

Связанные состояния композитного бозона на решетке с “магнитной” примесью

Л. И. Князева^{+*1)}, В. И. Юдсон^{×+}

⁺Российский квантовый центр, 143025 Москва, Россия

^{*}Московский физико-технический институт, 141700 Москва, Россия

[×]Лаборатория физики конденсированного состояния, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, 101000 Москва, Россия

Поступила в редакцию 1 июля 2026 г.

После переработки 1 июля 2026 г.

Принята к публикации 3 июля 2026 г.

Рассмотрен композитный бозон на решетке, образованный двумя фермионами разных сортов с сильным локальным притяжением. Показано, что возможно образование связанных состояний бозона на локализованной на одном узле статической магнитной примеси, действующей противоположным образом на различные фермионные компоненты. Найдено семейство связанных состояний, вычислены их энергии и критические значения величины примесного потенциала, определяющие условия возникновения этих состояний.

DOI: 10.7868/S3034576626080213

1. Введение. Известная задача [1, 2] о квантовой частице, совершающей прыжки по узлам решетки и взаимодействующей с притягивающим “дефектом” (“примесью”), локализованным на одном из узлов, иллюстрирует образование связанных состояний. В случае прыжков только между ближайшими соседями связанное состояние возникает при любой величине потенциала примеси в одномерном и двумерном случаях (1D и 2D), и только если величина потенциала превышает критическое значение в трехмерном (3D) случае. Если примесный потенциал охватывает несколько узлов решетки, могут возникать дополнительные связанные состояния, определяемые симметрией системы [3].

Поскольку задача является одночастичной, ее результаты не зависят от квантово-статистической природы движущегося объекта, что делает ее применимой к широкому кругу физических систем: от электронов до холодных атомов в оптических решетках и состояний света в фотонных кристаллах. В частности, к этой задаче сводится и случай сильно связанного композитного бозона (например, образованного двумя фермионами различных сортов) на решетке: в приближении жесткого бозона он ведет себя как бесструктурная частица. Однако, как показано в настоящем письме, наличие виртуальных внутренних степеней свободы композитного бозона

может приводить к интересным непертурбативным изменениям известной примесной задачи с возникновением многообразия новых связанных состояний.

Мы рассматриваем двухкомпонентную фермионную систему на решетке со слабыми перескоками t между ближайшими соседями и сильным хаббардовским притяжением U между компонентами. Кроме того, предполагается наличие одной “спиновой” примеси, действующей противоположным образом на две разные фермионные компоненты. Физически это может быть реализовано как фермионы со спином “вверх” и “вниз” в присутствии статической магнитной примеси [4, 5], либо как система противоположно заряженных носителей (например, электронов и дырок), взаимодействующих с заряженной примесью [6].

Притяжение между двумя компонентами приводит к образованию связанных пар фермионов, которые можно рассматривать как композитные бозоны. Имея в виду упомянутую выше одночастичную задачу, мы ограничиваемся рассмотрением одного композитного бозона, т.е. лишь парой различных фермионов. Примечательно, что в пределе нулевой амплитуды фермионных перескоков энергия связанной пары не зависит от узла, на котором она локализована, включая узел с примесью, вследствие противоположного влияния спиновой примеси на две компоненты. При учете малой, но конечной амплитуды перескоков композитный бозон становится по-

¹⁾e-mail: kniazeva.li@phystech.edu

движным благодаря виртуальным процессам распада и рекомбинации пары. Одновременно примесь начинает влиять на композитный бозон не только на самом примесном узле, но и на его ближайшем окружении. Вследствие этого, взаимодействие с примесью порождает семейство связанных состояний композитного бозона. Ниже мы исследуем структуру этих состояний и условия их возникновения.

2. Модель. Гамильтониан чистой системы можно представить в виде

$$H_f = t \sum_{\langle i,j \rangle} (a_{1,i}^+ a_{1,j} + a_{2,i}^+ a_{2,j}) - U \sum_{i=1}^N n_{1,i} n_{2,i}, \quad (1)$$

где $a_{s,i}^+$, $a_{s,i}$ и $n_{s,i} = a_{s,i}^+ a_{s,i}$ – операторы рождения, уничтожения и числа фермионов двух сортов ($s = 1, 2$) соответственно.

В пределе слабого межузельного перескока ($t \ll U$) в рамках теории возмущений до второго порядка по t можно перейти от фермионного гамильтониана (1) к эффективному гамильтониану композитного бозона

$$H^0 = -J \sum_{\langle i,j \rangle} b_i^+ b_j - \left(U + \frac{2t^2 Z}{U} \right) \sum_i b_i^+ b_i, \quad (2)$$

где Z – число ближайших соседей, b_i^+ , b_i – операторы рождения и уничтожения бозона, связанные с фермионными операторами как $b_i^+ \equiv a_{1,i}^+ a_{2,i}^+$, $b_i \equiv a_{1,i} a_{2,i}$, и амплитуда бозонных перескоков $J = 2t^2/U$.

Предположим теперь, что один узел (обозначим его как “0”) занят примесью, взаимодействующей с фермионными компонентами на этом узле

$$H_{\text{imp}} = w_1 n_{1,0} + w_2 n_{2,0}. \quad (3)$$

В общем случае константы взаимодействия w_1 и w_2 могут быть произвольными.

В частности, если примесь притягивает обе компоненты одинаково, т.е. $w_1 = w_2 \equiv -w < 0$, то, в пределе нулевых перескоков фермионов, пара, локализованная на примесном узле, образует основное состояние, поскольку ее энергия $-(U + 2w)$ ниже энергии пары $-U$, расположенной на любом другом узле. При учете слабых межузельных перескоков этот случай сводится к известной примесной задаче, упомянутой ранее.

Случай спиновой примеси, т.е. $w_1 = -w_2 \equiv w$, гораздо интереснее. Суммарное действие примеси на связанную пару теперь равно нулю. В результате, пока $|w| < U$ (что обеспечивает существование связан-

ной пары), композитный бозон на примесном узле имеет ту же энергию, что и композитный бозон на любом другом узле, и, в отсутствие фермионных перескоков, основное состояние вырождено.

Учитывая слабые межузельные перескоки фермионов в порядке t^2 , мы получаем индуцированный примесью эффективный возмущающий бозонный гамильтониан, который действует на узле “0” и его Z ближайших соседей

$$V = -J\gamma \sum_{i:\langle i,0 \rangle} (b_i^+ b_i + b_0^+ b_i + b_i^+ b_0) - J\gamma Z b_0^+ b_0. \quad (4)$$

Здесь γ – эффективный параметр примесного потенциала

$$\gamma = \frac{w^2}{U^2 - w^2}. \quad (5)$$

Отметим, что примесь модифицирует не только диагональные, но и недиагональные (перескоковые) члены эффективного гамильтониана.

3. Связанные состояния. Из одночастичного уравнения Шредингера

$$(H^0 + V) \psi = E \psi \quad (6)$$

можно получить уравнение для волновых функций на узлах

$$\psi_i = \sum_{j,l} G_{i,j} V_{j,l} \psi_l, \quad (7)$$

где $G = (E - H^0)^{-1}$ – функция Грина свободной частицы на идеальной решетке. Матричные элементы $V_{j,l}$ отличны от нуля только в следующих случаях: $V_{0,0} = -J\gamma Z$, $V_{0,\delta} = V_{\delta,0} = V_{\delta,\delta} = -J\gamma$, где δ пробегает узлы, соседние с узлом “0” (занятым примесью). Для определенности, ниже мы рассматриваем квадратную (кубическую) решетку.

Уравнение (7) представляет собой полную замкнутую систему для волновых функций на примесном узле ψ_0 и его соседях ψ_δ (например, в двумерном случае δ принимает значения $x, y, -x, -y$). Используя симметрию системы, удобно ввести комбинации волновых функций, диагонализующие систему (7). Эти комбинации таковы:

$$\tilde{\psi} \equiv Z \psi_0 + \sum_{\delta} \psi_{\delta}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\delta}^a &\equiv \psi_{\delta} - \psi_{-\delta}; & \psi_{\delta}^s &\equiv \psi_{\delta} + \psi_{-\delta}, \\ \Delta \psi^s &\equiv \psi_{\delta_1}^s - \psi_{\delta_2}^s, & \delta_1 &\neq \delta_2, \delta_1 \neq -\delta_2. \end{aligned}$$

Тогда система (7) принимает вид

$$\psi_0 = -J\gamma \tilde{\psi} (G_1 + G_0), \quad (9)$$

$$\tilde{\psi} = -\gamma J \tilde{\psi} \left[(Z+1) G_0 + 2Z G_1 + \sum_{\delta': \delta' \neq \delta} G_{\delta', \delta} \right], \quad (10)$$

$$\psi_\delta^a = -\gamma J \psi_\delta^a (G_0 - G_{\delta, -\delta}), \quad (11)$$

$$\Delta \psi^s = -\gamma J \Delta \psi^s (G_0 + G_{\delta, -\delta} - 2G_d), \quad (12)$$

где мы использовали сокращенные обозначения для функций Грина

$$G_{i,i} = G_{0,0} \equiv G_0, \quad G_{0,\delta} = G_{\delta,0} \equiv G_1, \\ G_{\delta',\delta} \equiv G_d \text{ для } \delta', \delta \text{ на разных осях.} \quad (13)$$

Уравнение (9) дает связь между ψ_0 и $\tilde{\psi}$, тогда как уравнения (10)–(12) определяют три группы независимых решений (два решения в 1D, поскольку в этом случае $\Delta \psi^s \equiv 0$).

Первое (с наименьшей энергией) решение ($\tilde{\psi} \neq 0$) для связанного состояния является симметричным: $\psi_\delta \equiv \psi_1 \neq 0$ для всех δ и $\psi_0 \neq 0$ (определяется выражением (9)). Энергия этого состояния находится из уравнения

$$-\frac{1}{\gamma} = -(Z+1) G_0(\tilde{E}) + 2Z G_1(\tilde{E}) + \sum_{\delta': \delta' \neq \delta} G_{\delta', \delta}(\tilde{E}), \quad (14)$$

где мы ввели безразмерную энергию $\tilde{E} = E/J$, выражения для зависящих от энергии функций Грина приведены в Приложении. Для удобства, мы отсчитываем энергию от $E_0 = -(U + 2t^2 Z/U)$.

Уравнения (11), (12) определяют два набора связанных состояний с более высокими энергиями. Первый набор образован p - состояниями $\psi_\delta = -\psi_{-\delta}$, энергия которых определяется уравнением

$$-\frac{1}{\gamma} = G_0(\tilde{E}) - G_{\delta, -\delta}(\tilde{E}). \quad (15)$$

Поскольку для величин ψ_δ^a имеется d независимых уравнений, кратность вырождения этих состояний равна d .

Третий набор ($\Delta \psi^s \neq 0$) возникает только в 2D и 3D, поскольку для одномерной решетки уравнение (12) тождественно равно нулю. В более высоких размерностях оно дает d -состояние с энергией, определяемой уравнением

$$-\frac{1}{\gamma} = G_0(\tilde{E}) + G_{\delta, -\delta}(\tilde{E}) - 2G_d(\tilde{E}). \quad (16)$$

Используя связь между функциями Грина $G_{\delta', \delta}, G_1$ и G_0 (см. Приложение), можно выразить приведенные выше уравнения (14) и (16) через всего лишь две функции Грина G_0 и $G_{\delta, -\delta}$

$$G_0(\tilde{E}) = \frac{\gamma \tilde{E} - Z - 2Z\gamma}{\gamma (Z - \tilde{E})^2}, \quad (17)$$

и

$$G_{\delta, -\delta}(\tilde{E}) = \left(\frac{2\tilde{E}^2}{Z^2} - 1 \right) G_0(\tilde{E}) - \frac{Z-2}{Z\gamma} - \frac{2\tilde{E}}{Z^2}. \quad (18)$$

Ниже мы приводим результаты аналитических и численных [7] расчетов для каждой размерности.

4. Результаты. Зависимости энергий связанных состояний, отсчитанных от дна зоны $\Delta \equiv \tilde{E} + Z$, представлены на рис. 1–3 для 1D, 2D и 3D решеток соответственно. Во всех размерностях симметричное связанное состояние обладает наименьшей энергией. Оно существует при любом сколь угодно малом значении параметра γ (5) в 1D и 2D и при γ выше некоторого критического значения γ_c^s в 3D. Эти условия ожидаемы и аналогичны известной задаче о примесном центре [1, 2].

Дополнительные связанные состояния композитного бозона возникают при достаточно сильной примеси в любой размерности. Число таких состояний и их вырождение определяются симметрией и размерностью решетки. Соответствующие критические значения параметра γ_c (а также критические значения примесного потенциала w_c), при которых возникают s -, p - и d -состояния, находятся подстановкой $\tilde{E} = -Z$ (дно энергетической зоны) в уравнения (17), (15) и (18) соответственно.

В одномерном случае (рис. 1) имеются два решения: симметричное $\psi_1 = \psi_{-1}, \psi_0 \neq 0$ и антисимметричное $\psi_1 = -\psi_{-1}, \psi_0 = 0$ с энергиями, определяемыми уравнением (17) при $Z = 2$ и уравнением (15) соответственно.

Симметричное связанное состояние существует при любом сколь угодно малом γ , приближаясь к дну энергетической зоны как

$$\Delta \approx -16\gamma^2. \quad (19)$$

Антисимметричное состояние появляется при критическом значении $\gamma_c^p = 1$, причем вблизи порога

$$\Delta \approx -\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^2, \quad (20)$$

и далее при всех значениях параметра γ оно располагается выше по энергии, чем симметричное состояние. Пороговому значению γ_c^p соответствует критическая величина потенциала спиновой примеси

$$w_c^p/U = 1/\sqrt{2} \approx 0.707107. \quad (21)$$

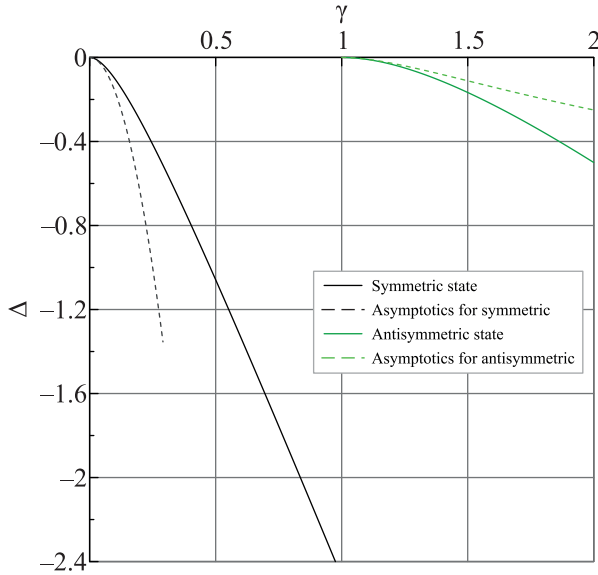


Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость энергии связанного состояния (отсчитанной от дна зоны) от эффективного параметра примесного потенциала γ для 1D решетки. Симметричное связанное состояние существует при любом сколь угодно малом γ с квадратичной асимптотикой $\Delta \approx -16\gamma^2$, тогда как антисимметричное состояние возникает лишь выше критического значения $\gamma_c^p = 1$ с асимптотикой $\Delta \approx -[(\gamma - 1)/\gamma]^2$

На двумерной решетке (рис. 2) низшее связанное состояние также является симметричным и существует при любых γ , однако его отступ от дна зоны при малых γ экспоненциально мал:

$$\Delta \approx -4e^{-\pi/4\gamma}. \quad (22)$$

По мере роста γ возникают более высокие связанные состояния. Сначала, при $\gamma_c^p = \pi/(\pi - 2) \approx 2.751938$, что соответствует критическому потенциалу спиновой примеси

$$\frac{w_c^p}{U} = \sqrt{\frac{\pi}{2(\pi - 1)}} \approx 0.856429, \quad (23)$$

возникает дважды вырожденное p -состояние ($\psi_x = -\psi_{-x}$ и $\psi_y = -\psi_{-y}$, где x, y обозначают узлы, соседние с узлом "0", на соответствующих осях). При дальнейшем увеличении γ возникает d -состояние ($\psi_x = \psi_{-x} = -\psi_y = -\psi_{-y}$) при $\gamma > \gamma_c^d = \pi/(4 - \pi) \approx 3.659792$, чему соответствует критический примесный потенциал

$$\frac{w_c^d}{U} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.886227. \quad (24)$$

Для трехмерной решетки (рис. 3) низшее (сим-

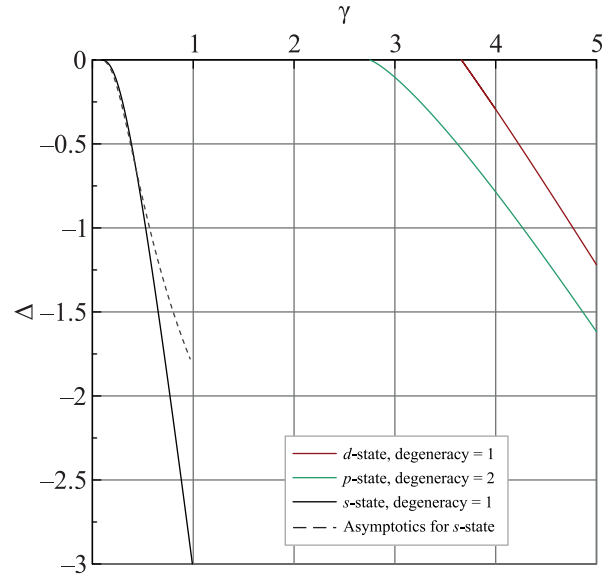


Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость энергии связанного состояния (отсчитанной от дна зоны) от эффективного параметра примесного потенциала γ для 2D квадратной решетки. Симметричное связанное состояние существует при любом сколь угодно малом γ с экспоненциальной асимптотикой $\Delta \approx -4e^{-\pi/4\gamma}$. Дважды вырожденное p -состояние возникает выше критического значения $\gamma_c^p \approx 2.751938$, а d -состояние существует при $\gamma > \gamma_c^d = \pi/(4 - \pi) \approx 3.659792$

метричное) связанное состояние возникает лишь при конечном значении $\gamma_c^s = 1/3(4I_W - 1) \approx 0.326206$, где I_W – третий интеграл Ватсона [8]

$$\begin{aligned} I_W &= \int_{BZ} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{3 - \cos(q_x) - \cos(q_y) - \cos(q_z)} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{96\pi^3} \Gamma\left(\frac{1}{24}\right) \Gamma\left(\frac{5}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{24}\right) \Gamma\left(\frac{11}{24}\right) \\ &\approx 0.505462. \end{aligned} \quad (25)$$

Этому критическому параметру γ_c^s соответствует критический потенциал спиновой примеси

$$\frac{w_c^s}{U} = \sqrt{\frac{1}{2(6I_W - 1)}} \approx 0.495953. \quad (26)$$

p -состояние теперь трижды вырождено ($\psi_\delta = -\psi_{-\delta}$, $\delta = x, y, z$) и существует выше $\gamma_c^p \approx 4.765497$, чему соответствует критический примесный потенциал

$$\frac{w_c^p}{U} \approx 0.909150. \quad (27)$$

Уравнение (12) для d -состояния в 3D дает три

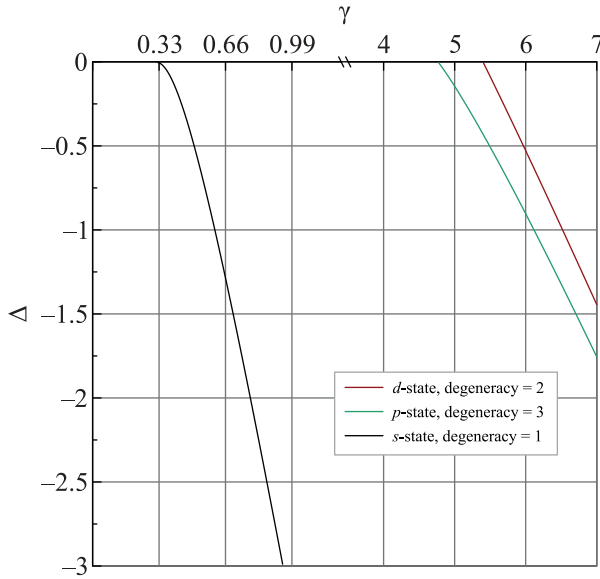


Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимость энергии связанного состояния (отсчитанной от дна зоны) от эффективного параметра примесного потенциала γ для кубической решетки. Низшее (симметричное) связанное состояние существует только при $\gamma > \gamma_c^s \approx 0.326206$. Трижды вырожденное p -состояние возникает при $\gamma > \gamma_c^p \approx 4.765497$. Дважды вырожденное d -состояние возникает при $\gamma > \gamma_c^d \approx 5.398476$

уравнения для трех возможных конфигураций: (i) $\delta_1 = x$, $\delta_2 = y$, (ii) $\delta_1 = y$, $\delta_2 = z$, (iii) $\delta_1 = x$, $\delta_2 = z$. На самом деле одно из этих уравнений является линейной комбинацией двух других. Это означает, что d -состояние дважды вырождено. В более принятом виде эти состояния можно представить как $\psi_x = \psi_{-x} = -\psi_y = -\psi_{-y}$, $\psi_z = \psi_{-z} = 0$ и $\psi_z = \psi_{-z} = -(\psi_x + \psi_y)$, $\psi_x = \psi_{-x} = \psi_y = \psi_{-y}$. Критическое значение эффективного примесного потенциала для d -состояния равно $\gamma_c^d \approx 5.398476$, или, в терминах потенциала спиновой примеси,

$$\frac{w_c^d}{U} \approx 0.918538. \quad (28)$$

Отметим, что энергии связанных состояний выражены в единицах амплитуды бозонных перескоков $J = 2t^2/U$. Однако критические значения эффективного примесного потенциала γ_c , определяющие возникновение более высоких связанных состояний, не зависят от J и полностью определяются отношением величины примесного потенциала w к величине притяжения U между фермионными компонентами.

5. Заключение. В работе приведено описание композитного бозона, состоящего из двух связанных фермионов разных сортов, на 1D, 2D и 3D решет-

ках в присутствии “магнитной” примеси, действующей противоположным образом на составляющие бозона (аналогично действию статического магнитного поля на электроны со спином “вверх” и “вниз”). В пределе, когда амплитуда перескоков фермионов мала по сравнению с энергией их связи, мы получили семейство связанных состояний композитного бозона на одноузельной примеси. Энергии этих состояний определяются симметрией и размерностью системы. Мы вычислили критические значения примесного потенциала, определяющие возникновение последовательности связанных состояний. Примечательно, что соответствующие критические значения не зависят от амплитуды перескоков и определяются исключительно отношением величины примесного потенциала w к энергии притяжения между фермионными компонентами U . Найденные связанные состояния можно рассматривать как аналог состояний Ю–Шибы–Русинова [9–11], известных для БКШ (слабосвязанного) режима в сверхпроводниках, но для противоположного (сильносвязанного) режима, подобного тому, что был предложен в бозе-конденсатной модели сверхпроводимости [12–15].

Авторы благодарят Ю. Г. Махлина и А. Н. Рубцова за полезные обсуждения.

Приложение. Упрощение уравнений для энергий связанных состояний

Уравнения (14)–(16) включают несколько функций Грина, зависящих от безразмерной энергии $\tilde{E} = E/J$

$$G_0(\tilde{E}) = \int_{BZ} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\tilde{E} + 2 \sum_{\alpha=1}^d \cos k_{\alpha}}, \quad (A.1)$$

$$G_1(\tilde{E}) = \int_{BZ} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik_1}}{\tilde{E} + 2 \sum_{\alpha=1}^d \cos k_{\alpha}}, \quad (A.2)$$

$$G_{\delta', \delta}(\tilde{E}) = \int_{BZ} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik_{\delta'}} e^{-ik_{\delta}}}{\tilde{E} + 2 \sum_{\alpha=1}^d \cos k_{\alpha}}. \quad (A.3)$$

Эти функции Грина связаны между собой, причем соответствующие соотношения могут быть получены из уравнений

$$\sum_l (E \delta_{i,l} - H_{i,l}^0) G_{l,j} = \delta_{i,j}, \quad (A.4)$$

где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Полагая $i = j = 0$, получаем

$$G_1(\tilde{E}) = \frac{1}{Z} - \frac{\tilde{E}}{Z} G_0(\tilde{E}). \quad (A.5)$$

В то же время случай $i = 0, j = \delta$ дает

$$\begin{aligned} \sum_{\delta': \delta' \neq \delta} G_{\delta', \delta}(\tilde{E}) &= -\tilde{E}G_1(\tilde{E}) - G_0(\tilde{E}) \\ &= -\frac{\tilde{E}}{Z} + \left(\frac{\tilde{E}^2}{Z} - 1 \right) G_0(\tilde{E}). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Кроме того, сумму функций Грина $G_{\delta', \delta}$ можно представить как

$$\sum_{\delta': \delta' \neq \delta} G_{\delta', \delta} = G_{\delta, -\delta} + (Z - 2) G_d. \quad (\text{A.7})$$

Подстановка выражений (A.5)–(A.7) в уравнения (14)–(16) приводит их к виду s -состояние:

$$G_0(\tilde{E}) = \frac{\gamma \tilde{E} - Z - 2Z\gamma}{\gamma (Z - \tilde{E})^2}, \quad (\text{A.8})$$

p -состояние:

$$-\frac{1}{\gamma} = G_0(\tilde{E}) - G_{\delta, -\delta}(\tilde{E}), \quad (\text{A.9})$$

d -состояние:

$$G_{\delta, -\delta}(\tilde{E}) = \left(\frac{2\tilde{E}^2}{Z^2} - 1 \right) G_0(\tilde{E}) - \frac{Z - 2}{Z\gamma} - \frac{2\tilde{E}}{Z^2}. \quad (\text{A.10})$$

Теперь уравнения включают не более двух функций Грина (G_0 и $G_{\delta, -\delta}$), что значительно упрощает вычисления.

Финансирование работы. Работа Л. Князевой была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”. Работа В. Юдсона поддержана Программой фундаментальных исследований Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (HSE-BR-2025-57).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика: Нерелятивистская теория* (Наука, М., 1974) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory, Vol. 3 of Course of Theoretical Physics* (Pergamon Press, Oxford, 1977)].
2. E. N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics* (Springer, Heidelberg, 2006).
3. G. F. Koster and J. C. Slater, “Simplified impurity calculation”, *Phys. Rev.* **96**, 1208 (1954).
4. A. Yazdani, B. A. Jones, C. P. Lutz, M. F. Crommie, and D. M. Eigler, “Probing the local effects of magnetic impurities on superconductivity”, *Science* **275**, 1767 (1997).
5. S. H. Ji, T. Zhang, Y. S. Fu, X. Chen, X. C. Ma, J. Li, W. H. Duan, J. F. Jia, and Q. K. Xue, “High-resolution scanning tunneling spectroscopy of magnetic impurity induced bound states in the superconducting gap of Pb thin films”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 226801 (2008).
6. M. M. Fogler, L. V. Butov, and K. S. Novoselov, “High-temperature superfluidity with indirect excitons in van der Waals heterostructures”, *Nat. Commun.* **5**, 4555 (2014).
7. L. Knyazeva, *Bound States of a Composite Boson on an Impurity*, <https://github.com/LoKnyaz/Bound-States-of-a-Composite-Boson-on-an-Impurity> (2026).
8. I. J. Zucker, “70+ Years of the Watson Integrals”, *J. Stat. Phys.* **145**, 591 (2011).
9. L. Yu, “Bound state in superconductors with paramagnetic impurities”, *Acta Phys. Sin.* **21**, 75 (1965).
10. H. Shiba, “Classical spins in superconductors”, *Prog. Theor. Phys.* **40**, 435 (1968).
11. A. I. Rusinov, “Superconductivity near a paramagnetic impurity”, *JETP Lett.* **9**, 85 (1969).
12. M. R. Schafroth, “Superconductivity of a charged boson gas”, *Phys. Rev.* **96**, 1149 (1954).
13. M. R. Schafroth, “Theory of superconductivity”, *Phys. Rev.* **96**, 1442 (1954).
14. M. R. Schafroth, S. T. Butler, and J. M. Blatt, “Quasichemical equilibrium approach to superconductivity”, *Helv. Phys. Acta*, **30**, 93 (1957).
15. R. A. Ogg, “Bose-Einstein condensation of trapped electron pairs. Phase separation and superconductivity of metal-ammonia solutions”, *Phys. Rev.* **69**, 243 (1946).