

Оператор проектирования на собственные подпространства углового момента

М. И. Криворученко¹⁾

Национальный исследовательский центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 мая 2026 г.

После переработки 12 июня 2026 г.

Принята к публикации 16 июня 2026 г.

Для частиц с произвольным спином с помощью коварианта Фробениуса построен оператор проектирования на собственные подпространства квадратов полного и орбитального моментов импульса. Для данного коварианта существуют эквивалентные представления: в виде полинома от скалярного произведения операторов спина и орбитального момента и в виде конечного разложения по соответствующим операторам поляризации. Установлена связь с проекционным оператором Вилларса, который широко применяется в теории структуры атомных ядер.

DOI: 10.7868/S3034576626070224

Проекционные операторы находят многочисленные применения в квантовой механике, теории структуры атомных ядер и квантовой теории поля. Известно, что вариационные методы, как правило, нарушают симметрии исходного гамильтониана. В оболочечных моделях ядра восстановление трансляционной, галилеевой и вращательной симметрий, а также построение состояний с определенным числом частиц в рамках схем спаривания осуществляется с использованием проекционной техники [1, 2]. Решения в виде плоских волн релятивистских волновых уравнений для частиц со спином $1/2$ [3] и частиц с более высоким спином (см., например, [4]), включая их свойства симметрии, описываются с помощью проекционных операторов. Данный подход позволяет построить ковариантные алгебраические выражения для матричных элементов перехода частиц, которые обеспечивают вычислительную эффективность при моделировании процессов рассеяния [5–7].

Для систем со сферической симметрией проекционная техника открывает значительный, но пока не полностью реализованный потенциал в описании динамики частиц. Чтобы проиллюстрировать спектр возможных приложений, приведем три примера.

Первым иллюстративным примером является заполнение вакансии в электронной оболочке атома: $(nJLM) \rightarrow (nJLM)' + \gamma$, где n – главное квантовое число, J – полный момент импульса, $M = -J, \dots, J$ – магнитное квантовое число, а L – орбитальный момент. Электрон из оболочечки (nJL)

переходит в незанятое состояние $(nJLM)'$ с испусканием фотона γ .

Все атомные β -процессы служат дополнительной иллюстрацией, включая одиночный и двойной β -распады, а также электронный захват [8]. При расчетах вероятности электронного захвата и вероятности β -распада в связанное состояние производится суммирование по магнитным квантовым числам электрона.

В физике элементарных частиц рассматриваются распады заряженных частиц, захваченных атомами. В качестве примера упомянем распады Ω^- -гиперона со спином $S = 3/2$ из связанного состояния на атомной орбите [9]. Расчет скоростей распада Ω^- включает усреднение по магнитным квантовым числам.

В нерелятивистском приближении матричные элементы в задачах со сферической симметрией имеют вид

$$\mathfrak{M}_{fi} \propto \text{tr} \left[\hat{V} Y_{JM}^{LS}(\mathbf{n}) Y_{J'M'}^{L'S'\dagger}(\mathbf{n}') \right], \quad (1)$$

где $Y_{JM}^{LS}(\mathbf{n})$ и $Y_{J'M'}^{L'S'}(\mathbf{n}')$ – сферические тензоры частиц в начальном и конечном состояниях. Под знаком следа спинорные индексы опущены; $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ – единичные векторы в направлениях либо импульсов частиц, либо их координат. Оператор $\hat{V}$ описывает взаимодействие. В рассмотренном первом примере $Y_{J'M'}^{L'S'}(\mathbf{n}')$ входит в волновую функцию, описывающую вакансию в электронной оболочке. Уравнение (1) также применимо к захвату электрона и Ω^- -распаду из связанного состояния, где сферические тензоры описывают поляризацию и угловое распределение продуктов распада: нейтрино и либо Λ -гиперона, либо Ξ^0 -гиперона соответственно.

¹⁾e-mail: mikhail.krivoruchenko@itep.ru

В практически важных случаях, когда вероятность распада суммируется по M , сферические тензоры можно заменить оператором

$$\varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_*) = \sum_M Y_{JM}^{LS}(\mathbf{n}) Y_{JM}^{LS\dagger}(\mathbf{n}_*), \quad (2)$$

который проецирует волновые функции частиц со спином S на совместные собственные подпространства операторов $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}^\mu \mathcal{J}_\mu$ и $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^\mu \mathcal{L}_\mu$. В дальнейшем $\mathcal{S}^\mu$, $\mathcal{J}^\mu$ и $\mathcal{L}^\mu$ обозначают операторы спина, полного и орбитального моментов импульса соответственно, причем $\mathcal{J}^\mu = \mathcal{S}^\mu + \mathcal{L}^\mu$.

Выражение для вероятности распада содержит

$$\sum_{MM'} |\mathfrak{M}_{fi}|^2 \propto \text{tr} \left[\hat{V} \varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_*) \hat{V}^\dagger \varrho_{J'}^{L'S'}(\mathbf{n}', \mathbf{n}'_*) \right], \quad (3)$$

где $\mathbf{n}_*$ и $\mathbf{n}'_*$ – аргументы сферических тензоров, входящих в комплексно-сопряженный матричный элемент.

В данной работе мы приводим конечные разложения $\varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_*)$ по степеням скалярного произведения $\mathcal{S}^\mu \mathcal{L}_\mu$, а также в терминах операторов поляризации $T_{LM}(\mathcal{S})$ и $T_{LM}(\mathcal{L})$. Последние обычно используются для описания наблюдаемых характеристик частиц, таких как магнитные дипольные моменты, электрические квадрупольные моменты и т. д. Наши обозначения и соглашения о нормировке соответствуют принятым в работе [10].

Простое представление для $\varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_*)$ можно построить с помощью коварианта Фробениуса

$$\mathcal{F}_J^{LS} = \prod_{j \neq J} \frac{j(j+1)\mathcal{I} - \mathcal{J}^2}{j(j+1) - J(J+1)}, \quad (4)$$

где $\mathcal{I}$ – единичная матрица размерности $(2S+1) \times (2S+1)$, а произведение берется по всем значениям $j = |L-S|, \dots, L+S$, исключая $j = J$. Тождество $\mathcal{J}^2 = S(S+1)\mathcal{I} + L(L+1)\mathcal{I} + 2\mathcal{S}^\mu \mathcal{L}_\mu$ показывает, что правая часть уравнения зависит от скалярного произведения операторов $\mathcal{S}^\mu$ и $\mathcal{L}_\mu$. Выражение (4) представляет собой полином степеней $2J$ относительно $\mathcal{S}^\mu \mathcal{L}_\mu$, записанный в виде произведения соответствующих линейных множителей. В случае вырождения, как в нашем сценарии, произведение берется по различным собственным значениям $\mathcal{J}^2$.

Ковариант удовлетворяет условиям: $\mathcal{F}_J^{LS} \mathcal{F}_{J'}^{LS} = \delta_{JJ'} \mathcal{F}_J^{LS}$ и $\text{tr}[\mathcal{F}_J^{LS}] = 2J+1$, где $2J+1$ – кратность вырождения $\mathcal{J}^2$. Суммирование $\mathcal{F}_J^{LS}$ по J в интервале $|L-S|, \dots, L+S$ дает разложение единицы: $\sum_J \mathcal{F}_J^{LS} = 1$. В обозначениях бра-кет $\mathcal{F}_J^{LS} = \sum_M |JM\rangle \langle JM|$, где явная зависимость состояний $|JM\rangle$ от L и S опущена.

Теорема сложения для сферических гармоник позволяет выполнить суммирование $\varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}_*)$ по J :

$$\sum_J \varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \frac{2L+1}{4\pi} P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}') \mathcal{I}, \quad (5)$$

где полином Лежандра $P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}')$, умноженный на $(2L+1)/(4\pi)$, проецирует на подпространство, соответствующее собственному значению L орбитального момента. Применяя $\mathcal{F}_J^{LS}$ к обеим частям уравнения (5), получаем:

$$\varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \mathcal{F}_J^{LS} \frac{2L+1}{4\pi} P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}'). \quad (6)$$

Здесь оператор $\mathcal{L}_\mu$, входящий в $\mathcal{F}_J^{LS}$, действует на вектор $\mathbf{n}$.

Конечное разложение $\mathcal{F}_J^{LS}$ по степеням $\mathcal{S}^\mu \mathcal{L}_\mu$ имеет прозрачную и четко определенную структуру. Однако степени $\mathcal{S}^\mu \mathcal{L}_\mu$ содержат тензорные операторы, образованные произведениями $\mathcal{S}^{\mu_1} \dots \mathcal{S}^{\mu_K}$ и $\mathcal{L}_{\mu_1} \dots \mathcal{L}_{\mu_K}$, которые не являются ни симметричными, ни бесследовыми. Это затрудняет выделение вкладов суммарного спина и суммарного орбитального момента в отдельных членах разложения.

Спиновые поляризационные операторы $T_{KM}(\mathcal{S})$ образуют полный базис в пространстве эрмитовых матриц размерности $(2S+1) \times (2S+1)$ при $0 \leq K \leq 2S$. Они представляют собой неприводимые тензорные операторы группы вращений и создают естественную основу для описания взаимодействий с внешними полями определенной мультиполярности. В дальнейшем будет также использоваться оператор поляризации $T_{KM}(\mathcal{L})$, связанный с орбитальным моментом; он определяется аналогично $T_{KM}(\mathcal{S})$.

При вращениях системы координат внешнее произведение $Y_{JM}^{LS}(\mathbf{n}) Y_{J'M'}^{L'S'\dagger}(\mathbf{n}')$ преобразуется с помощью матриц поворота, действующих на спиновые индексы спиновых волновых функций и координаты $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$. Внешнее произведение спиновых волновых функций, $\chi_{S\sigma'} \chi_{S\sigma}^\dagger$, может быть разложено по спиновым поляризационным операторам [10]. Разложение показывает, что действие матриц поворота на спиновые индексы $\chi_{S\sigma'}$ и $\chi_{S\sigma}$ эквивалентно действию на векторные индексы спиновых матриц $\mathcal{S}^\mu$, и поэтому формально может быть заменено последними.

Мы разложим выражение $Y_{JM}^{LS}(\mathbf{n}) Y_{J'M'}^{L'S'\dagger}(\mathbf{n}')$ по операторам поляризации $T_{LM}(\mathcal{S})$ в комбинации со сферическими гармониками $Y_{LM}(\mathbf{n})$ и $Y_{L'M'}(\mathbf{n}')$, соответствующими начальному и конечному состояниям частиц. Такое разложение позволяет представить $\varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ в виде суммы скалярных произведе-

ний $T_{LM}(\mathcal{S})$ и $T_{LM}(\mathcal{L})$, действующих на полином Лежандра степени L .

Заменяя внешнее произведение $\chi_{S\sigma'}\chi_{S\sigma}^\dagger$ на сумму поляризационных операторов спина и суммируя по магнитным квантовым числам в разложении $Y_{J_1 M_1}^{L_1 S}(\mathbf{n})Y_{J_2 M_2}^{L_2 S^\dagger}(\mathbf{n}')$, получаем

$$\begin{aligned} & Y_{J_1 M_1}^{L_1 S}(\mathbf{n})Y_{J_2 M_2}^{L_2 S^\dagger}(\mathbf{n}') = \\ & = \sum_{K L_{12} L M} (-1)^{-M_2+J_2-L_2+L-K-L_{12}} \Pi_{K L_{12} J_1 J_2} C_{J_1 M_1 J_2 - M_2}^{L M} \\ & \quad \times \begin{Bmatrix} S & S & K \\ L_2 & L_1 & L_{12} \\ J_2 & J_1 & L \end{Bmatrix} \times \\ & \quad \times \{T_K(\mathcal{S}) \otimes \{Y_{L_1}(\mathbf{n}) \otimes Y_{L_2}(\mathbf{n}')\}_{L_{12}}\}_{LM}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\{9j\}$ обозначает $9j$ символ, $(Y_{L_1}(\mathbf{n}_1) \otimes Y_{L_2}(\mathbf{n}_2))_{LM}$ – двойная сферическая гармоника, $\Pi_{K L_{12} J_1 J_2} = ((2K+1)(2L_{12}+1)(2J_1+1)(2J_2+1))^{1/2}$. Суммирование ограничено условием $0 \leq K \leq 2S$ и подчиняется неравенствам треугольника для угловых моментов в группах (L_1, L_2, L_{12}) , (K, L_{12}, L) и (L, J_1, J_2) . Матричный элемент (1) с $\hat{V} = T_{KM}(\mathcal{S})$ можно получить из уравнения (7), используя ортогональность поляризационных спиновых операторов при взятии следа в пространстве спиновых матриц.

В квадрате модуля матричных элементов сферические тензоры группируются в пары, что очевидно из уравнения (3). Соответственно, особый интерес представляет частный случай $J_1 = J_2 = J$ и $L_1 = L_2 = L$, в котором суммирование выполняется по M_1 при $M_2 = M_1$. Результат представляется в виде уравнения (6) с ковариантом Фробениуса, выраженным через скалярное произведение $T_{KM}(\mathcal{S})$ и $T_{KM}(\mathcal{L})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_J^{LS} &= (2J+1) \sum_{K=0}^{2\min(S,L)} (-1)^{S+L+J+K} \sqrt{2K+1} \times \\ & \quad \times \begin{Bmatrix} S & S & K \\ L & L & J \end{Bmatrix} \{T_K(\mathcal{S}) \otimes T_K(\mathcal{L})\}_{00}, \quad (8) \end{aligned}$$

где $\{6j\}$ обозначает $6j$ символ; индекс K принимает значения от нуля до минимума двух максимальных значений полярности, связанных с операторами поляризации спинового и орбитального моментов. Оператор $\varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ ковариантен относительно вращений.

Действие оператора $\{T_K(\mathcal{S}) \otimes T_K(\mathcal{L})\}_{00}$ на функцию $(2L+1)P_L(\mathbf{nn}')/(4\pi)$, входящую в уравнение (6), приводит к выражению

$$(-1)^{K-L} \{T_K(\mathcal{S}) \otimes \{Y_L(\mathbf{n}) \otimes Y_L(\mathbf{n}')\}_K\}_{00}.$$

Совместные собственные подпространства операторов $\mathcal{J}^2$ и $\mathcal{J}_z$ получаются с помощью оператора, построенного в виде композиции двух ковариантов Фробениуса:

$$\mathcal{F}_{JM} = \mathcal{F}_J^{LS} \prod_{m \neq M} \frac{m\mathcal{I} - \mathcal{J}_z}{m - M}, \quad (9)$$

где произведение берется по всем целым или полуцелым числам m от $-J$ до J , за исключением $m = M$. В обозначениях бра-кет: $\mathcal{F}_{JM} = |JM\rangle\langle JM|$.

Соответствие с оператором проекции углового момента Вилларса $\mathcal{P}_{MM'}^J = |JM\rangle\langle JM'|$, обычно используемым в исследованиях структуры ядер [1, 2], устанавливается с помощью соотношений $\mathcal{P}_{MM}^J = \mathcal{F}_{JM}$ и $\sum_M \mathcal{P}_{MM}^J = \mathcal{F}_J^{LS}$. Недиagonальные матричные элементы подчиняются соотношению

$$\mathcal{P}_{MM'}^J = N_{JMM'} (\mathcal{J}_{\pm 1})^{|M-M'|} \mathcal{F}_{JM'}, \quad (10)$$

где $\mathcal{J}_\mu$ задан в циклическом базисе. Верхний знак $(+)$ используется при $M > M'$, а нижний знак $(-)$ – в обратных случаях. Нормировочная константа $N_{JMM'}$ определяется уравнением

$$1/N_{JMM'} = \prod_m \left(\mp \sqrt{(J \pm m + 1)(J \mp m)/2} \right),$$

в котором произведение берется по всем значениям m в интервале $[\min(M', M \mp 1), \max(M', M \mp 1)]$. Оператор $\mathcal{P}_{MM'}^J$ находится численно путем интегрирования по пространству группы вращений, тогда как алгебраическое выражение в уравнении (10) основывается на операции матричного умножения при матричной реализации операторов.

Уравнения (4), (9) и (10) остаются справедливыми для многочастичных систем при условии вырождения собственных значений операторов $\mathcal{J}^2$ и $\mathcal{J}_z$. Для таких систем внутренние квантовые числа (L, S) одной частицы заменяются соответствующими значениями (L_a, S_a) для каждой из A частиц (где $a = 1, \dots, A$), например, нуклонов в ядре. Оператор полного углового момента выглядит как $\mathcal{J}^\mu = \sum_a (S_a^\mu + \mathcal{L}_a^\mu)$. Схема связи угловых моментов частиц определяется исходя из минимизации энергии в рамках вариационного метода.

Уравнение (8) допускает представление в декартовой системе координат, если выразить скалярное произведение поляризационных операторов

$$(T_K(\mathcal{S}) \otimes T_K(\mathcal{L}))_{00} = \frac{(-1)^K}{\sqrt{2K+1}} A_{SK}^{-1/2} A_{LK}^{-1/2} \mathcal{O}_K$$

через оператор $\mathcal{O}_K = S^{\mu_1} \dots S^{\mu_K} \mathcal{L}_{\nu_1} \dots \mathcal{L}_{\nu_K} \theta_{\mu_1 \dots \mu_K}^{\nu_1 \dots \nu_K}$, где $\theta_{\mu_1 \dots \mu_K}^{\nu_1 \dots \nu_K}$ – симметричный бесследовый тензор, обладающий множеством полезных свойств, в том числе свойствами проекционного оператора (см., напри-

мер, [11]). Нормировочная константа A_{SK} определяется соотношением

$$A_{SK} = \frac{K!(2S+K+1)!}{2^{2K}(2K+1)!!(2S-K)!},$$

и аналогично для A_{LK} .

Тензор $\theta_{\mu_1 \dots \mu_K}^{\nu_1 \dots \nu_K}$ возникает как множитель в пропагаторе свободных частиц с целым спином. Аналогичную роль в описании частиц с целым и полуцелым спином в сферически симметричных потенциалах играет оператор $\varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$. Нерелятивистский пропагатор таких частиц допускает разложение

$$G_S(E, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{JL} G_{JLS}(E, r, r') \varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}'), \quad (11)$$

которое отделяет радиальную компоненту $G_{JLS}(E, r, r')$ от угловой части. Здесь E обозначает энергию частицы, пространственные координаты определяются как $\mathbf{r} = \mathbf{n}r$, $\mathbf{r}' = \mathbf{n}'r'$. Явная форма оператора $\varrho_J^{LS}(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ упрощает анализ поведения частиц с высшими спинами в сферически симметричных потенциалах.

В заключение приведем, в декартовых обозначениях, два частных примера проекционных операторов для $S = 1/2$ и $S = 1$, полученных с использованием уравнений (4), (5) и (8). Для первого случая явная форма имеет вид

$$\varrho_J^{L1/2}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \left((J + \frac{1}{2})\mathcal{O}_0 + 4(J - L)\mathcal{O}_1 \right) \frac{1}{4\pi} P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}').$$

Проекция на состояния частиц со спином $S = 1$ задается выражениями

$$\begin{aligned} \varrho_{L+1}^{L1}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') &= \\ &= \left(\frac{2L+3}{3}\mathcal{O}_0 + \frac{2L+3}{2(L+1)}\mathcal{O}_1 + \frac{1}{L+1}\mathcal{O}_2 \right) \frac{1}{4\pi} P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}'), \\ \varrho_L^{L1}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') &= \\ &= \left(\frac{2L+1}{3}\mathcal{O}_0 - \frac{2L+1}{2L(L+1)}\mathcal{O}_1 - \frac{2L+1}{L(L+1)}\mathcal{O}_2 \right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{4\pi} P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}'), \\ \varrho_{L-1}^{L1}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') &= \\ &= \left(\frac{2L-1}{3}\mathcal{O}_0 - \frac{2L-1}{2L}\mathcal{O}_1 + \frac{1}{L}\mathcal{O}_2 \right) \frac{1}{4\pi} P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}'). \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{O}_0 = 1$, действие оператора $\mathcal{O}_K$ для $K = 1, 2$ описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}') &= -iS^\mu [\mathbf{n} \times \mathbf{n}']_\mu P_L'(\mathbf{n}\mathbf{n}'), \\ \mathcal{O}_2 P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}') &= S^{\mu_1} S^{\mu_2} \theta_{\mu_1 \mu_2}^{\nu_1 \nu_2} \times \\ &\times (-n_{\nu_1} n_{\nu_2}' P_L'(\mathbf{n}\mathbf{n}') - [\mathbf{n} \times \mathbf{n}']_{\nu_1} [\mathbf{n} \times \mathbf{n}']_{\nu_2} P_L''(\mathbf{n}\mathbf{n}')), \end{aligned}$$

где $P_L'(\mathbf{n}\mathbf{n}')$ и $P_L''(\mathbf{n}\mathbf{n}')$ – первая и вторая производные полинома Лежандра. При суммировании по J представления приводят к уравнению (5). Для $L = 0$ при всех значениях спина $4\pi \varrho_S^{0S}(\mathbf{n}, \mathbf{n}') = \mathcal{O}_0$. Несложно получить проекционные операторы со спином $S > 1$. Благодаря симметрии относительно перестановок величин $\mathcal{L}_{\mu_1}, \dots, \mathcal{L}_{\mu_K}$, которые входят в $\mathcal{O}_K$, можно применить формулу Фаа ди Бруно при выводе выражений с двойным суммированием для $\mathcal{O}_K P_L(\mathbf{n}\mathbf{n}')$ в случае $K \geq 3$.

Рассмотренные разложения $\mathcal{F}_J^{LS}$ применимы в релятивистской постановке после трехмерной редукции в системе отсчета со сферической симметрией. Скорости захвата электронов в ^{123}Te , рассчитанные релятивистски в рамках развитого формализма, согласуются с оценками, приведенными в литературе. В дальнейших исследованиях формализм планируется использовать для описания β -процессов в модели оболочек с восстановленной трансляционной и галилеевой инвариантностью.

Автором выражается признательность профессору Ф. Шимковичу за привлечение внимания к использованию проекционной техники в задачах электронного захвата.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась в рамках Государственного задания Национального исследовательского центра “Курчатовский институт”. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. K. W. Schmid, “On the use of general symmetry-projected Hartree-Fock-Bogoliubov configurations in variational approaches to the nuclear many-body problem”, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **52**, 565 (2004).
2. A. A. Raduta, *Nuclear Structure with Coherent States* (Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2015), 523 p.
3. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Теоретическая физика, том IV, Квантовая электродинамика* (Физматлит, М., 2002), 720 с. [V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed. (Butterworth-Heinemann, 1982), v. 4, 680 p.].
4. S. Cotogno, C. Lorcè, P. Lowdon, and M. Morales, “Covariant multipole expansion of local currents for massive states of any spin”, *Phys. Rev. D* **101**, 056016 (2020).
5. М. И. Криворученко, “Токи перехода частиц со спином $1/2$ ”, *УФН* **164**, 643 (1994) [M. I. Krivoruchenko,

- “Transitional currents of spin 1/2 particles”, Phys.-Uspekhi **37**, 601 (1994)].
6. Л. В. Прохоров, “Инфракрасные и коллинеарные расходимости в калибровочных теориях”, УФН **169**, 1199 (1999) [L. V. Prokhorov, “Infrared and collinear divergences in gauge theories”, Phys.-Uspekhi **42**, 1099 (1999)].
 7. N. Ahmadiroz, C. Lopez-Arcos, M. A. Lopez-Lopez, and Ch. Schubert, “The QED four-photon amplitudes off-shell: Part 1”, Nucl. Phys. B **991**, 116216 (2023).
 8. F. Šimkovic, “Neutrino masses and interactions and neutrino experiments in the laboratory”, Phys.-Uspekhi **64**, 1238 (2021).
 9. M. I. Krivoruchenko and A. Faessler, “Decays, contact P-wave interactions and hyperfine structure in Ω^- exotic atoms”, Nucl. Phys. A **803**, 173 (2008).
 10. Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента* (Наука, Л., 1975), 439 с. [D. A. Varshalovich, A. N. Moskavlev, and V. K. Khersonsky, *Quantum theory of angular momentum* (World Scientific, Singapore, New Jersey, Hong Kong, 1988), 528 p.].
 11. J. Applequist, “Traceless cartesian tensor forms for spherical harmonic functions: new theorems and applications to electrostatics of dielectric media”, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, 4303 (1989).