Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 6, стр. 265 – 267 *25 сентября 1989 г.*

НОВАЯ АЛГЕБРА ВНУТРЕННИХ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Г.А.Котельников

Построена новая алгебра инвариантности однородных уравнений Максвелла. В качестве подалгебр она содержит 16-мерную алгебру Ли, Грассмана и супералгебру.

Внутренние симметрии содержат важную информацию об объектах изучения. В качестве примера можно привести дуальную симметрию уравнений электродинамики, подразумевающую существование не только электрических, но и магнитных зарядов [1]. Внутренние симметрии уравнений свободного электромагнитного поля изучались рядом авторов [1 - 5], и до сих пор были ограничены классом групп и алгебр Ли. Примером может служить алгебра Ли группы $U(2) \otimes U(2)$ [2]. Целью настоящей работы является расширение класса алгебр инвариантности уравнений Максвелла, и , в частности, построение алгебры Грассмана и супералгебры.

Воспользуемся векторной формулировкой уравнений

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{H}; \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0; \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \partial_0 \mathbf{E}; \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{1}$$

где $x^0 = ct$ (c – скорость света, t – время); x, y, z – пространственные переменные. С помощью преобразования Фурье для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$

$$\mathbf{E} = (1/2\pi)^{3/2} \int d^3p\, \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}; \qquad \mathbf{H} = (1/2\pi)^{3/2} \int d^3p\, \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{2}$$

перейдем к уравнениям Максвелла в импульсном представлении

$$\mathbf{p} \times \tilde{\mathbf{E}} = i\partial_0 \tilde{\mathbf{H}}; \qquad \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0; \qquad \mathbf{p} \times \tilde{\mathbf{H}} = -i\partial_0 \tilde{\mathbf{E}}; \qquad \mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{H}} = 0 \cdot \tag{3}$$

Введем совокупность преобразования полей

$$\begin{gathered} \tilde{E}'_k = \tilde{E}_k \cos\theta + i[(\not{D}^a)^L (\not{D}^s)^M (D^s)^N]_{kl} \tilde{E}_l \sin\theta; \quad \tilde{E}'_k = \tilde{E}_k \cos\varphi + i[(\not{D}^a)^L (\not{D}^s)^M (D^s)^N]_{kl} \tilde{H}_l \sin\varphi; \\ \tilde{H}'_k = \tilde{H}_k \cos\theta + i[(\not{D}^a)^L (\not{D}^s)^M (-D^s)^N]_{kl} \tilde{H}_l \sin\theta; \quad \tilde{H}'_k = \tilde{H}_k \cos\varphi - i[(\not{D}^a)^L (\not{D}^s)^M (-D^s)^N]_{kl} \tilde{E}_l \sin\varphi, \end{gathered} \tag{4}$$

где θ, φ – групповые параметры; $k, l = 1, 2, 3$; $L, M, N = 0, 1, 2, \ldots$ $n \to \infty$; a, s – индексы антисимметрии и симметрии. Потребуем, чтобы совокупность (4) переводила уравне -

ния (3) в себя. Соответствующие условия инвариантности позволяют найти общий вид матриц $\mathcal{D}^a, \mathcal{D}^s, D^s$. Матрицы зависят от переменных p_k и некоторых функций этих переменных [3]. Они обладают свойством коммутации и антикоммутации

$$[\mathcal{D}^a, \mathcal{D}^s] = 0, \quad \{\mathcal{D}^a, D^s\} = 0, \quad [\mathcal{D}^s, D^s] = 0 \tag{5}$$

и порождают бесконечную совокупность преобразований симметрии (4) уравнений (3). Выделим подмножество матриц, удовлетворяющих условию нормировки на решениях

$$\mathcal{D}^a\mathcal{D}^a\varphi = E\varphi, \quad \mathcal{D}^s\mathcal{D}^s\varphi = E\varphi, \quad D^sD^s\varphi = E\varphi . \tag{6}$$

Нормировка позволяет конкретизировать вид матриц

$$\mathcal{D}^a = \pm i \begin{Vmatrix} 0 & -p_3/p & p_2/p \\ p_3/p & 0 & -p_1/p \\ -p_2/p & p_1/p & 0 \end{Vmatrix} \tag{7}$$

$$\mathcal{D}^s = \pm \begin{Vmatrix} (p^2-2p_1^2)/p^2 & -2p_1p_2/p^2 & -2p_1p_3/p^2 \\ -2p_1p_2/p^2 & (p^2-2p_2^2)/p^2 & -2p_2p_3/p^2 \\ -2p_1p_3/p^2 & -2p_2p_3/p^2 & (p^2-2p_3^2)/p^2 \end{Vmatrix} \tag{8}$$

$$D^s = \pm\frac{2}{|L|} \begin{Vmatrix} p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2-p_2^2p_3^2 & p_1p_2p_3^2 & p_1p_3p_2^2 \\ p_1p_2p_3^2 & p_1^2p_2^2-p_1^2p_3^2+p_2^2p_3^2 & p_2p_3p_1^2 \\ p_1p_3p_2^2 & p_2p_3p_1^2 & -p_1^2p_2^2+p_1^2p_3^2+p_2^2p_3^2 \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

где $p=(p_1^2+p_2^2+p_3^2)^{1/2}$, $|L| = 2(p_1^4p_2^4+p_1^4p_3^4+p_2^4p_3^4-p^2p_1^2p_2^2p_3^2)^{1/2}$. Из них (7) и (9) со знаком " + " установлены в [2], реализация (8) рассматривается впервые. Имея в виду (7) – (9), обратимся к преобразованиям (4). Им соответствует совокупность инфинитезимальных матриц размерности 6 X 6

$$Y_{LMN} = i\begin{Vmatrix} (\mathcal{D}^a)^L(\mathcal{D}^s)^M(D^s)^N & 0 \\ 0 & (\mathcal{D}^a)^L(\mathcal{D}^s)^M(-D^s)^N \end{Vmatrix}; \quad Z_{LMN} = i\begin{Vmatrix} 0 & (\mathcal{D}^a)^L(\mathcal{D}^s)^M(D^s)^N \\ -(\mathcal{D}^a)^L(\mathcal{D}^s)^M(-D^s)^N & 0 \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Матрицы обладают перестановочными свойствами

$$\begin{aligned} [Y_{LMN}, Y_{L'M'N'}]_\mp &= i((-1)^{NL'} \mp (-1)^{N'L})Y_{L+L'M+M'N+N'}; \\ [Y_{LMN}, Z_{L'M'N'}]_\mp &= i((-1)^{NL'} \mp (-1)^{N'L+N})Z_{L+L'M+M'N+N'}; \\ [Z_{LMN}, Z_{L'M'N'}]_\mp &= i(-(-1)^{NL'+N'} \pm (-1)^{N'L+N})Y_{L+L'M+M'N+N'}, \end{aligned} \tag{11}$$

и, следовательно, удовлетворяют и алгебре Ли, и алгебре Грассмана, и допускают объединение в единую алгебру $A^L_\infty \oplus A^G_\infty$ и супералгебру $[Y, Y] = Y$, $[Y, Z] = Z$, $\{Z, Z\} = Y$. С помощью таблицы умножения

$$\mathcal{D}^a\mathcal{D}^a = \mathcal{D}^s, \quad \mathcal{D}^s\mathcal{D}^s = \mathcal{D}^s, \; D^sD^s = \mathcal{D}^s, \; \mathcal{D}^a\mathcal{D}^s = \mathcal{D}^a, \; \mathcal{D}^a D^s = D^s, \; \mathcal{D}^s D^s = D^s \tag{12}$$

выделим 16 инфинитезимальных матриц Y_{000}, $Y_{100}, Y_{010}, Y_{001}, Y_{110}, Y_{101}, Y_{011}, Y_{111}$, $Z_{000}, Z_{100}, Z_{010}, Z_{001}, Z_{110}, Z_{101}, Z_{011}, Z_{111}$, через которые выражаются все остальные матрицы (10). Выделенные матрицы образуют замкнутые совокупности, и порождают 16-мерные алгебры Ли, Грассмана, прямую сумму $A^L_{16} \oplus A^G_{16}$, а также 16-мерную супералгебру

$$\begin{aligned}
&[Y_{LMN}, Y_{L'M'N'}] = i((-1)^{NL'} - (-1)^{N'L})\, Y_{L+L'M+M'N+N'}\,; \\
&[Y_{LMN}, Z_{L'M'N'}] = i((-1)^{NL'} - (-1)^{N'L+N})\, Z_{L+L'M+M'N+N'}\,; \\
&\{Z_{LMN}, Z_{L'M'N'}\} = i(-(-1)^{NL'+N'} - (-1)^{N'L+N})\, Y_{L+L'M+M'N+N'}\,;
\end{aligned} \tag{13}$$

$L, \; M, N = 0, 1.$

Линейные комбинации

$$\begin{aligned}
&A_1 = -(iY_{101} + Z_{001})/4; \quad A_2 = -(Y_{100} + iZ_{000})/4; \quad A_3 = -(-Y_{001} + iZ_{101})/4; \\
&A_4 = -(iY_{101} - Z_{001})/4; \quad A_5 = -(-Y_{100} + iZ_{000})/4; \quad A_6 = -(Y_{001} + iZ_{101})/4; \\
&B_1 = -(iY_{111} + Z_{011})/4; \quad B_2 = -(Y_{110} + iZ_{010})/4; \quad B_3 = -(-Y_{011} + iZ_{111})/4; \\
&B_4 = -(iY_{111} - Z_{011})/4; \quad B_5 = -(-Y_{110} + iZ_{010})/4; \quad B_6 = -(Y_{011} + iZ_{111})/4
\end{aligned} \tag{14}$$

совместно с коммутирующими матрицами $Y_{000}, Y_{010}, Z_{100}, Z_{110}$ образуют алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы $U_{16} = U(2) \otimes U(2) \otimes U(2) \otimes U(2)$. Переход к x-пространству позволяет установить, что U_{16} содержит преобразования подгруппы $U(1)$ – Хевисайда–Лармора–Райнича [1,2]; $U(1) \otimes U(1)$ – Данилова [4], Ибрагимова [5], $U(2) \otimes U(2)$ – Фущича и Никитина [2]. За исключением $U(1) \otimes U(1)$ все остальные преобразования в x-пространстве оказываются нелокальными (интегральными), что согласуется с [2] применительно к подгруппе $SU(2) \otimes SU(2)$.

Литература

1. *Стражев В.И., Томильчик Л.М.* Электродинамика с магнитным зарядом. Минск: Наука и Техника, 1975, с. 18.
2. *Фущич В.И., Никитин А.Г.* Симметрия уравнений Максвелла. Киев: Наукова Думка. 1983, с. 5, 6, 23, 74.
3. *Котельников Г.А.* В кн.: Теоретико-групповые методы в физике. М.: Наука, 1980, 1, 203.
4. *Данилов Ю.А.* Препринт ИАЭ–1452, 1967, с. 18.
5. *Ибрагимов Н.Х.* ДАН СССР, 1968, 178, № 3, 566.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
18 августа 1989 г.