Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 6, стр. 270 – 272 *25 сентября 1989 г.*

ДУАЛЬНОСТЬ И β-ФУНКЦИИ В ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ ФРИДМАНА–ТАУНСЕНДА

С.В.Кетов, К.Е.Осетрин, Я.С.Прагер

Для дуальных версий двумерной теории Фридмана–Таунсенда и группы $SU(2)$ в явном виде найдены метрика и потенциал кручения. Приведены результаты компьютерных вычислений двухпетлевых β-функций.

Классическая эквивалентность самодействующего антисимметричного калибровочного тензорного поля (FT-модели) и главной киральной σ-модели в $d = 4$ доказана [1] с помощью дуального преобразования. Замечательно, что в двумерном случае для группы $SU(2)$ FT-модель (нелинейная σ-модель с кручением) и дуальная ей главная киральная σ-модель могут быть построены явно.

Рассмотрим теорию Фридмана–Таунсенда в $d = 2$ с лагранжианом первого порядка

$$L_1 = -\frac{1}{2} B_a \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu a} - \frac{1}{2} A_{\mu a} A^{\mu}_{a}, \qquad (1)$$

где $F^a_{\mu\nu}$ суть неабелева напряженность калибровочного поля A^a_μ для группы $SU(2)$ со структурными константами ϵ^{abc}; $a, b = 1, 2, 3$.

Уравнения движения для $A_{\mu a}$ из действия (1)

$$2\partial_\mu B^c \epsilon^{\mu\nu} + (\eta^{\mu\nu}\delta^{bc} + \epsilon^{\mu\nu} B_a \epsilon^{abc}) A^b_\mu = 0 \qquad (2)$$

являются алгебраическими относительно A^b_μ и могут быть разрешены явно,

$$A^\mu_a = \frac{2}{1 + B^2} (\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu B_a + \epsilon^{\mu\nu} B_a B_b \partial_\nu B_b + \epsilon_{abc} B_b \partial^\mu B_c), \quad B^2 \equiv B_a B_a, \qquad (3)$$

что является нетривиальным свойством в силу B-зависимости матрицы при A^b_μ в (2).

После подстановки (3) в (1) получаем двумерную нелинейную σ-модель с членом Весса–Зумино–Виттена (или кручением)

$$\frac{1}{8} L_{\sigma(1)} = -\frac{1}{2} [g_{ab}(B)\, \partial_\mu B_a \partial^\mu B_b + h_{ab}(B) \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu B_a \partial_\nu B_b], \qquad (4)$$

где

$$g_{ab} = \frac{\delta_{ab} + B_a B_b}{1 + B^2}, \quad h_{ab} = \frac{-\epsilon_{abc} B_c}{1 + B^2}. \qquad (5)$$

С другой стороны, варьируя (1) по B_a, находим связь $F_{\mu\nu a} = 0$, которая может быть разрешена относительно A^a_μ

$$A^a_\mu = 2 M_b{}^a(\theta)\, \partial_\mu \theta^b \qquad (6)$$

в терминах скалярных полей (локальных координат) θ^a и локального репера $M_b{}^a(\theta)$, удовлетворяющего уравнениям Маурера–Картана

$$\frac{\partial M_b{}^a}{\partial \theta^c} - \frac{\partial M_c{}^a}{\partial \theta^b} + 2\epsilon^{adf} M_c{}^d M_b{}^f = 0. \qquad (7)$$

После подстановки (6) в (1) находим лагранжиан главной киральной σ-модели для $SU(2)$, дуальной (4),

$$L_{\sigma(2)} = -\frac{1}{2} \hat{g}_{ab}(\theta)\, \partial_\mu \theta^a \partial^\mu \theta^b, \qquad (8)$$

где метрика имеет вид

$$\hat{g}_{ab}(\theta) \equiv 4 M_a{}^c(\theta) M_b{}^c(\theta). \qquad (9)$$

Для нахождения явного вида метрики $\hat{g}_{ab}(\theta)$ воспользуемся формальным решением уравнений Маурера–Картана [2]

$$M_{ab}(\theta)=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(T_b U^{-1}\partial_a U)=-\frac{1}{2}\int_0^1 dt\,\mathrm{tr}\,(T_b U^{-t} T_a U^t), \tag{10}$$

где

$$U(\theta)\equiv \exp\,\{i\sum_{a=1}^{3}\theta^a T_a\}, \tag{11}$$

T_c суть генераторы $SU(2)$ в присоединенном представлении. С использованием легко проверяемых тождеств

$$(\theta^a T_a)^{2k+1}=R^{2k}\theta^a T_a, \tag{12}$$
$$(\theta^a T_a)^{2k+2}=R^{2k}(\theta^a T_a)^2,$$
$$\mathrm{tr}\,[T_a(\theta^b T_b)^2 T_c(\theta^f T_f)]=0,$$
$$\mathrm{tr}\,[T_a(\theta^b T_b)^2 T_c(\theta^f T_f)^2]=2R^2\theta_a\theta_c,$$

где $R^2\equiv\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2$, вытекающих из элементарных свойств генераторов $SU(2)$

$$[T_a,T_b]=i\epsilon_{abc}T_c,\quad \mathrm{tr}\,(T_aT_b)=2\delta_{ab}, \tag{13}$$
$$\mathrm{tr}\,(T_aT_bT_c)=i\epsilon_{abc},\quad \mathrm{tr}\,(T_aT_bT_cT_d)=\delta_{ab}\delta_{cd}+\delta_{ad}\delta_{bc},$$

находим

$$U^{\pm t}=1\pm\frac{i\sin Rt}{R}(\theta^a T_a)+\frac{\cos(Rt)-1}{R^2}(\theta^a T_a)^2. \tag{14}$$

После подстановки (14) в (10) и интегрирования получаем

$$M^{ab}(\theta)=-\frac{\sin R}{R}\delta^{ab}-\frac{\cos R-1}{R^2}\epsilon^{abc}\theta^c-\frac{R-\sin R}{R^3}\theta^a\theta^b. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\hat{g}_{ab}(\theta)=\frac{4(2\cos R-\cos 2R-1)}{R^4}(R^2\delta_{ab}-\theta_a\theta_b)+\frac{4\theta_a\theta_b}{R^2}. \tag{16}$$

Перенормировка двумерной нелинейной σ-модели может быть понята как квантовая деформация геометрии полевого многообразия. В свою очередь, перенормировка характеризуется ренормгрупповыми β-функциями. Для вычисления конкретных значений β-функций по данной метрике и потенциалу кручения нами использовалась система аналитических вычислений на ЭВМ (версия REDUCE 3.0) и общие результаты [3].

Для теории (5) однопетлевые β-функции имеют вид

$$(2\pi)\beta^{(1)}_{ab}=\frac{1}{(1+B^2)^2}\{g_{ab}[\frac{1}{2}(3+B^2)^2+B^2-3]-\delta_{ab}(3+B^2)\}, \tag{17}$$

$$(2\pi)\check{\beta}^{(1)}_{ab}=-\frac{2h_{ab}}{(1+B^2)^2},$$

что согласуется с результатом "ручных" вычислений[1)].

Для дуальной теории (8) с метрикой (16) получается результат

$$(2\pi)\hat{\beta}^{(1)}_{ab}=\frac{K''+2}{2R^4}(\theta_a\theta_b-R^2\delta_{ab})+(2KK''-K'^2)\frac{\theta_a\theta_b}{2K^2R^2}, \tag{18}$$

[1)] Авторы выражают благодарность И.В.Тютину за это замечание.

где штрих означает дифференцирование по R,

$$K \equiv \cos 2R - 2\cos R + 1. \tag{19}$$

Компьютерные расчеты двухпетлевой β-функции σ-модели (4) – (5) приводят к результатам

$$\begin{aligned}(4\pi)^2 \beta^{(2)}_{ab} = \frac{1}{2}(1+B^2)^{-5}\{B_a B_b[-3(1+B^2)^4 - 24(1+B^2)^3 -\\ - 48(1+B^2)^2 + 48(1+B^2) - 32] + \delta_{ab}[-3(1+B^2)^4 + 80(1+B^2) - 32]\},\end{aligned} \tag{20}$$

$$(4\pi)^2 \tilde{\beta}^{(2)}_{ab} = (1+B^2)^{-4} h_{ab}\{(1+B^2)^2 + 4(1+B^2) - 2\}.$$

Аналогичный результат для модели (16) имеет вид

$$\begin{aligned}(4\pi)^2 \hat{\beta}^{(2)}_{ab} = \frac{-1}{16R^4K^3}[(2K''K - K'^2)^2 + (K'^2 + 4K)] \times\\ \times (\theta_a\theta_b - R^2\delta_{ab}) - \frac{1}{8R^2K^4}(2K''K - K'^2)\theta_a\theta_b.\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, разным дуальным версиям одной и той же классической двумерной теории отвечают разные геометрии (метрика и кручение) и разные β-функции. Квантовая эквивалентность не исключает различия β-функций, поскольку последние определяются по отношению к разным полям.

Основными результатами работы являются формулы (5), (16); (17), (18), (20) и (21), полезные для приложений.

Авторы признательны И.Л.Бухбиндеру, С.М.Кузенко и И.В.Тютину за многочисленные обсуждения.

Литература

1. *Freedman D.Z., Townsend P.K.* Nucl. Phys. B, 1981, 177, 282.
2. *Braaten E. et al.* Nucl. Phys. B, 1985, **260**, 630.
3. *Ketov S.V.* Nucl. Phys. B, 1987, **294**, 813.

Институт сильноточной электроники
Сибирского отделения Академии наук СССР

**Поступила в редакцию
28 августа 1989 г.**