Письма в ЖЭТФ, том 50, вып. 6, стр. 304 – 306 *25 сентября 1989 г.*

ЛОКАЛИЗАЦИЯ И ДЕЛОКАЛИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ В НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ РЕШЕТКЕ С АМПЛИТУДОЙ ТУННЕЛИРОВАНИЯ, УБЫВАЮЩЕЙ С РАССТОЯНИЕМ ПО ЗАКОНУ R^{-3}

А.Л.Бурин, Л.А.Максимов

С помощью ренормализационной процедуры исследована проблема локализации состояний в модели Андерсона с амплитудой туннелирования R^{-3}. Результат зависит от поведения плотности распределения неупорядоченного потенциала на больших по модулю энергиях.

Как известно [1], частица, совершающая туннельное движение в решетке с энергетическим беспорядком g_E^{-1}, локализована, если амплитуда туннелирования между узлами t_0 мала по сравнению с разбросом энергий $(\chi_E = g_E t_0 \ll 1)$. Этот вывод несправедлив, если туннелирование t_R медленно убывает на больших расстояниях $(t_R \propto R^{-\alpha}, \alpha \leqslant 3)$. В наиболее интересном случае $\alpha = 3$ следует ожидать делокализации всех состояний, поскольку для каждого узла 1 с энергией E_1 число узлов, резонансных с ним $(|E_2 - E_1| \lesssim |t_{12}|)$ расходится логарифмически с расстоянием от него [1,2]. Стандартное описание делокализации в этом случае затруднительно из-за невозможности построения бесконечного кластера резонансных узлов, удаленных друг от друга на примерно одинаковое расстояние.

Для исследования проблемы применим ренормализационную процедуру [2]. На первом шаге туннелирование обрезается на некотором масштабе R_0, и строятся волновые функции (R_0-моды). На следующем шаге выбирается новый масштаб обрезания $R_1 > R_0$ и новые волновые функции (R_1-моды) строятся как суперпозиции R_0-мод. и т.д. Малость параметра χ_t обеспечивает локализацию волновых функций на каждом шаге ренормировки. Действительно, пусть R_i – радиус обрезания на шаге i, $R_{i+1} = 2R_i$, $\chi_E = g_E t_0 \ln 2$. Возрастание радиуса локализации l_i на шаге i происходит за счет резонанса данного состояния с состояниями, разделенными расстоянием R, $R_i < R < R_{i+1}$. Вероятн "столкновения" с n резонансами – $\chi_E^n \ll 1$. Поэтому резонансы сталкиваются парами и $l_i \lesssim R_i$. Состояния делокализуются только в пределе бесконечного радиуса обрезания, распространение частиц происходит по фрактальному закону $\langle r \rangle \propto t^{1/3}$ [2] (заметим, что при $t_R = t_0/R^\alpha$, $\alpha < 3$, межатомное расстояние $a = 1$, делокализация частиц с энергией E происходит, если радиус обрезания $R_E \approx \chi_E^{1/(3-\alpha)}$). Изложенное описание верно, если константа взаимодействия t_0 не ренормируется.

Рассмотрим случай простой зависимости туннелирования от расстояния $t_R = -t_0/R^3$, $t_0 > 0$. Пусть имеются две R_0-моды, операторы уничтожения которых $\psi^{(1)} = \sum_i u_i^{(1)} c_i$, $\psi^{(2)} = \sum_i u_i^{(2)} c_i$ (c_i – узельные операторы уничтожения), разделенные расстоянием R_1, превышающим R_0 и их радиусы локализации. При включении туннелирования t_{R_1} интеграл перекрытия $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ представляется в виде $v_{12} = -t_0 l^{(1)} l^{(2)}/R^3$, $l^{(p)} = \sum_i u_i^{(p)}$. Параметр $l^{(p)}$ назовем длиной волновой функции $\psi^{(p)}$. Будем изучать ренормировку длин волновых функций (т.е. ренормировку константы взаимодействия).

Волновые функции $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ с перекрытием v_{12} диагонализуются стандартным преобразованием

$$\tilde{\psi}^{(1)} = \cos\frac{\theta}{2}\,\psi^{(1)} + \sin\frac{\theta}{2}\,\psi^{(2)},\quad \tilde{\psi}^{(2)} = -\sin\frac{\theta}{2}\,\psi^{(1)} + \cos\frac{\theta}{2}\,\psi^{(2)},\quad \mathrm{tg}\,\theta = v_{12}/(E_1 - E_2). \qquad (1)$$

Аналогично преобразуются параметры $l^{(1)}$, $l^{(2)}$. Энергии E_1, E_2 изменяются по закону $E_{1,2} = (E_1 + E_2)/2 \pm (E_1 - E_2)/(2\cos\theta)$. Будем представлять действие ренормализационной процедуры как последовательность преобразований (1). Введем функцию распределения состояний по энергиям и длинам $P(l, E, R)$ при заданном радиусе обрезания R. Эволюция $P(l, E, R)$ с ростом радиуса обрезания, $P(l, E, R_1) - P(l, E, R_0)$, определяется разностью $[\delta(E-\widetilde{E}_1)\delta(l-\widetilde{l}_1) - \delta(E-E_1)\delta(l-l_1)]$, проинтегрированной по числу столкновений d^3R и по распределениям сталкивающихся состояний $dl_1 dE_1 P(l_1, E_1, R)$ $dl_2 dE_2 P(l_2, E_2, R)$. Применимость такого приближения обеспечивается малостью параметра $\chi_E^*(R) = t_0 \int P(l, E, R) l^2 dl$. Если $\chi_E^*(R)$ сравнивается с единицей, то возникают делокализованные состояния с энергией E и описание теряет применимость.

Ренормализационное уравнение имеет вид (ср. [2])

$$P(l, E, R_1) - P(l, E, R_0) =$$
$$= \int d^3\mathbf{R} \int dE_1 \int dl_1 \int dE_2 \int dl_2 P(l_1, E_1, R) P(l_2, E_2, R) [\delta(E-\widetilde{E}_1)\delta(l-\widetilde{l}_1) - \delta(E-E_1)\delta(l-l_1)]. \quad (2)$$

Важное свойство уравнения (2) – сохранение $\langle l^2 \rangle$ (если умножить правую часть на l^2 и проинтегрировать по $dldE$, то получим нуль). Это свойство – следствие ортогональности преобразований (1), его выполнение может быть проверено на последующих этапах решения. Для интересующей нас величины $\chi_E^*(R)$ главную роль должно играть нерезонансное взаимодействие с далекими энергиями E_1 и E_2 (резонансное взаимодействие не меняет $\langle l_E^2 \rangle$), его существенность легко также увидеть из первого порядка теории возмущений для $\langle l_E^2 \rangle$. Изложенные соображения позволяют при переходе к уравнению для $\chi_E^*(R)$ ограничиться членами первого порядка по $\theta = v_{12}/(E_1 - E_2)$ (1). Домножая (2) на l^2 и интегрируя по dl, а также переходя к пределу $R_1 \to R_0$, получим замкнутое уравнение для $\chi_E^*(\xi)$, $\xi = \ln R$.

$$\partial\chi_E^*/\partial\xi = -4\pi\chi_E^* \int dE_1 (E-E_1)^{-1} \chi_{E_1}^*, \quad \chi_E^*(0) = g_E t_0. \quad (3)$$

Уравнение (3) легко решается, т.к. для функции комплексно переменного $\psi_z = \int dE(z - E)^{-1}\chi_E^*$ имеем $\partial\psi/\partial\xi = -2\pi\psi^2$. Решение имеет вид

$$\chi_E^*(\xi) = g_E t_0 |c_E|^2 \, |c_E + \xi|^{-2}, \quad c_E^{-1} = \int dE_1 (E - E_1 - i\delta)^{-1} g_{E_1} \cdot 2\pi t_0. \quad (4)$$

Если распределение убывает на больших энергиях быстрее чем лоренцево ($g_E \approx W^{\beta-1}/E^\beta$, $t_0 \ll W \ll E$, $\beta > 2$), то выбирая $E_0 \approx W(W/t_0)^{1/(\beta+2)}$ и $\xi_0 \approx E/2\pi t_0$, получаем $\chi_{E_0}(\xi_0) \approx 1$, и возникают делокализованные состояния с энергией порядка E_0.

В случае более медленного убывания $g_E (1 < \beta \leqslant 2)$ уравнения (2), (3) применимы при любых ξ, и константа взаимодействия ренормируется $t_0(\xi) \propto \xi^{-2}$. Все состояния локализованы, т.к. убывание туннелирования с расстоянием достаточно быстрое. Заметим, что в случае если g_E – распределение Лоренца, то выражение (4) совпадает с известным точным решением для соответствующей функции Грина $G(E, \mathbf{q} = 0)$ [3].

Результат (4) легко обобщается на случай затравочных амплитуд туннелирования вида $t_0 l_1 l_2/R^3$ (l_i – случайные величины), $t_0 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2/R^3$ ($\mathbf{d}_i$ – случайные векторы), $t_0 \cos(\mathbf{qR})/R^3$ ($\mathbf{q}$ – постоянный вектор) путем простого изменения начальных условий для χ_E^* и изучаемого параметра ($l_i \to \mathbf{d}_i$; $l^{(p)} \to \sum_i u_i^{(p)} \exp(i\mathbf{qR}_i)$). Поэтому, если, например, туннелирование возбуждений характеризуется косвенным взаимодействием через электроны проводимости, то в системе могут существовать собственные делокализованные моды. Это может сказаться на низкотемпературной теплопроводности и т.п.

В работе [2] с помощью ренормализационного уравнения типа (2) для распределения, не зависящего от энергии, исследовался случай, когда туннелирование характеризуется диполь-дипольным взаимодействием. Из анализа стационарного по ξ решения был сделан вывод, что константа взаимодействия не ренормируется. С нашей точки зрения это связано с обращением в нуль среднего по углам от туннельной амплитуды.

В заключение авторы благодарят Н.В.Прокофьева и В.Л.Шукина за интерес к работе и полезные обсуждения и, в особенности, Л.С.Левитова за помощь в постановке задачи и любезно предоставленную возможность ознакомиться с работой [2] до публикации.

Литература

1. *Anderson P.W.* Phys. Rev., 1958, 109, 2041.
2. *Levitov L.S.* Unpublished, submitted to Phys. Rev. Lett.
3. *Lloyd P.* J. Phys. C, 1969, 2, 1717.

Институт атомной энергии
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию
30 августа 1989 г.