Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 6, стр. 293 – 295 *25 сентября 1989 г.*

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ

В.Е.Архинчеев

Рассмотрена трехмерная случайно неоднородная двухфазная среда. Получено асимптотически точное выражение для эффективной проводимости на пороге протекания.

Как известно, задача об эффективной проводимости сильно неоднородных сред решена точно только в двумерном случае [1]. В этой работе рассматривалась проводящая среда, полученная путем случайного перемешивания двух фаз. Было показано, что на пороге протекания (при равных концентрациях фаз) эффективная проводимость системы равна среднему геометрическому от проводимостей фаз. При произвольных концентрациях задача не решена.

В трехмерном случае аналогичных результатов не существует. Поэтому основным способом становится описание в рамках гипотезы подобия. Согласно этой гипотезе эффективную проводимость двухфазной сильно неоднородной системы σ_e вблизи порога протекания можно представить в автомодельном виде [2]:

$$\sigma_e = \sigma_1 h^s f(\epsilon/h^{s/t}), \tag{1}$$

где σ_1 – проводимость первой фазы, параметр $h = \sigma_2/\sigma_1$ – отношение проводимостей фаз ($h \ll 1$), а величина ϵ – отклонение от трехмерного порога протекания. Протекание по первой фазе. Асимптотическое поведение функции f описывается индексами теории протекания s, t, q:

$$f(z) = \begin{cases} |z|^{-q}, & z \ll -1 \\ 1, & |z| \ll 1. \\ z^t, & z \gg 1 \end{cases} \tag{2}$$

Между этими индексами существует точное соотношение:

$$t(1/s - 1) = q. \tag{3}$$

Отметим, что скэйлинговое описание проводимости является общепризнанным и подтверждено численным моделированием.

Мы будем интересоваться эффективной проводимостью трехмерной сильно неоднородной двухфазной системы на пороге протекания ($\epsilon = 0$), когда проводимость характеризуется только индексом s. Расположение фаз случайное, также как и в двумерной модели. Нашей целью будет установление точного значения критического индекса s. Как будет показано ниже, он равен 2/3, т.е.:

$$\sigma_e \sim \sigma_1^{1/3}\sigma_2^{2/3} \qquad \text{при} \quad \sigma_2 \ll \sigma_1. \tag{4}$$

Поясним способ нахождения индекса. Будем исходить из того, что известна зависимость поперечной проводимости σ_{xx}^e от магнитного поля $\mathbf{H}$ на пороге протекания. Согласно [3] она описывается законом "4/3":

$$\sigma_{xx}^e \sim \sigma/(\beta)^{4/3}, \text{ где } \vec{\beta} = \frac{e\mathbf{H}}{mc}\tau. \tag{5}$$

Мы покажем, что на пороге протекания та же зависимость проводимости σ_{xx}^e от магнитного поля описывается индексом s, именно:

$$\sigma_{xx}^e \sim \sigma/(\beta)^{2s}. \tag{6}$$

Следовательно, из (5) и (6) получим точное выражение для индекса s; тем самым, подтвердим формулу (4).

Итак, выразим зависимость поперечной проводимости от магнитного поля через индекс s. Для этого установим соответствие между задачей проводимости и задачей о гальваномагнитных свойствах. (Впервые на такую возможность было указано в [4]). Воспользуемся известными рассуждениями работы [5]. Уравнения постоянного тока, описывающие проводящую среду:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \qquad \operatorname{rot} \mathbf{e} = 0 \tag{7}$$

и обобщенный закон Ома в магнитном поле:

$$\mathbf{j} + [\mathbf{j}\vec{\beta}] = \sigma \mathbf{e} \tag{8}$$

не меняются при линейных преобразованиях:

$$\mathbf{j} = a\mathbf{j}' + b[\mathbf{n}\mathbf{e}'], \quad \mathbf{e} = c\mathbf{e}' + d[\mathbf{n}\mathbf{j}'], \tag{9}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, направленный по магнитному полю, a, b, c, d – постоянные коэффициенты.

В трехмерном случае надо использовать усеченные преобразования – преобразования (9) с коэффициентом $d = 0$. При этом для характеристик преобразованной (штрихованной) системы имеем:

$$\sigma' = \sigma\frac{c}{a} - 2\beta\frac{b}{a} + \frac{b^2(1+\beta^2)}{\sigma a c}, \quad \beta' = \beta - \frac{b(1+\beta^2)}{\sigma c}. \tag{10}$$

Аналогичные выражения получаются для эффективных величин. Выбор штрихованной системы диктуется дополнительными соображениями.

Пусть исходная система характеризуется только проводимостями фаз σ_1 и σ_2 ($\beta_1 = \beta_2 = 0$). В качестве штрихованной мы выберем следующую систему:

$$\sigma_1' = \sigma_2' = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}. \tag{11}$$

Холловские компоненты штрихованной системы определяются однозначно из (10) ·

$$\beta_1' = -b/c\sigma_1 \qquad \beta_2' = -b/c\sigma_2. \tag{12}$$

Преобразование, устанавливающее точное соответствие между указанными системами при произвольных концентрациях фаз, задается коэффициентами:

$$a = 1, \quad b/c = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}, \quad c/a = \frac{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{\sigma_1 + \sigma_2}. \tag{13}$$

Соответственно, получаем связь между эффективными характеристиками исходной двухфазной и штрихованной сред.

$$\sigma_e' = \frac{c}{a}\sigma_e + \frac{b^2}{ca\sigma_e}, \quad \beta_e' = -\frac{b}{c\sigma_e}. \tag{14}$$

Подчеркнем, что соотношения (14) имеют место при любом соотношении проводимостей и любых концентрациях фаз.

Проанализируем выражения (14) для случая сильно неоднородной среды на пороге протекания, когда эффективная проводимость исходной системы равна $\sigma_e = \sigma_1 h^s$ ($h \ll 1$). В этом пределе согласно (14) эффективные величины штрихованной системы равны:

$$\sigma_e' \sim \sigma'/(\beta_2')^{2(1-s)}, \quad \beta_e' \sim \beta_2'/(\beta_2')^{2(1-s)}. \tag{15}$$

Здесь $\sigma' = \sqrt{\sigma_1\sigma_2}$; $\beta_2' = -\sqrt{\sigma_1/\sigma_2}$.

Отметим, что формулы (15) справедливы как в двумерном, так и в трехмерном случае. От мерности пространства зависит только критический индекс s. В двумерном случае формулы (15) переходят в соответствующие выражения работы [5], как и должно быть. Выражая тензор проводимости σ_{xx} через величины σ и β обычным образом: $\sigma_{xx} = \sigma/(1 + \beta^2)$, получим формулу (6).

В заключение обсудим закон "4/3". Строго говоря, эта зависимость была установлена для случая $\beta_1 \gg 1$ и $\beta_2 \gg 1$. Однако из [3] можно получить ту же зависимость в интересующем нас пределе: $\beta_1 \ll 1 \ll \beta_2$. Методом работы [3] этот предел рассматривался в работах [6,7] и была переполучена зависимость "4/3". (Хотя в [6] нет ссылки на работу [3]). Поясним универсальность этого закона. Как было показано в [3], аномальное магнитосопротивление (5) является следствием изменения характера поперечной диффузии в сильных магнитных полях. Для этого механизма важно только, чтобы холловские концентрации в разных фазах сильно различались. Это выполняется и в нашем случае. Двумерная задача о магнитосопротивлении решается точно при произвольных значениях β_1 и β_2 [5]. В обоих предельных случаях: $\beta_1 \ll 1 \ll \beta_2$ и $\beta_1 \gg 1$, $\beta_2 \gg 1$ получается одна и та же зависимость σ^e_{xx} от магнитного поля.

Отметим также хорошее соответствие между значением $s = 2/3$ и результатами численного моделирования – 0,62.

Автор благодарен Э.Г.Батыеву за многочисленные обсуждения, Э.М.Баскину, С.К.Саввиных и Г.И.Сурдутовичу за интерес к работе и поддержку.

Литература

1. *Дыхне А.М.* ЖЭТФ, 1970, **59**, 110.
2. *Шкловский Б.И., Эфрос А.Л.* Phys. St. Sol., 1976, **76**, 475.
3. *Дрейзин Ю.А., Дыхне А.М.* ЖЭТФ, 1972, **63**, 243.
4. *Балагуров Б.Я.* ЖЭТФ, 1982, **82**, 1333.
5. *Дыхне А.М.* ЖЭТФ, 1970, **59**, 641.
6. *Мурзин С.С.* Письма в ЖЭТФ, 1984, **39**, 567.
7. *Поляков Д.Д.* ЖЭТФ, 1986, **90**, 546.

Институт физики полупроводников
Сибирского отделения Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18 августа 1989 г.