии, а микромагнитные параметры определяются как $\mathcal{J} = JL/4V_c$, $\mathcal{D} = DL/(2V_c a)$, $\mathcal{A} = A/V_c$, $\mathcal{B} = H/V_c$, где $L = 2a^2, (3a^2)$ для квадратной (треугольной) решетки; V_c – объем магнитной элементарной ячейки.

Для аксиально-симметричных структур радиальный профиль скирмиона описывается так называемым скирмионным углом $\Theta(r)$:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = (\sin\Theta\cos\Phi,\ \sin\Theta\sin\Phi,\ \cos\Theta)\,, \tag{4}$$

где $\Phi(\varphi) = n\varphi + \gamma$ есть азимутальный угол намагниченности, который определяется полярным углом φ, индексом завихренности n и параметром киральности γ. Для $|n| = 1$ киральность различает скирмионы типа Блоха ($\gamma = \pm\pi/2$) и типа Нееля ($\gamma = 0$). Для $|n| > 1$ изменения γ приводят лишь к глобальному повороту всей структуры. В дальнейшем мы подробно рассматриваем случай $n = 1, \gamma = 0$. Скирмионный угол $\Theta(r)$ может быть найден из уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала (3):

$$l_w^2\Delta_r\Theta(r) - \frac{(l_w^2+r^2)}{2r^2}\sin 2\Theta + 2\mathcal{E}\frac{\sin^2\Theta}{r/l_w} - \frac{\mathcal{B}}{2\mathcal{A}}\sin\Theta = 0, \tag{5}$$

где $l_w = \sqrt{\frac{\mathcal{J}}{\mathcal{A}}}$, $\mathcal{E} = \frac{\mathcal{D}}{2\sqrt{\mathcal{J}\mathcal{A}}}$, $\Delta_r\Theta(r) = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\Theta)$.

Численное решение этого уравнения с граничными условиями $\Theta(r=0) = \pi$ и $\Theta(r\to\infty) = 0$ приводит к профилю, отвечающему МС с $|Q| = 1$, который может быть аппроксимирован анзацем $\Theta(r) \cong \theta_\pi(r)$:

$$\theta_\pi(r) = 2\arctan\left(\frac{\cosh R/w}{\sinh r/w}\right). \tag{6}$$

Последний можно рассматривать как профиль вращения одномерной суперпозиции двух π-доменных стенок [50, 51] [3]. Аналогичное рассмотрение суперпозиций большего числа доменных стенок дает рецепт для естественного обобщения на случай аналитических профилей $k\pi$-скирмионов. Так, анзац для последних можно записать в форме

$$\theta_{k\pi}(r) = \sum_{i=1}^{k} 2\arctan\left(\frac{\cosh R_i/w_i}{\sinh r/w_i}\right). \qquad (7)$$

Здесь параметры R_i и w_i имеют смысл радиусов и ширин доменных стенок. Для случая $k = 2$ угол (7) отвечает так называемому магнитному скирмиониуму [52]. Оптимальные профили получаются подстановкой уравнения (7) в (3) и минимизацией по R_i и w_i. В этом случае оптимальный профиль скирмионного угла $\theta_{k\pi}(r)$ также с высокой точностью аппроксимирует решение $\Theta(r)$ уравнения Эйлера–Лагранжа (5) с граничными условиями $\Theta(r = 0) = k\pi$ и $\Theta(r \to \infty) = 0$. Отметим, что из-за необходимости стабилизации нескольких доменных границ условия стабилизации $k\pi$-скирмионов могут быть существенно более узкими по сравнению с аналогичными условиями для скирмионов, которые хорошо изучены в литературе. Так, для иллюстрации на рис. 1 представлены условия стабилизации скирмиониума в переменных D/J, A/J и H/J. Поскольку скирмионы и скирмиониумы являются базовыми морфологическими элементами скирмионных мешков, условия существования скирмиониумов на рис. 1 будут актуальными для определения параметрических областей существования мешков.

3. Анзац для скирмионных мешков. Перейдем к построению аналитических профилей для C_g-симметричных скирмионных мешков [4], примеры которых показаны на рис. 2.

Для начала заметим, что морфология мешков с $Q < 0$ (левые панели рис. 2) формируется отдельными скирмионами в количестве $|Q|$ и радиусами R, помещенными внутрь деформированного C_g-симметричного скирмиониума с радиусами R_1 и R_2 ($R < R_1 < R_2$). Деформация обусловлена отталкиванием доменных стенок. Мешки с $Q > 0$ (правые панели рис. 2) формируются из $Q + 1$ инвертированных скирмионов, помещенных внутрь C_g-симметричного одиночного скирмиона радиуса $R_1 > R$, который также деформирован из-за отталкивания доменных границ. Соответственно, ключевым аспектом аналитической параметризации мешков является корректный учет перекрытия доменных стенок составляющих их структур. Для такого учета мы воспользуемся подходом стереографической проекции [1, 2, 35], в котором профили изолированных $k\pi$-скирмионов будут подбираться так, чтобы отвечать профилям (6) и (7) раздела 2.

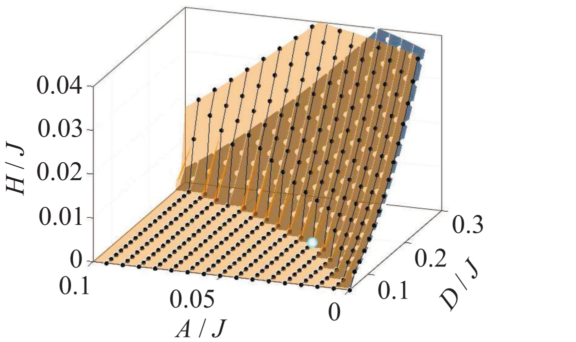

Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимости нижнего H_{c_1} и верхнего H_{c_2} критических полей от параметров D/J и A/J. Синяя задняя поверхность представляет ненулевые значения H_{c_1}, а наложенные белые кривые с белыми точками указывают на значения A/J и D/J, соответственно. Аналогично, лицевая полупрозрачная бронзовая поверхность с черными кривыми и точками демонстрирует зависимость $H_{c_2}(A/J, D/J)$. В областях, где $H_{c_{1,2}} \neq 0$ и $H_{c_1} < H < H_{c_2}$, могут стабилизироваться изолированные магнитные скирмиониумы. Жирная точка отвечает набору параметров, использованному для построений на рис. 2

Известно [1, 2], что если функционал (3) содержит только обменный вклад ($\mathcal{D} = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 0$), топологически нетривиальные многодоменные структуры с конечной энергией возбуждения описываются рациональной функцией $W(z) = R(z)/S(z)$ комплексной переменной $z = x + iy = re^{i\varphi}$. Для стереографического отображения, определяемого выражениями $\mathbf{m}/2 \in \mathbb{S}^2 \to (W_1 = \Re W,\ W_2 = \Im W) \in \mathbb{R}^2$:

$$m_x + im_y = \frac{2\,W}{|W|^2 + 1}, \quad m_z = \frac{1 - |W|^2}{1 + |W|^2}, \qquad (8)$$

граничное условие $\mathbf{m}(r \to \infty) = (0, 0, 1)$ накладывает ограничение $\deg S > \deg R$, где $\deg S$ обозначает

[3] Отметим, что характерная ширина неелевской доменной стенки в 2D случае w может значительно отличаться от ширины блоховской стенки в 1D случае $l_w = \sqrt{\mathcal{J}/\mathcal{A}}$, несмотря на то, что профиль (6) формируется из суммы двух 1D профилей с последующим вращением. Такое различие может усиливаться магнитостатическими эффектами. По этой причине в дальнейшем мы рассматриваем параметры R, w (для скирмиона) и $R_{1,2}$, $w_{1,2}$ (для скирмиониума) как вариационные для функционала (3). Более того, можно показать, что характерные расхождения между оптимальными профилями, полученными в рамках метода Ритца для анзацев (6)–(7), и профилями, полученными решением уравнения Эйлера–Лагранжа (5), не превышают нескольких процентов.

[4] Такая процедура позволяет рассматривать и более экзотические локализованные мультидоменные структуры.

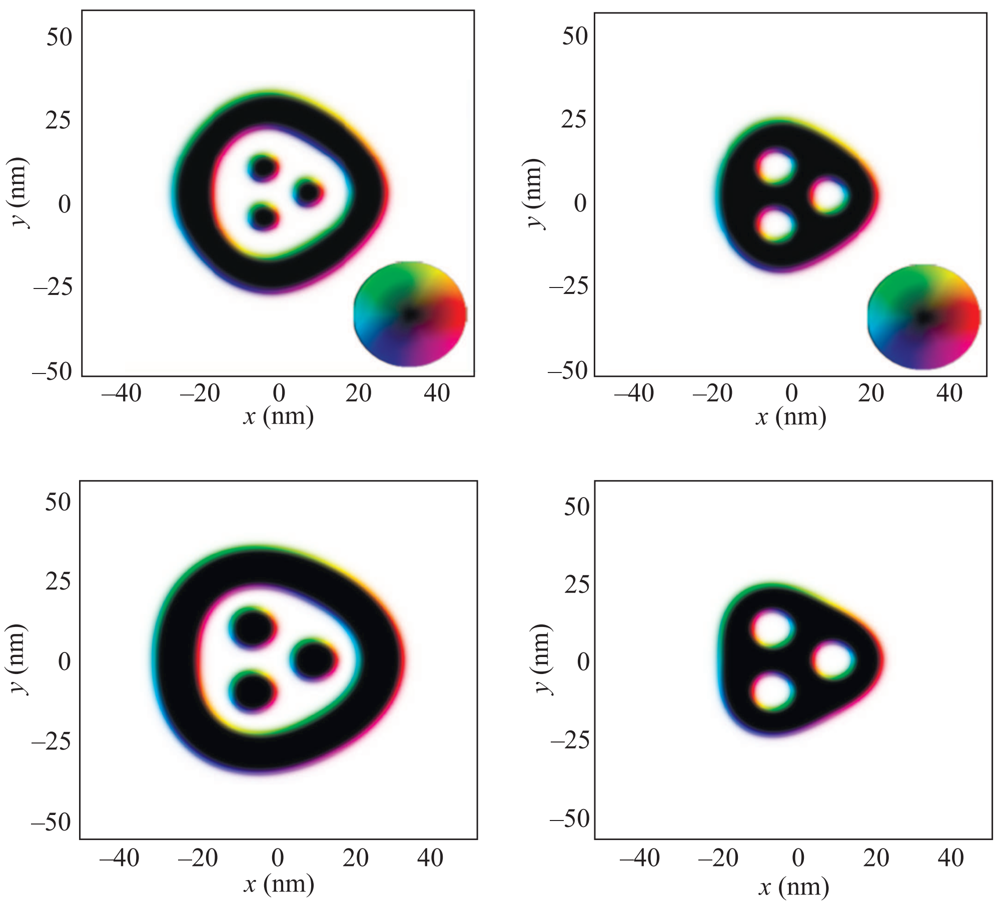

Рис. 2. (Цветной онлайн) Сравнение результатов оптимизации для мешков с $Q = -3$ (левые панели) и $Q = 2$ (правые панели), полученных с помощью численного микромагнитного моделирования (OOMMF, верхние панели) и оптимизации параметров аналитических анзацев (13), (14) (нижние панели). Параметры моделирования: $\mathcal{J} = 3 \cdot 10^{-12}$ Дж/м, $\mathcal{D} = -3.2 \cdot 10^{-3}$ Дж/м^2, $\mathcal{A} = 2.3 \cdot 10^6$ Дж/м^3, что соответствует жирной точке на рис. 1. Черная/белая окраска указывает на магнитные моменты, ориентированные вдоль/против оси квантования. Цвета кодируют направление векторов $\mathbf{m}$ в плоскости xOy (плоскость пленки) в соответствии с цветовым кодом на круговой вставке

степень полинома $S(z)$. Поскольку топологический заряд из уравнения (1) равен числу прообразов голоморфной функции $W(z)$, мы имеем $\deg S = |Q|$.

В таком подходе многоскирмионные решения могут быть построены с использованием антиголоморфной функции вида

$$W(z^*) = \sum_{v=1}^{N_s} \frac{\lambda_v}{(z^* - z_v^*)^{n_v}}, \tag{9}$$

где N_s есть количество скирмионов с завихренностями n_v. Параметры λ_v определяют размеры отдельных скирмионов, комплексные числа $z_v \in \mathbb{C}$ задают координаты центров скирмионов на комплексной плоскости, а $|Q| = \sum_v n_v$.

Если же функционал энергии (3) содержит дополнительные взаимодействия ($\mathcal{D}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \neq 0$), профили доменных стенок модифицируются. Из (6) и (8) следует, что для получения профиля изолированного скирмиона с $|Q| = n$ следует сделать подстановку

$$W(z) = \frac{\lambda}{|z|^n}\, e^{i\Phi} \to$$
$$\to W(z, z^*) = \frac{\cosh R/w}{\sinh |z|/w}\, e^{i\Phi} = \operatorname{tg}\frac{\theta_\pi}{2}\, e^{i\Phi}. \tag{10}$$

Тогда, заменяя в последнем выражении $\theta_\pi(|z|)$ на $\theta_{k\pi}(|z|)$, мы можем также восстановить профили изолированных $k\pi$-скирмионов с произвольной функцией азимутального угла $\Phi(\varphi)$.

Далее, используя принцип суперпозиции для стереографической функции W (9), мы можем обобщить выражение для одиночного скирмиона (10) на многоскирмионный случай:

$$W(z, z^*) = \sum_{v=1}^{N_s} \operatorname{tg}\frac{\theta_{k_v\pi}(|z - z_v|)}{2}, e^{i n_v \arg(z - z_v)}. \tag{11}$$

Здесь z_v обозначают положения центров скирмионов. Отметим, что из-за неголоморфности функции $W(z, z^*)$ полный топологический заряд Q системы не аддитивен и зависит от размеров и взаимного расположения составляющих структуру скирмионов.

Наконец, если мы хотим описать C_g-симметричную деформацию заданного скирмионного профиля, можно сделать следующую подстановку в функции скирмионного угла

$$\theta_{k\pi}(|z|) \to \theta_{k\pi}^{(g)}(|z|, \varphi, c) = \\ = \theta_{k\pi}\left(\sqrt{|z|^2 + c^2 - 2c|z|\cos g\varphi}\right), \qquad (12)$$

с параметром c, характеризующим степень деформации. Выражения (7), (8), (11) и (12) позволяют моделировать широкий класс многодоменных топологических структур, включая C_g-симметричные скирмионные мешки.

Так, для мешков с $Q = g < 0$ стереографическая функция $W_-^{(g)}(z, z^*)$ может быть записана в виде:

$$W_-^{(g)}(z, z^*) = \tan\frac{\theta_{2\pi}^{(g)}\left(|z|, \varphi\,; R_{1,2}, w_{1,2}, c\right)}{2}\, e^{i\Phi} - \\ - \sum_{v=1}^{g} \tan\frac{\theta_\pi\left(|z - z_v|\,; R, w\right)}{2}\, e^{i\arg(z - z_v)}. \qquad (13)$$

Здесь явно указана зависимость скирмионных углов от параметров, характеризующих размеры отдельных скирмионов. Выражение (13) описывает деформированный скирмиониум с радиусами $R_2 > R_1$, содержащий внутри g отдельных скирмионов радиусами $R < R_1$. Координаты последних, $z_v = ue^{2\pi iv/g}$, выбраны так, чтобы соответствовать деформации большого скирмиона, как показано на рис. 2.

Рассуждая аналогично, находим стереографическую функцию $W_+^{(g)}(z, z^*)$ для C_g-симметричных мешков с топологическим зарядом $Q = g - 1 > 0$:

$$W_+^{(g)}(z, z^*) = \mathrm{tg}\,\frac{\pi - \theta_\pi^{(g)}\left(|z|, \varphi\,;\, R_1,\, w_1,\, c\right)}{2}\, e^{i\Phi} - \\ - \sum_{v=1}^{g} \mathrm{tg}\,\frac{\theta_\pi\left(|z - z_v|\,;\, R, w\right)}{2}\, e^{i\arg(z - z_v)}. \qquad (14)$$

Это выражение описывает деформированный π-скирмион радиуса R_1, содержащий внутри g инвертированных π-скирмионов радиуса $R < R_1$.

Отметим, что в случае $Q > 0$ для выполнения граничного условия $m_z(r \to \infty) = 1$ следует выполнить замену $m_z \to -m_z$ в определении стереографической проекции (8).

Также отметим, что представленный в этом разделе подход стереографической проекции может быть обобщен для описания многоскирмионных конфигураций в ограниченных планарных наноструктурах, как односвязных, так и многосвязных [18, 53].

4. Сравнение с численным микромоделированием. Мы верифицировали результаты оптимизации параметров описанного выше анзаца мешков с помощью численного микромагнитного моделирования. Моделирование выполнялось с использованием объектно-ориентированной микромагнитной среды (OOMMF) через пакет Ubermag на языке Python [54]. Численный подход концептуально аналогичен аналитической минимизации: локальные минимумы на многомерной энергетической поверхности, задаваемой уравнениями (2)–(3) и рассматриваемой как функция углов всех магнитных моментов, находились с использованием метода сопряженных градиентов в декартовых координатах [55].

Как уже отмечалось, параметрическая область стабилизации скирмионных мешков должна отвечать условиям существования изолированных скирмионов ($|Q| = 1$) и скирмиониумов ($Q = 0$). Для скирмионов такие условия хорошо изучены в литературе, см., например, [45, 46], тогда как для скирмиониумов их следует искать в окрестности областей с $H_{c_1} < H < H_{c_2}$ на рис. 1 (см. также работу [52]).

Для численной оптимизации параметров анзаца мешков (13) и (14) мы использовали следующую процедуру. Стартовые значения параметров R и w соотносились с оптимальными значениями для анзаца изолированного скирмиона (6). Начальный выбор для параметра смещения g скирмионов внутри мешка выбирался как $u = R + \alpha\, w$ с $\alpha \approx 5$, в то время как затравочный параметр деформации доменных границ мешка считался равным $c \approx w$.

Далее, для мешков с $Q > 0$ радиус и ширина внешней доменной границы брались как $R_1 \approx 2u$ и $w_1 \approx w$. Для мешков с $Q < 0$ стартовые значения для параметров $dR = R_2 - R_1$ и $w_{1,2}$ (толщина внешнего полосового домена и ширины его границ) находились из оптимизации анзаца скирмиониума, см. уравнение (7) при $k = 2$. С такими стартовыми значениями оптимизация параметров мешков R, w, u, c, R_1 и w_1 (для случая $Q > 0$), и дополнительных параметров R_2 и w_2 (для случая $Q < 0$) выполнялась численно с использованием метода градиентного спуска в рамках решеточной модели (2). Микромагнитное моделирование проводилось в рамках континуального функционала (3), при этом сопоставление результатов выполнялось после пересчета энергетических параметров между функционалами (2) и (3).

Для скирмионных мешков с $Q = -3$ и $Q = 2$ сопоставление профилей, полученных с помощью аналитической и численной минимизации при нулевом магнитном поле $H = 0$, представлено на рис. 2. Как видно, аналитические профили для $\mathbf{m}(\mathbf{r})$ воспроизводят результаты микромагнитного моделирования на полуколичественном уровне. Тем не менее, такое соответствие может быть достаточным для изучения характера локализации на скирмионных мешках спиновых волн или майорановских нулевых мод.

Расхождения между аналитическими и микромагнитными результатами обусловлены сочетанием нескольких факторов. Во-первых, они возникают из-за использования различных энергетических функционалов системы: решеточного – для минимизации в рамках анзаца (13)–(14), и континуального – для микромагнитного моделирования. Второй фактор связан с феноменологическим описанием C_g-деформации внешних доменных стенок мешков, которая описывается уравнением (12). Как видно из анализа условий стабилизации скирмиониума, локализованные структуры с несколькими доменными стенками очень чувствительны к вариациям параметров системы из-за взаимодействия стенок. Последнее, в частности, приводит к более узкой области существования скирмиониума по сравнению со скирмионом (см. рис. 1 и его обсуждение). В совокупности указанные особенности могут приводить к различиям размеров скирмионных мешков, найденных в разных подходах, особенно в случае $Q < 0$.

5. Выводы. В настоящей работе нами предложен анзац для скирмионных мешков – топологически нетривиальных многодоменных структур, недавно обнаруженных в численных и физических экспериментах и активно изучаемых в качестве перспективных элементов для создания устройств спинтроники и магнитной памяти нового поколения. Главным достоинством нашего описания является возможность его прямого обобщения на более экзотические многодоменные структуры, такие как, например, скирмионные мешки, содержащие магнитные скирмионы высоких порядков. Поскольку на последних могут локализовываться майорановские моды, описанные структуры могут иметь приложения и в области квантовых вычислений.

Главная идея теоретического описания скирмионных мешков заключалась в такой модификации решения Белавина–Полякова для магнитных вихрей в изотропном ферромагнетике, при которой бы аппроксимировались вихревые решения в киральных магнетиках с взаимодействием Дзялошинского–Мории (скирмионы и скирмиониумы), хорошо изученные в настоящее время как численно, так и экспериментально. Ключевой особенностью такого подхода являлось использование свойства аддитивности функции стереографической проекции при описании многоскирмионных структур (см. уравнения (9) и (11)), что позволило описывать многоскирмионные и многодоменные конфигурации в присутствии киральных магнитных взаимодействий.

В результате был предложен анзац для многодоменных структур, учитывающий перекрытие доменных стенок составляющих их частей (не сохраняющий топологический заряд структуры), что делает его пригодным для моделирования множественных $k\pi$-скирмионов (в том числе деформированных) и их сочетаний на решетке. В итоге ключевым результатом такого исследования стала аналитическая параметризация C_g-симметричных скирмионных мешков, задаваемая выражениями (13) и (14) (для $Q = -g$ и $Q = g - 1$ соответственно). На примере мешков с $Q = -3$ и $Q = 2$ было показано, что оптимальные профили в рамках данного анзаца воспроизводят результаты численного микромагнитного моделирования с использованием пакета OOMMF + Ubermag с точностью, достаточной для практических приложений. При этом предложенный анзац может быть применен для качественного описания поведения и других топологически нетривиальных многодоменных структур, включая те, которые в настоящее время трудно реализовать в пакетах микромагнитного моделирования.

В качестве возможного направления для будущих исследований мы рассматриваем изучение влияния скалярного кирального взаимодействия на особенности стабилизации скирмионных мешков [22]. В частности, было бы интересно исследовать возможность существования скирмионных мешков, содержащих магнитные скирмионы высоких порядков с четным индексом завихренности $n \in 2\mathbb{Z}$, которые потенциально могут локализовывать майорановские моды. В этой связи полезным и интересным обобщением было бы и расширение настоящего описания скирмионных мешков в терминах функций комплексных переменных на случай ограниченных планарных наноструктур (как односвязных, так и многосвязных), в рамках подхода, развитого в работах [18, 53].

Авторы выражают глубокую благодарность И.С. Бурмистрову, С.С. Апостолову, Е.С. Андрияхиной, В.А. Степаненко и К.Л. Метлову за неоценимый вклад в работу во время ее обсуждений.

Финансирование работы. Работа выполнена в рамках госзаданий FFWR-2024-0017 "Транспорт в неупорядоченных системах: от наноструктур до турбулентной атмосферы" (Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН) и

FWES-2024-0002 "Исследования упорядоченных состояний в конденсированных веществах: синтез новых материалов, эксперимент и теория" (Институт физики им. Л. В. Киренского, Федеральный исследовательский центр "Красноярский научный центр СО РАН"). М. С. Шустин благодарит фонд развития теоретической физики и математики "БАЗИС" за индивидуальную поддержку. Исследование $k\pi$-скирмионов выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 24-72-00089, https://rscf.ru/project/24-72-00089/.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. A. Belavin and A. M. Polyakov, "Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets", JETP Lett. **22**, 245 (1975).
2. J. Woo, "Pseudoparticle configurations in two-dimensional ferromagnets", J. Math. Phys. **18**, 1264 (1977).
3. A. S. Schwarz, *Quantum Field Theory and Topology, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
4. M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, 2nd ed. (CRC Press, Bristol, 2003).
5. S. Mühlbauer, B. Binz, F. Jonietz, C. Pfleiderer, A. Rosch, A. Neubauer, R. Georgii, and P. Böni, "Skyrmion Lattice in a Chiral Magnet", Science **323**, 915 (2009).
6. N. Romming, A. Kubetzka, C. Hanneken, K. von Bergmann, and R. Wiesendanger, "Field-Dependent Size and Shape of Single Magnetic Skyrmions", Phys. Rev. Lett. **114**, 177203 (2015).
7. S.-H. Yang, K.-S. Ryu, and S. Parkin, "Domain-wall velocities of up to $750\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ driven by exchange-coupling torque in synthetic antiferromagnets", Nat. Nanotechnol. **10**, 221 (2015).
8. C. Moreau-Luchaire, C. Moutafis, N. Reyren et al, (Collaboration), "Additive interfacial chiral interaction in multilayers for stabilization of small individual skyrmions at room temperature", Nat. Nanotechnol. **11**, 444 (2016).
9. N. Kanazawa, S. Seki, and Y. Tokura, "Noncentrosymmetric Magnets Hosting Magnetic Skyrmions", Adv. Mater. **29**, 1603227 (2017).
10. V. M. Uzdin, M. N. Potkina, I. S. Lobanov, P. F. Bessarab, and H. Jonsson, "Energy surface and lifetime of magnetic skyrmions", J. Magn. Magn. Mater. **459**, 236 (2018).
11. M. N. Potkina, I. S. Lobanov, H. Jonsson, and V. M. Uzdin, "Stability of magnetic skyrmions: Systematic calculations of the effect of size from nanometer scale to microns", Phys. Rev. B **107**, 184414 (2023).
12. X. Zhang, M. Ezawa, and Y. Zhou, "Magnetic skyrmion logic gates: conversion, duplication and merging of skyrmions", Sci. Rep. **5**, 9400 (2015).
13. G. Yu, P. Upadhyaya, X. Li, W. Li, S. K. Kim, Y. Fan, K. L. Wong, Y. Tserkovnyak, P. K. Amiri, and K. L. Wang, "Room-Temperature Creation and Spin-Orbit Torque Manipulation of Skyrmions in Thin Films with Engineered Asymmetry", Nano Lett. **16**, 1981 (2016).
14. H. Miller and J. Anders, "Time-reversal symmetric work distributions for closed quantum dynamics in the histories framework", New J. Phys. **19**, 062001 (2017).
15. J. Zazvorka, F. Jakobs, D. Heinze, N. Keil, S. Kromin, S. Jaiswal, K. Litzius, G. Jakob, P. Virnau, D. Pinna, K. Everschor-Sitte, L. Rózsa, A. Donges, U. Nowak, and M. Kläui, "Thermal skyrmion diffusion used in a reshuffler device", Nat. Nanotechnol. **14**, 658 (2019).
16. M. Potkina and I. Lobanov, "Nonmagnetic impurities in skyrmion racetrack memory", Nanosystems: Phys. Chem. Math. **11**, 628 (2020).
17. C. Psaroudaki, E. Peraticos, and C. Panagopoulos, "Skyrmion qubits: Challenges for future quantum computing applications", Appl. Phys. Lett. **123**, 260501 (2023).
18. K. L. Metlov, "Topological Memory with Multiply-Connected Planar Magnetic Nanoelements", JETP Lett. **118**, 105 (2023)
19. A. Leonov and M. Mostovoy, "Multiply periodic states and isolated skyrmions in an anisotropic frustrated magnet", Nat. Commun. **6**, 8275 (2015).
20. R. Ozawa, S. Hayami, and Y. Motome, "Zero-Field Skyrmions with a High Topological Number in Itinerant Magnets", Phys. Rev. Lett. **118**, 147205 (2017).
21. L. Rózsa, K. Palotás, A. Deák, E. Simon, R. Yanes, L. Udvardi, L. Szunyogh, and U. Nowak, "Formation and stability of metastable skyrmionic spin structures with various topologies in an ultrathin film", Phys. Rev. B **95**, 094423 (2017).
22. M. S. Shustin, V. A. Stepanenko, and D. M. Dzebisashvili, "Higher-order magnetic skyrmions in nonuniform magnetic fields", Phys. Rev. B **107**, 195428 (2023).
23. A. D. Fedoseev, M. S. Shustin, and D. M. Dzebisashvili, "Bound States of High-Order Magnetic Skyrmions and a Superconducting Pearl Vortex", JETP Lett. **120**, 517 (2024).
24. M. Hassan, S. Koraltan, A. Ullrich, F. Bruckner, R. O. Serha, K. V. Levchenko, G. Varvaro, N. S. Kiselev, M. Heigl, C. Abert, D. Suess, and M. Albrecht, "Dipolar skyrmions and antiskyrmions of arbitrary topological charge at room temperature", Nat. Phys. **20**, 615 (2024).
25. T. H. O'Dell, *Ferromagnetodynamics: The Dynamics of Magnetic Bubbles, Domains, and Domain Walls* (Macmillan, London, 1981).

26. D. Foster, C. Kind, P. J. Ackerman, J.-S. B. Tai, M. R. Dennis, and I. I. Smalyukh, “Two-dimensional skyrmion bags in liquid crystals and ferromagnets”, Nat. Phys. **15**, 655 (2019).
27. F. N. Rybakov and N. S. Kiselev, “Chiral magnetic skyrmions with arbitrary topological charge”, Phys. Rev. B **99**, 064437 (2019).
28. V. M. Kuchkin, B. Barton-Singer, F. N. Rybakov, S. Blügel, B. J. Schroers, and N. S. Kiselev, “Magnetic skyrmions, chiral kinks, and holomorphic functions”, Phys. Rev. B **102**, 144422 (2020).
29. R. Chen, Y. Li, V. F. Pavlidis, and C. Mavrogordatos, “Skyrmionic interconnect device”, Phys. Rev. Research **2**, 043312 (2020).
30. R. Chen and Y. Li, “Voltage-controlled skyrmionic interconnect with multiple magnetic information carriers”, ACS Appl. Mater. Interfaces **14**, 30420 (2022).
31. M. Xu, X. Zhang, J. Ning, Y. Wang, Z. Zhang, W. Chen, C. Hu, and Y. Chen, “Dynamics of converting skyrmion bags with different topological degrees into skyrmions in synthetic antiferromagnetic nanotracks”, J. Appl. Phys. **136**, 153901 (2024).
32. L.-M. Kern, V. M. Kuchkin, V. Deinhart et al. (Collaboration), “Controlled formation of skyrmion bags”, Adv. Mater. **37**, 2501250 (2025).
33. C. Kind and D. Foster, “Magnetic skyrmion binning”, Phys. Rev. B **103**, L100413 (2021).
34. L. Bo, R. Zhao, X. Zhang, M. Mochizuki, and X. Zhang, “Global rotation of skyrmion bags under vertical microwave fields”, J. Appl. Phys. **135**, 063905 (2024).
35. V. E. Timofeev and D. N. Aristov, “Magnon band structure of skyrmion crystals and stereographic projection approach”, Phys. Rev. B **105**, 024422 (2022).
36. A. Petrović, C. Psaroudaki, P. Fischer, M. Garst, and C. Panagopoulos, “Colloquium: Quantum properties and functionalities of magnetic skyrmions”, Rev. Mod. Phys. **97**, 031001 (2025).
37. J. Klinovaja, P. Stano, and D. Loss, “Transition from Fractional to Majorana Fermions in Rashba Nanowires”, Phys. Rev. Lett. **109**, 236801 (2012).
38. S. Rex, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, “Majorana bound states in magnetic skyrmions imposed onto a superconductor”, Phys. Rev. B **100**, 064504 (2019).
39. M. Garnier, A. Mesaros, and P. Simon, “Topological superconductivity with deformable magnetic skyrmions”, Commun. Phys. **2**, 1 (2019).
40. A. O. Zlotnikov, M. S. Shustin, and A. D. Fedoseev, “Aspects of topological superconductivity in 2d systems: Non-collinear magnetism, skyrmions, and higher-order topology”, J. Supercond. Novel Magn. **34**, 3053 (2021).
41. S. T. Konakanchi, J. I. Väyrynen, Y. P. Chen, P. Upadhyaya, and L. P. Rokhinson, “A platform for braiding Majorana modes with magnetic skyrmions”, Phys. Rev. B **108**, 033109 (2023).
42. S. S. Apostoloff, E. S. Andriyakhina, and I. S. Burmistrov, “The effect of Pearl vortices on the shape and position of Néel-type skyrmions in superconductor-chiral ferromagnet heterostructures”, Phys.-Uspekhi **68**, 1092 (2025).
43. A. Y. Kitaev, “Fault-tolerant quantum computation by anyons”, Ann. Phys. **303**, 2 (2003).
44. V. V. Val’kov, M. S. Shustin, S. V. Aksenov, A. O. Zlotnikov, A. D. Fedoseev, V. A. Mitskan, and M. Y. Kagan, “Topological superconductivity and Majorana states in low- dimensional systems”, Phys.-Uspekhi **65**, 2 (2022).
45. F. Büttner, I. Lemesh, and G. S. D. Beach, “Theory of isolated magnetic skyrmions: From fundamentals to room temperature applications”, Sci. Rep. **8**, 4464 (2018).
46. X. S. Wang, H. Y. Yuan, and X. R. Wang, “A theory on skyrmion size”, Commun. Phys. **1**, 1 (2018).
47. E. S. Andriyakhina and I. S. Burmistrov, “Interaction of a Néel-type skyrmion with a superconducting vortex”, Phys. Rev. B **103**, 174519 (2021).
48. A. O. Leonov, T. L. Monchesky, N. Romming, A. Kubetzka, A. N. Bogdanov, and R. Wiesendanger, “The properties of isolated chiral skyrmions in thin magnetic films”, New. J. Phys. **18**, 065003 (2016).
49. R. M. Menezes, J. F. S. Neto, C. C. de Souza Silva, and M. V. Milosevic, “Manipulation of magnetic skyrmions by superconducting vortices in ferromagnet-superconductor heterostructures”, Phys. Rev. B **100**, 014431 (2019).
50. E. Magyari and H. Thomas, “Magnetic confinement of repelling Bloch walls”, Phys. Scr. **44**, 45 (1992).
51. H. B. Braun, “Fluctuations and instabilities of ferromagnetic domain-wall pairs in an external magnetic field”, Phys. Rev. B **50**, 16485 (1995).
52. K. Nakamura and A. O. Leonov, “Mechanism of skyrmionium stability in quasi-two-dimensional chiral magnets”, Phys. Rev. B **110**, 094403 (2024).
53. K. L. Metlov, “Magnetization Patterns in Ferromagnetic Nanoelements as Functions of Complex Variable”, Phys. Rev. Lett. **105**, 107201 (2010).
54. M. J. Donahue and D. G. Porter, *OOMMF User’s Guide, Version 1.0* NISTIR 6376 (National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 1999).
55. I. S. Lobanov and V. M. Uzdin, “The lifetime of micron scale topological chiral magnetic states with atomic resolution”, Comput. Phys. Commun. **269**, 108136 (2021).