Письма в ЖЭТФ, том 123, вып. 12, с. 857 – 864

Корреляции градиентов фазы оптической волны в стратифицированной турбулентной атмосфере

А. В. Немцева[+*], *Ф. А. Стариков*[+×1)]

[+]*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, 607188 Саров, Россия*

[*]*Физический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова, филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Саров, 607328 Саров, Россия*

[×]*Саровский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета Московский инженерно-физический институт, 607186 Саров, Россия*

Поступила в редакцию 15 апреля 2026 г.
После переработки 5 мая 2026 г.
Принята к публикации 7 мая 2026 г.

Исследуется недиагональная компонента корреляционной функции градиентов фазы световой волны, прошедшей стратифицированную турбулентную атмосферную трассу. В режиме слабых сцинтилляций показано, что в зависимости корреляционной функции от расстояния между точками присутствует характерный максимум, по положению которого можно определять дисперсию Рытова, как и в случае однородной атмосферы [I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, J. Opt. Soc. Am. A **42**, 1654 (2025)]. В режиме сильных сцинтилляций с ростом дисперсии Рытова расчетная корреляционная функция стремится к теоретическому выражению, полученному в предположении гауссовости огибающей поля волны, при $r < r_0$, где r_0 – параметр Фрида.

DOI: 10.7868/S3034576626060142

Исследования, посвященные вопросам распространения оптических волн в турбулентной атмосфере, в последнее время обрели большую актуальность не только ввиду развития астрономических наблюдений с помощью наземных телескопов, но также в связи с различными лазерными приложениями. Случайные флутуации показателя преломления среды, вызванные атмосферной турбулентностью, приводят к ухудшению качества пучка оптического излучения. На компенсацию негативного влияния атмосферы нацелены адаптивные методы коррекции фазы оптического сигнала [1, 2], однако для определения условий их применимости требуется информация о свойствах атмосферы.

Особенности распространения световых волн в турбулентной среде изучаются с момента формирования общей теории турбулентности [3–7]. Ее развитие позволило описывать статистические свойства световых волн в атмосфере с помощью интегральных параметров [8–10], определение которых, кроме практического, имеет и фундаментальное значение. Среди них параметр Фрида r_0 [11], введенный в рамках колмогоровской модели [3–7]; внешний масштаб турбулентности L_0 – характерный максимальный размер вихря, с которого начинается энергетический каскад и который определяет общий (глобальный) наклон волнового фронта излучения [12]; дисперсия Рытова σ_R^2, характеризующая уровень сцинтилляций (сильных флуктуаций интенсивности), которые представляют особую проблему для адаптивной оптики.

В системах атмосферной адаптивной оптики часто используется датчик волнового фронта Шака–Гартмана с растром микролинз [13], на который перестраивается излучение с приемной апертуры. Если размер микролинз достаточно мал по сравнению с размером фазовых неоднородностей, то положение фокальных пятен дает распределение градиентов фазы φ волны, по которому можно вычислить их матрицу корреляций $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \langle \partial_{\alpha_1}\varphi(\mathbf{r}_1)\partial_{\beta_2}\varphi(\mathbf{r}_2)\rangle$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$, α и β принимают значения x и y, а угловые скобки означают статистическое усреднение.

Параметр Фрида r_0 и внешний масштаб турбулентности L_0 играют особую роль, поскольку совместно определяют радиус корреляции поля излучения и, соответственно, размер пятна фокусировки [14]. Оценить параметр Фрида r_0 вначале предлагалось по измерению дисперсии турбулентного дрожания фокального пятна микролинзы в любой суб-

1)e-mail: FAStarikov@vniief.ru

апертуре растра, т.е. по $Q_{xx}(0)$ или $Q_{yy}(0)$ [11]. Но неизбежное дрожание подвижных элементов оптической системы вызывает появление паразитного глобального наклона волнового фронта, одинакового для всех субапертур. Он дополнительно уширяет фокальное пятно и искажает измерения.

Преодолеть эту проблему позволила DIMM (Differential Image Motion Monitor)-методика [15, 16], основанная на определении дисперсии разности градиентов фазы в двух разнесенных субапертурах, что сводится к вычислению диагональных компонент матрицы корреляций градиентов фазы: $Q_{xx}(0) - Q_{xx}(\mathbf{r})$ или $Q_{yy}(0) - Q_{yy}(\mathbf{r})$. Но DIMM-методика избегает влияния на определяемое значение r_0 не только паразитных, но и связанных с конечностью L_0 турбулентных глобальных наклонов фазы, поэтому информация о внешнем масштабе L_0 оказывается упущенной.

В работе [17] был предложен новый метод определения параметра Фрида r_0, основанный на анализе недиагональной компоненты корреляционной функции градиентов фазы излучения $Q_{xy}(\mathbf{r})$. Метод, в отличие от DIMM-методики, не зависит от размера микролинзы и при этом нечувствителен к наличию глобального наклона волнового фронта любой природы. Привлечение затем диагональной компоненты корреляционной функции градиентов фазы позволяет определять и внешний масштаб турбулентности L_0. Метод [17] прошел апробацию в лабораторных экспериментах [18], где создавалась искусственная турбулентность колмогоровского типа, а также в натурных экспериментах на вертикальной и горизонтальных атмосферных трассах [19]. Обработка экспериментальных данных доказала эффективность предложенного метода и позволила извлечь значения r_0 и L_0, согласующиеся с экспериментальной величиной расходимости излучения.

В работе [20], применяя теорию возмущений, подход [17] был распространен на случай влияния слабых сцинтилляций, где обнаружилась возможность определения дисперсии Рытова. Оказалось, что при $\sigma_R^2 < 1$ значение σ_R^2 можно найти по положению максимума, который проявляется в радиальном распределении Q_{xy}, полученном аналитически в нулевом порядке теории возмущений. В работе [21] было продемонстрировано хорошее согласие результатов численного моделирования с аналитическими соотношениями [20]. Однако, результаты [20, 21] были получены для однородной турбулентной трассы, в то время как в условиях распространения оптического пучка вдоль вертикальных и наклонных атмосферных трасс влияние флуктуаций показателя преломления среды на статистические свойства световой волны неравномерно. В этом случае детальное исследование матрицы корреляций градиентов фазы не проводилось.

Наконец, представляет интерес случай сильных сцинтилляций, возникающих при значениях дисперсии Рытова $\sigma_R^2 > 1$. В работе [22] в приближении гауссовой статистики амплитуды поля [23–25] найдено аналитическое выражение для матрицы корреляций фазовых градиентов в случае сильных сцинтилляций, применимое и для однородной, и для стратифицированной атмосферы. Численное моделирование в однородной атмосфере показало [22], что результат расчета Q_{xy} постепенно приближается к теоретическому выражению по мере увеличения дисперсии Рытова, если $r < r_0$. Для больших r поведение расчетной корреляционной функции существенно отличается из-за нарушения гауссовой статистики.

Цель настоящей работы – исследовать свойства недиагональной компоненты Q_{xy} для стратифицированной атмосферы в режиме и слабых, и сильных сцинтилляций.

Опишем постановку задачи, а также приведем основные соотношения, используемые в работе. Мы рассматриваем монохроматическую плоскую волну, распространяющуюся в атмосфере с Земли вдоль вертикальной трассы. Интенсивность поля излучения мала, поэтому учитываем только линейную рефракцию излучения на неоднородностях среды, пренебрегая молекулярным и аэрозольным рассеянием, а также поглощением излучения средой. Поле волны описывается в терминах плавной амплитуды (огибающей) Ψ, поскольку предполагаем, что все характерные масштабы задачи (размер пучка, длина трассы распространения) значительно превышают длину волны света λ. Эволюция амплитуды Ψ при распространении волны описывается волновым уравнением в параболическом приближении:

$$i\partial_z\Psi + \frac{1}{2k_0}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\Psi + k_0 n\Psi = 0, \qquad (1)$$

где Ψ – трехмерное комплексное поле, $k_0 = 2\pi/\lambda$ – волновой вектор, n – флуктуационная часть показателя преломления.

Статистические свойства флуктуаций показателя преломления описываются структурной функцией [6, 7]:

$$D(\mathbf{r}, z) = \langle [n(\mathbf{r}_1, z) - n(\mathbf{r}_2, 0)]^2 \rangle = C_n^2(\mathbf{r}^2 + z)^{1/3}, \quad (2)$$

где степенная зависимость (2) справедлива для расстояний r, лежащих в пределах инерционного интервала от минимального размера турбулентного вихря l_0 до максимального L_0 – внешнего масштаба турбулентности. Величина C_n^2 в (2) – структурная характеристика показателя преломления – характеризует силу турбулентных флуктуаций n.

Индикатриса рассеяния света на турбулентных неоднородностях вытянута вдоль направления распространения волны, поэтому справедливо приближение δ-коррелированности флуктуаций n по z:

$$\langle n(\mathbf{r}_1, z) n(\mathbf{r}_2, 0)\rangle \to \delta(z) C_n^2 A(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция, а величина $A(\mathbf{r})$ определяется двумерным спектром флуктуаций n. Для спектра турбулентности фон Кармана [26] функция $A(\mathbf{r})$ из (3) при малости параметра r/L_0 (см. также [27]) имеет вид [17]:

$$A(\mathbf{r}) = \mathrm{const} - 1.457 r^{5/3} + 1.173 \left(\frac{2\pi}{L_0}\right)^{1/3} r^2, \tag{4}$$

где $(2\pi/L_0)$ – наименьшая пространственная частота, связанная с конечным внешним масштабом турбулентности L_0.

Статистические свойства поля оптической волны можно описать поперечной корреляционной функцией комплексной амплитуды поля:

$$F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = \langle \Psi(\mathbf{r}_1, z) \Psi^*(\mathbf{r}_2, z)\rangle, \tag{5}$$

где $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2)$.

Для статистически однородной и изотропной турбулентности корреляционная функция (5) зависит только от расстояния между двумя точками $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = \sqrt{x^2 + y^2}$. В этом случае для спектра фон Кармана уравнение для корреляционной функция поля, выведенное из (1) с учетом (3) и (4), в ряде случаев может быть решено аналитически [17]. Решение в случае исходно плоской волны имеет вид:

$$F(r) = F(0) \exp\left\{-3.44 \left(\frac{r}{r_0}\right) \left[1 - 1.485 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{1/3}\right]\right\}. \tag{6}$$

В случае стратифицированной атмосферы и исходно плоской волны, входящий в (6), параметр Фрида r_0 определяется профилем C_n^2 на трассе распространения [1]:

$$r_0^{-5/3} = 0.423 k_0^2 \int_0^z d\zeta C_n^2(\zeta). \tag{7}$$

Режим распространения волны характеризуется дисперсией Рытова σ_R^2, отражающей уровень флуктуаций логарифма интенсивности поля. Для стратифицированной атмосферы и для исходно плоской волны выражение для σ_R^2 имеет вид [28]:

$$\sigma_R^2 = 2.25 k_0^{7/6} z^{5/6} \int_0^z d\zeta (1 - \zeta/z)^{5/6} C_n^2(\zeta), \tag{8}$$

откуда для однородной трассы ($C_n^2 = \mathrm{const}$) [1]:

$$\sigma_R^2 = 1.23 C_n^2 k_0^{7/6} z^{11/6}. \tag{9}$$

Как видно из (7), (9), в условиях однородной атмосферы есть универсальная связь параметра Фрида с дисперсией Рытова:

$$\sigma_R^2 = 2.91 \left[\frac{z}{k_0 r_0^2}\right]^{5/6}, \tag{10}$$

а в стратифицированной атмосфере эта связь зависит от конкретного профиля C_n^2 на трассе.

В условиях слабых сцинтилляций, когда $\sigma_R^2 \le 1$, искажения фазы поля Ψ не возмущают амплитуду $|\Psi|$ поля значительно. В этом случае уравнение (1) может быть решено для величины $\eta = \ln(\Psi/\Psi_0)$ в рамках нулевого порядка теории возмущений, где Ψ_0 – решение (1) при $n = 0$. В этих условиях в [20] было найдено выражение для недиагональной компоненты матрицы корреляций градиентов фазы при $C_n^2 = \mathrm{const}$, которое не зависит от L_0:

$$Q_{xy}(x, y) = -0.957 \frac{1}{r^{1/3} r_0^{5/3}} [1 + f_2(\xi)] \frac{xy}{r^2}, \tag{11}$$

где [20]

$$f_2(\xi) = -3\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \mathrm{Re}\left[\left(\frac{\xi}{i}\right)^{7/6} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 3, i\xi\right)\right],$$

$$\xi = \frac{k_0 r^2}{4z} = \frac{0.9}{(\sigma_R^2)^{6/5}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2.$$

График функции $f_2(\xi)$ можно найти в [20]. Функция f_2 равна нулю при $\xi = 0$ и стремится к 1 при $\xi \to \infty$. При проведении детальных численных расчетов уравнения (1) в работе [21] было получено хорошее согласие расчетных данных с аналитическим выражением (11) при $\sigma_R^2 \le 0.5$. Это означает, что нулевого приближения теории возмущений достаточно для качественного описания ситуации. Для стратифицированной атмосферы подобное (11) аналитическое выражение получить не удается.

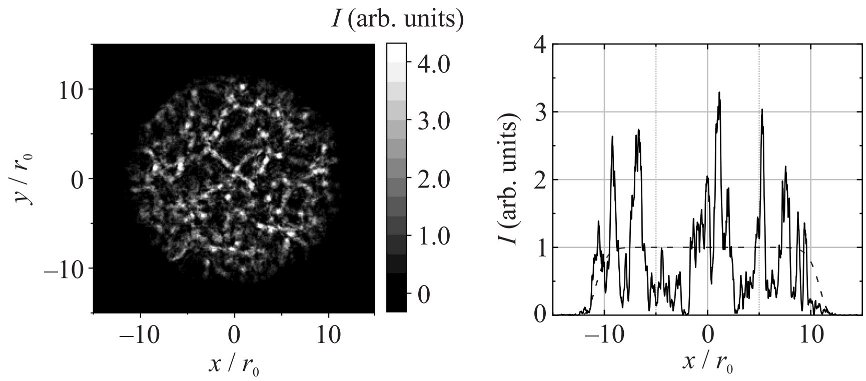

Рис. 1. Распределение интенсивности поля излучения I в плоскости регистрации и ее профиль по оси x при $y = 0$ при $\sigma_R^2 = 1$, $r_0 = 13$ см и $L_0 = 20$ м. Штрих – профиль I при $z = 0$

Интересно, что аналитическое выражение для функции Q_{xy} (11) для $\sigma_R^2 < 1$ имеет максимум при $r = r^*$, положение которого для однородной трассы связано с дисперсией Рытова как [20]

$$\sigma_R^2 = 0.43(r^*/r_0)^{5/3}. \quad (12)$$

Хотя дисперсию Рытова можно найти прямо из (10), определив r_0 по периферийной зоне (11) согласно [17], наличие соотношения (12) дает дополнительную возможность определять значение σ_R^2 . Поэтому возникает закономерный вопрос, имеется ли аналогичная возможность определения дисперсии Рытова в более общих условиях стратифицированной атмосферы, где (10) не выполняется. На этот вопрос ответить можно только численно.

В случае сильных сцинтилляций, когда $\sigma_R^2 > 1$, флуктуации поля волны растут, что ведет в итоге к возникновению сильных флуктуаций интенсивности. В режиме сильных сцинтилляций теория возмущений при решении уравнения (1) неприменима. Однако в [22] было показано, что связь между корреляционными функциями градиентов фазы и поля волны можно получить в приближении гауссовой статистики огибающей поля Ψ, которое выполняется при $r \le r_0$. Связь имеет вид:

$$Q_{\alpha\beta}(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left[1 - \frac{F^2(r)}{F^2(0)}\right] \partial_\alpha \partial_\beta \ln \frac{F(r)}{F(0)}, \quad (13)$$

и она справедлива как для однородной, так и для стратифицированной атмосферы. В [22] в численных расчетах были проверены справедливость и границы применимости формулы (13) в случае однородной атмосферы. В настоящей работе мы осуществляем это для атмосферы стратифицированной.

Остановимся на деталях расчета. В численном эксперименте световой пучок с длиной волны $\lambda = 0.55$ мкм распространяется вертикально вверх по стратифицированной турбулентной трассе. Размер круглой апертуры исходного пучка $D \gg r_0$, т.е. значительно превышает характерный пространственный масштаб турбулентных неоднородностей. Таким образом, влияние конечности апертуры пучка на его приосевые пространственные статистические характеристики минимально, что позволяет моделировать режим распространения бесконечно плоской волны в атмосфере.

Распространение волны в среде описывается эволюцией комплексной амплитуды поля Ψ в соответствии с уравнением (1). В качестве начальных условий для уравнения (1) задавалось поле $\Psi(x, y, z = 0)$ с исходно плоским волновым фронтом. Срез распределения интенсивности поля $I = |\Psi|^2$ при $z = 0$ показан на рис. 1. На периферии профиль интенсивности исходного пучка спадает по супергауссовому закону.

Уравнение (1) решается конечно-разностным методом с расщеплением по направлениям (для дифракционного оператора) и физическим процессам (дифракция и рефракция) [29]. Турбулентная атмосфера представляется набором тонких фазовых экранов, расположенных перпендикулярно оси z [30, 31]. Дифракция излучения учитывается в промежутках между экранами: уравнение (1) при $n = 0$ решается с использованием разностной схемы Ладагина [32], обладающей нулевой амплитудной ошибкой и фазовой погрешностью четвертого порядка при интегрировании дифракционного оператора. Рефракция волны на неоднородностях n учитывается путем умножения поля после расчета дифракции на текущем шаге на фазовый множитель, соответствующий фазовому экрану. Дисперсия фазы на экране не превышает 1 рад^2.

Статистика турбулентности для цепочки экранов описывалась моделью фон Кармана для пространственного спектра флуктуаций показателя пре-

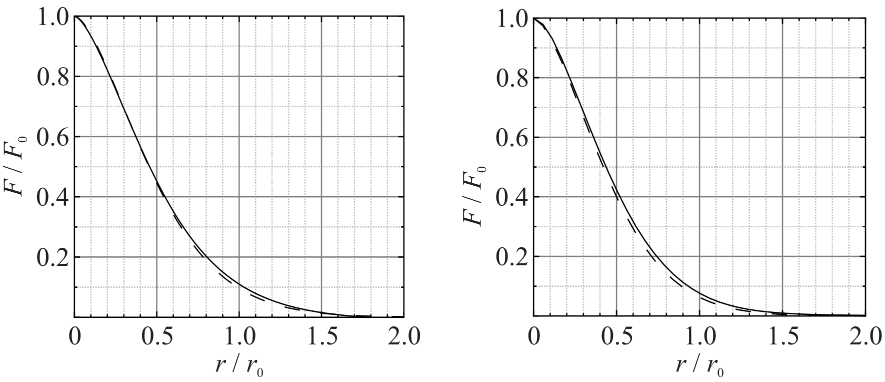

Рис. 2. Корреляционная функция $F(r)$ при $\sigma_R^2 = 0.5$, $r_0 = 50$ см (слева), $\sigma_R^2 = 5.9$, $r_0 = 4.5$ см (справа). Штриховая линия – аналитическое выражение (6), сплошная линия – расчет

ломления n при характерном внешнем масштабе турбулентности $L_0 = 20$ м во всех расчетах ниже. Наименьший масштаб пространственных неоднородностей – порядка размера шага расчетной сетки в плоскости $(x,\ y)$.

При генерации экранов крупномасштабные турбулентные неоднородности моделировались с помощью метода субгармоник [33] вместе с классическим спектральным методом [30, 31]. Суть метода субгармоник состоит в итеративном сгущении узлов расчетной сетки в плоскости пространственных частот вблизи нулевой гармоники. На каждой итерации сгущения к пространственному спектру фазы добавляются дополнительные 32 гармоники с волновыми векторами в три раза меньшими, чем предыдущие. Таким образом, можно правильно воспроизвести пространственное поведение корреляционной функции поля (6) при больших L_0 без увеличения размера счетной области. В расчетах число итераций сгущения варьировалось от 5 до 7.

Профиль структурной характеристики показателя преломления $C_n^2(z)$ описывался моделью [34], для которого с ростом координаты z над уровнем Земли величина C_n^2 снижалась на несколько порядков. В расчетах длина турбулентной трассы составляла 30 км. Для такой неоднородной трассы интегральные параметры r_0 и σ_R^2 находились из (7) и (8).

В конце турбулентной трассы регистрируется случайная реализация поля $\Psi(x, y)$. Распределение интенсивности поля $I(x, y)$ для одной из таких реализаций показано на рис. 1. Там же показан срез $I(x)$ по оси x при $y = 0$.

При прохождении волны вдоль трассы, формируемой различными реализациями экранов, формировалась выборка, для которой находились усредненные характеристики поля излучения. В расчетах размер выборки варьировался от 300 до 600 реализаций.

Для оценки точности численного метода после серии регистрируемых в конце случайных реализаций поля $\Psi(x, y)$ рассчитывалась корреляционная функция поля (5). Распределение, полученное в расчете, сравнивалось с аналитическим выражением (6). На рисунке 2 показан пример корреляционной функции поля Ψ, полученной в расчете и аналитически при слабых и сильных сцинтилляциях. Как следует из (6), для однородной и изотропной турбулентности корреляционная функция поля зависит только от расстояния r между двумя точками поля, а также является действительной величиной. Этот факт подтверждается и в расчете. Видно, что расчет достаточно хорошо воспроизводит аналитические распределения, что говорит об адекватности численной модели.

Перейдем к результатам, полученным для корреляционной функции градиентов фазы волны. Как ранее отмечалось, мы рассматриваем недиагональную компоненту Q_{xy} матрицы корреляций градиентов фазы. В расчетах $Q_{xy}(\mathbf{r}) = \langle \partial_{x_1}\varphi(\mathbf{r}_1)\partial_{y_2}\varphi(\mathbf{r}_2)\rangle$ находится в результате усреднения по ансамблю реализаций, а градиент фазы определяется из выражения:

$$\nabla\varphi = \frac{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*}{2i|\Psi|^2}.$$

Мы приводим зависимость Q_{xy} от расстояния r на линии $x = y$. На рисунке 3 представлен такой срез для случая стратифицированной трассы в режиме, когда $\sigma_R^2 \ll 1$. Здесь также дана аналитическая зависимость (11) для однородной атмосферы при том же значении дисперсии Рытова. Видно, что расчет для стратифицированной атмосферы качественно повторяет аналитическое поведение, полученное для однородной трассы. В расчете наблюдается максимум функции $Q_{xy}(r)$, причем его положение достаточно близко к наблюдаемому в однородной атмосфере.

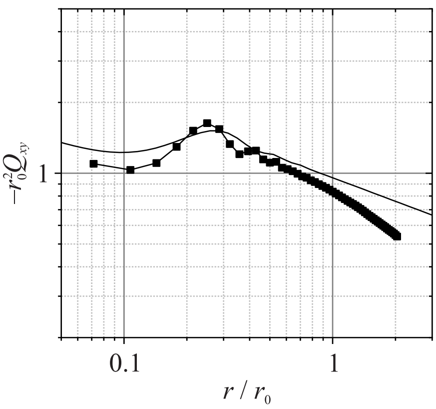

Рис. 3. Корреляционная функция $Q_{xy}(r)$ на линии $x = y$ в стратифицированной атмосфере при $\sigma_R^2 = 0.05$, $r_0 = 100$ см: маркеры – расчет, сплошная линия – аналитическое выражение (11) для однородной атмосферы с тем же значением σ^2

Зависимость $\sigma_R^2(r^*)$, где r^* – положение максимума, показана на рис. 4. Видно, что результаты расчета для стратифицированной трассы достаточно хорошо описываются выражением (12), полученным для однородной атмосферы при $\sigma_R^2 < 1$. Это свидетельствует об универсальности подхода к определению σ_R^2 из анализа профиля недиагональной компоненты Q_{xy} в условиях слабых сцинтилляций.

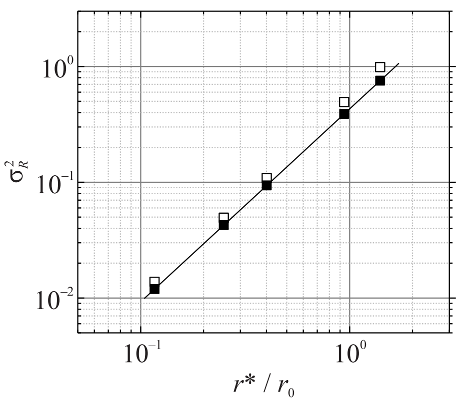

Рис. 4. Зависимость σ_R^2 от r^*, при которой наблюдается максимум корреляционной функции Q_{xy} в случае однородной (темные маркеры) и стратифицированной (светлые маркеры) атмосферы

В условиях сильных сцинтилляций величина $\sigma_R^2 > 1$. С ростом флуктуации фазы волны все сильнее возмущают ее амплитуду, что приводит к значительным флуктуациям интенсивности волны в конце трассы. Результаты расчетов Q_{xy}, представленные на рис. 5, показывают, что с ростом σ_R^2 расчетная кривая постепенно “отрывается” от аналитической кривой (11) при слабых сцинтилляциях

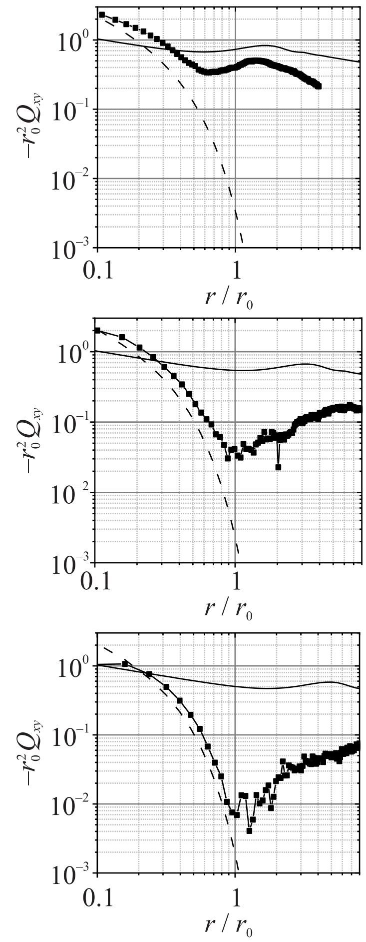

Рис. 5. Корреляционная функция $Q_{xy}(r)$ на линии $x = y$ в стратифицированной атмосфере при $\sigma_R^2 = 1$, $r_0 = 13$ см; $\sigma_R^2 = 3$, $r_0 = 6.8$ см и $\sigma_R^2 = 5.9$, $r_0 = 4.5$ см (сверху вниз) в расчете (маркеры). Сплошная линия – выражение (11) при тех же σ_R^2, штриховая линия – выражение (13)

и приближается к аналитической кривой (13) при сильных сцинтилляциях. Кроме того, аналогично [22], при больших σ_R^2 аналитика выполняется при $r < r_0$, поскольку с расстояния $r \sim r_0$ начинается нарушение гауссовой статистики, и расчетная кривая при $r \gg r_0$ стремится к теоретическому пределу для слабых сцинтилляций [22, 35].

Итак, в настоящей работе методом численного моделирования проведено исследование недиагональной компоненты Q_{xy} матрицы корреляций градиентов фазы поля плоской волны, распространяющейся в стратифицированной турбулентной атмосфере при различной силе турбулентности.

В режиме слабых сцинтилляций поля волны, когда дисперсия Рытова $\sigma_R^2 < 1$, в рамках нулевого приближения теории возмущений для однородной турбулентной трассы ранее в [20] было найдено аналитическое решение для Q_{xy} (11), которое находится в хорошем согласии с результатами детальных численных расчетов [21]. В настоящей работе показано, что в условиях стратифицированной трассы поведение Q_{xy} качественно такое же, как и в однородной атмосфере. В частности, в пространственном распределении Q_{xy} присутствует характерный максимум, положение которого с хорошей точностью соответствует случаю однородной атмосферы при одинаковых значениях дисперсии Рытова σ_R^2. Это означает, что методика определения дисперсии Рытова, предложенная в [20] для случая однородной атмосферы, сохраняет силу и для атмосферы стратифицированной, что позволяет применять ее в лазерных экспериментах не только на горизонтальных, но и произвольно наклонных трассах, а также при наблюдении звезд. Это дает возможность усовершенствования оптического диагностического комплекса (см. [14]) по определению интегральных параметров, характеризующих излучение и атмосферу.

В режиме сильных сцинтилляций, когда $\sigma_R^2 > 1$, с увеличением σ_R^2 результат численного моделирования $Q_{xy}(r)$ на расстояниях $r < r_0$ приближается к полученному (и проверенному в расчетах для однородной атмосферы) аналитическому выражению (13) [22], что подтверждает его справедливость и для стратифицированной атмосферы. При $r > r_0$ с увеличением r, как и в [22], результаты расчета стремятся к теоретическому пределу для слабых сцинтилляций.

В заключение отметим, что теоретические [36, 37] и экспериментальные [38, 39] работы, посвященные определению градиентов фазы и восстановлению сингулярных волновых фронтов с помощью датчика Шака–Гартмана, подтверждают возможность определения $Q_{xy}(r)$ в режиме сильных сцинтилляций. В настоящей работе используется колмогоровская модель турбулентности с ограничением спектра на низких пространственных частотах, которая при определенных условиях может нарушаться различным образом (см., например, [40]). Влияние неколмогоровских особенностей турбулентности требует отдельного рассмотрения и лежит за рамками настоящей работы.

Авторы благодарны И. В. Колоколову и В. В. Лебедеву за полезные обсуждения.

Финансирование работы. Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики Российской Федерации, направление 4 "Физика высоких плотностей энергии. Этап 2026–2028".

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. J. W. Hardy, *Adaptive optics in astronomical telescopes* (Oxford University Press, N.Y., 1998).
2. С. Г. Гаранин, Ф. А. Стариков, "Нелинейная и линейная адаптивная оптика для коррекции лазерных пучков", УФН **196**, 303 (2026) [S. G. Garanin and F. A. Starikov, "Nelineynaya i lineynaya adaptivnaya optika dlya korrektsii lasernykh puchkov", Uspekhi fizicheskikh nauk **196**, 303 (2026)] [in Russian].
3. A. N. Kolmogorov, "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", DAN **30**, 299 (1941).
4. A. N. Kolmogorov, "Dissipation of energy in locally isotropic turbulence", DAN **32**, 19 (1941).
5. A. M. Obukhov, "On the distribution of energy in the turbulent flow spectrum", DAN **32**, 22 (1941).
6. A. M. Obukhov, "The structure of the temperature field in a turbulent flow", Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr. and Geophys. **13**, 58 (1949).
7. S. Corrsin, "On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in isotropic turbulence", J. Appl. Phys. **22**, 469 (1951).
8. V. I. Tatarskii, *The Effects of the Turbulence Atmosphere on Wave Propagation* (Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971).
9. S. M. Rytov, Yu. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics 4: Wave Propagation through Random Media* (Springer-Verlag, GmbH, 1989).
10. J. W. Goodman, *Statistical Properties of Laser Speckle Pattern, in Laser Speckle and Related Phenomena*, ed. by J. C. Dainty (Springer-Verlag, Berlin, 1975).
11. D. L. Fried, "Statistics of a Geometric Representation of Wavefront Distortion", J. Opt. Soc. Am. **55**, 1427 (1965).
12. V. P. Lukin, "Outer scale of turbulence and its influence on fluctuations of optical waves", Phys.-Uspekhi **64**, 280 (2021).
13. R. V. Shack and B. C. Platt, "Production and use of a lenticular Hartmann screen", J. Opt. Soc. Am. **61**, 656 (1971).
14. A. Tokovinin, "The elusive nature of "seeing", Atmosphere **14**, 1694 (2023).
15. D. L. Fried, "Differential angle of arrival: theory, evaluation and measurement feasibility", Radio Sci. **10**, 71 (1975).
16. M. Sarazin and F. Roddier, "The ESO Differential Image Motion Monitor", Astron. Astrophys. **227**, 294 (1990).
17. V. A. Bogachev, I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, "Matrix of Correlations of Gradients of the Phase of the Light Wave as a Way to Measure the Principal Parameters of Turbulence", JETP Lett. **120**, 573 (2024).

18. V. N. Belousov, V. A. Bogachev, M. V. Volkov, S. G. Garanin, A. V. Kudryashov, A. N. Nikitin, A. L. Rukosuev, F. A. Starikov, Yu. V. Sheldakova, and R. A. Shnyagin, "Investigation of spatial and temporal characteristics of turbulent-distorted laser radiation during its dynamic phase correction in an adaptive optical system", Quantum Electron. **51**, 992 (2021).
19. Ф. А. Стариков, "Адаптивная оптика и новый способ измерения основных параметров турбулентности", приглашенный доклад, Международная конференция "Физика.СПб/2025", г. Санкт-Петербург, 20-24.10.2025 [F. A. Starikov, "Adaptivnaya optika i novyi metod izmereniya osnovnykh parametrov turbulentnosti", invited presentation, International Conference "Physics.SPb/2025", St. Petersburg, 22.10.2025]; https://physica.spb.ru/data/uploads/2025/program2025.html.
20. I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, "Correlations of the phase fluctuations in the presence of weak scintillations", J. Opt. Soc. Am. A **42**, 1654 (2025).
21. В. А. Богачев, И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, А. В. Немцева, Ф. А. Стариков, "Корреляции градиентов фазы световой волны, распространяющейся в турбулентной среде в режиме слабых сцинтилляций", Письма в ЖЭТФ **123**, 526 (2026) [V. A. Bogachev, I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, "Correlations of the Phase Gradients of the Light Wave Propagating in a Turbulent Medium in the Regime of Weak Scintillations", JETP Lett. **123**, 521 (2026)].
22. V. A. Bogachev, I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, A. V. Nemtseva, and F. A. Starikov, "Correlations of the phase gradients of the light wave propagating in a turbulent medium in the regime of strong scintillations", arXiv:2603.16811.
23. V. U. Zavorotnyi, V. I. Klyatskin, and V. I. Tatarskii, "Strong fluctuations of the intensity of electromagnetic waves in randomly inhomogeneous media", Sov. Phys. JETP **46**, 252 (1977).
24. M. I. Charnotskii, "Asymptotic analysis of finite- beam scintillation in a turbulent medium", Waves in Random Media **4**, 243 (1994).
25. I. Kolokolov, V. Lebedev, and P. Lushnikov, "Statistical properties of a laser beam propagating in a turbulent medium", Phys. Rev. E **101**, 042137 (2020).
26. T. von Karman, "Progress in the Statistical Theory of Turbulence", Proceedings of the National Academy of Sciences **34**, 530 (1948).
27. S. E. Skipetrov and S. S. Chesnokov, "Effect of the outer scale of turbulence on the resolution of an imaging system operating in the atmosphere", Atmos. Ocean. Opt. **10**, 490 (1997).
28. M. F. Spencer, *Limitations of deep-turbulence problem*, in *Proc. Optica, article PW3F.1* (Optica Publishing Group, Washington, DC, 2021).
29. J. A. Fleck, J. R. Morris, and M. D. Feit, "Time-dependent propagation of a high energy laser beam through the atmosphere", Appl. Phys. **10**, 129 (1976).
30. V. P. Kandidov, "Monte Carlo method in nonlinear statistical optics", Phys.-Uspekhi **39**, 1243 (1996).
31. V. P. Kandidov, M. P. Tamarov, and S. A. Shlyonov, "Influence of the atmospheric turbulence outer scale on the variance of a laser beam gravity center shifts", Atmos. Ocean. Opt. **11**, 23 (1998).
32. V. K. Ladagin, "Numerical integration of quasioptical equation", VANT. Ser. Metodiki i Programmy Chislennogo Resheniya Zadach Matematicheskoy Fiziki. **1**, 19 (1985) [in Russian].
33. E. M. Johansson and D. T. Gavel, "Simulation of stellar speckle imaging", Proc. SPIE **2200**, Amplitude and Intensity Spatial Interferometry II (1994).
34. A. S. Gurvich, A. I. Kon, V. L. Mironov, and S. S. Khmelevtsov, *Lazernoe izluchenie v turbulentnoy atmosphere* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
35. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, "Perturbation theory for phase correlations of a light wave propagating in a turbulent medium", arXiv:2601.08279.
36. D. L. Fried, "Adaptive optics wave function reconstruction and phase unwrapping when branch points are present", Opt. Commun. **200**, 43 (2001).
37. V. P. Aksenov and O. V. Tikhomirova, "Theory of singular-phase reconstruction for an optical speckle field in the turbulent atmosphere", JOSA **19**, 345 (2002).
38. J. Leach, S. Keen, M. Padgett, C. Saunter, and G. D. Love, "Direct measurement of the skew angle of the Poynting vector in helically phased beam", Opt. Express **14**, 11919 (2006).
39. F. A. Starikov, G. G. Kochemasov, S. M. Kulikov, A. N. Manachinsky, N. V. Maslov, A. V. Ogorodnikov, S. A. Sukharev, V. P. Aksenov, I. V. Izmailov, F. Yu. Kanev, V. V. Atuchin, and I. S. Soldatenkov, "Wavefront reconstruction of an optical vortex by a Hartmann-Shack sensor", Opt. Lett. **32**, 2291 (2007).
40. O. Korotkova and I.Toselli, "Non-classical atmospheric optical turbulence: Review", Appl. Sci. **11**, 8487 (2021).