

О холловской теплопроводности бозонных систем¹⁾Ю. В. Барамыгина^{+,*}, Д. Н. Аристов^{+,** 2)}⁺ НИЦ “Курчатовский институт”, Петербургский Институт Ядерной Физики, 188300 Гатчина, Россия^{*} Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН, 194021 С.-Петербург, Россия^{**} Санкт-Петербургский государственный университет, 199034 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 2 июня 2026 г.

После переработки 3 июля 2026 г.

Принята к публикации 21 июля 2026 г.

Мы теоретически исследуем тепловой эффект Холла в бозонных системах, имея в виду возможные приложения к магнитоупорядоченным изоляторам, в которых основным состоянием является решетка магнитных скирмионов. Спектр магнонов в таких системах может испытывать топологический переход при изменении внешнего магнитного поля, и тепловой эффект Холла может служить инструментом для подтверждения этого явления. Мы заново выводим формулы, пригодные для наших целей, и приходим к выражениям, которые имеют другую температурную зависимость теплового эффекта Холла по сравнению с ранее представленными результатами. В частности, в присутствии аномальных членов в гамильтониане магнонов, холловская теплопроводность имеет маленький, но конечный остаточный вклад $\sim 1/T$. Этот вклад может стать значимым при очень низких температурах и напоминает эффект Мейснера в сверхпроводящих металлах.

DOI: 10.7868/S3034576626090081

Введение. В последнее десятилетие большое внимание привлекают топологические свойства магнетиков с неколлинеарным типом упорядочения [1]. В частности, активно обсуждаются магнитные скирмионы и их упорядоченные массивы. Основное состояние таких систем, известное как скирмионный кристалл (СкК), обладает нетривиальной топологией. Магнонные возбуждения над основным состоянием СкК могут также быть топологически нетривиальными, так что магнонные зоны характеризуются такими величинами, как кривизна Берри и число Черна [2–5].

Недавно было показано, что изменение внешнего магнитного поля может приводить к топологическому переходу в спектре магнонов [6, 7]. Оказывается, что такой переход также чувствителен к обменной анизотропии, что может препятствовать его экспериментальному наблюдению [8]. Одной из возможностей проверить существование топологического перехода в спектре является измерение теплового эффекта Холла (ТЭХ) в этих системах [9, 10], при этом ожидается, что температурная зависимость ТЭХ изменится при переходе. Обычный эффект Холла в

магнитных изоляторах отсутствует, поскольку низкоэнергетические магнонные возбуждения являются зарядово-нейтральными, и ТЭХ определяется топологической характеристикой, известной как кривизна Берри.

В поисках формул, подходящих для моделирования ТЭХ в бозонных системах, мы обнаружили, что в разных работах были получены несколько противоречивые результаты. В статье [11] представлена более простая формула для холловской теплопроводности, κ^{xy} , которая, однако, расходится при $T \rightarrow 0$. Эта формула оспаривается в работах [12–15], авторы которых отмечают необходимость добавления дополнительного слагаемого, названного “намагниченностью энергии” или краевым током, так что окончательный, более сложный, вид поперечной теплопроводности κ^{xy} исчезает в пределе $T = 0$. Попытка согласовать эти формулы для геометрии с конечной шириной образца [16] привела к подтверждению выводов работ [13] и [15]. В работе [15] был представлен детальный вывод κ^{xy} , и мы стали использовать эти выражения.

Однако предварительное исследование ТЭХ в СкК для нашей непрерывной модели [7] показало, что средняя кривизна Берри, Ω_n^{xy} , остается почти постоянной при увеличении энергии магнонов, ε_n . Эта деталь вместе с выражением для κ^{xy} , представлен-

¹⁾См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ru

²⁾e-mail: aristov_dn@pnpi.nrcki.ru

ным в [15], делает почти невозможным обнаружение любого изменения T -зависимости ТЭХ вблизи топологического перехода в низкоэнергетической части спектра. Видя это свойство, мы решили заново вывести формулу для ТЭХ, беря за основу статью [15], и притом уделяя особое внимание так называемым нулевым колебаниям в нашей задаче. При этом мы не предполагали конечную геометрию образца и наличие краевых токов, так же как это было сделано в [15]. К нашему удивлению, полученное нами итоговое выражение для κ^{xy} отличается от формул, опубликованных ранее в [13, 15], и оно ближе по своей структуре к выражению, представленному в [11]. То, насколько предлагаемый нами вид κ^{xy} важен для ТЭХ в СкК, обсуждается в заключительном разделе нашей статьи.

Модель. Ранее было показано [17, 18], что магнанные возбуждения в СкК определяются плотностью энергии

$$h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\psi}, & \psi \end{pmatrix} \hat{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где ψ и комплексно сопряженное, $\bar{\psi}$, описывают флуктуации локальной намагниченности вокруг равновесного значения [18]. Гамильтониан бозонов, $\hat{\mathcal{H}}$, напоминающий гамильтониан Боголюбова–де Жена для сверхпроводящих электронов, дается выражением

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} (-i\nabla + \mathbf{A})^2 + U & V \\ V^* & (i\nabla + \mathbf{A})^2 + U \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь U , V – периодические потенциалы, $\mathbf{A}$ – векторный потенциал с нулевым потоком через элементарную ячейку, $\int d\mathbf{r} \nabla \times \mathbf{A} = 0$. Спектр, ε_n , может быть найден из уравнения $\hat{\mathcal{H}}\Psi_n = \varepsilon_n \sigma_3 \Psi_n$ с матрицей Паули σ_3 , и псевдоспинором, $\Psi_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Благодаря свойству $\sigma_1 \hat{\mathcal{H}}^* \sigma_1 = \hat{\mathcal{H}}$, функция $\bar{\Psi}_n \equiv \sigma_1 \Psi_n^* = \begin{pmatrix} v_n^* \\ u_n^* \end{pmatrix}$ также подчиняется этому спектральному уравнению с $\varepsilon_n \rightarrow -\varepsilon_n$ [19]. Удобно ввести матрицу $\Upsilon_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n^* \\ v_n & u_n^* \end{pmatrix}$, удовлетворяющую уравнению [18]

$$\hat{\mathcal{H}}\Upsilon_n = \varepsilon_n \sigma_3 \Upsilon_n \sigma_3. \quad (3)$$

При этом выполняются следующие соотношения ортогональности

$$\begin{aligned} \int d^2\mathbf{r} \Upsilon_n^\dagger \sigma_3 \Upsilon_m &= \delta_{nm} \sigma_3, \\ \sum_n \Upsilon_n(\mathbf{r}) \sigma_3 \Upsilon_n^\dagger(\mathbf{r}') &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sigma_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Переход к вторичному квантованию осуществляется по формуле

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \sum_n \Upsilon_n \begin{pmatrix} c_n \\ c_n^\dagger \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $[c_n, c_m^\dagger] = \delta_{nm}$, и, как следствие, $[\psi(\mathbf{r}), \bar{\psi}(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, см. также [20]. Здесь и далее индекс n включает волновой вектор и номер магннной зоны.

“Гравитационный” потенциал. Мы предполагаем малую пространственную вариацию температуры по образцу

$$T(\mathbf{r}) = T(1 - \chi(\mathbf{r})),$$

где $\chi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \nabla \chi$. Градиент $\nabla \chi = -\frac{\nabla T}{T}$ является малым параметром нашей теории. Этот градиент может быть представлен как зависящая от координаты “гравитационная” поправка к гамильтониану, меняющая статистический вес состояний,

$$\exp\left(-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{k_B T(\mathbf{r})}\right) \simeq \exp\left(-\frac{\hat{\mathcal{H}}}{k_B T}(1 + \chi(\mathbf{r}))\right).$$

При этом полный гамильтониан имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{tot}} = \hat{\mathcal{H}} + \hat{F},$$

с симметризованной формой возмущения [21]

$$\hat{F} = \frac{1}{2} \partial_\nu \chi \left(\hat{\mathcal{H}} r^\nu + r^\nu \hat{\mathcal{H}} \right), \quad (6)$$

здесь $\nu = x, y$, и подразумевается суммирование по греческим индексам.

Тепловой ток. Выражение для теплового тока, $\mathbf{j}_E$, может быть найдено из уравнения непрерывности $\partial_t h = -\nabla \mathbf{j}_E$, см. также [16]. После некоторых вычислений мы находим

$$j_E^\mu = \begin{pmatrix} \bar{\psi}, & \psi \end{pmatrix} \hat{j}_E^\mu \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\hat{j}_E^\mu = \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{2} \chi) \hat{V}^\mu (1 + \frac{1}{2} \chi)^2 \sigma_3 \hat{\mathcal{H}} (1 + \frac{1}{2} \chi) + \text{H.c.},$$

в согласии с [15], где оператор групповой скорости

$$\hat{\mathbf{V}} = -i[\mathbf{r}, \mathcal{H}] = 2 \begin{pmatrix} -i\nabla + \mathbf{A}, & 0 \\ 0, & -i\nabla - \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

Первые два члена разложения j_E^μ в ряд Тейлора по $\partial_\nu \chi$ имеют вид

$$\hat{j}_0^\mu = \frac{1}{4} (\hat{V}^\mu \sigma_3 \hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}} \sigma_3 \hat{V}^\mu),$$

$$\hat{j}_1^\mu = \frac{1}{8} \partial_\nu \chi [4 \hat{\mathcal{H}} \sigma_3 r^\nu \hat{V}^\mu + i \hat{V}^\nu \sigma_3 \hat{V}^\mu + 2i \delta_{\mu\nu} \hat{\mathcal{H}} \sigma_3 + \text{H.c.}]. \quad (8)$$

Отметим, что второе слагаемое в выражении для $\hat{j}_1^\mu$, скомбинированное со своим эрмитово сопряженным,

представляет собой ротор калибровочного потенциала, $\frac{i}{4}[\hat{V}_\nu \sigma_3 \hat{V}_\mu - \hat{V}_\mu \sigma_3 \hat{V}_\nu] = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, а третье слагаемое, $\propto \delta_{\mu\nu}$, не дает вклад в поперечный тепловой ток.

Матричные элементы. Определим матричный элемент оператора $\hat{O}$ как 2×2 матрицу вида

$$(\hat{O})_{nm} = \int d\mathbf{r} \Upsilon_n^\dagger \hat{O} \Upsilon_m, \quad (9)$$

так что $\begin{pmatrix} \bar{\psi} & \psi \end{pmatrix} \hat{O} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \sum_{nm} \begin{pmatrix} c_n^\dagger & c_n \end{pmatrix} (\hat{O})_{nm} \begin{pmatrix} c_m \\ c_m^\dagger \end{pmatrix}$. где $\tilde{V}^\nu = -i[\sigma_3 r^\nu, \mathcal{H}]$, и матрица

Используя соотношение (3), мы находим выражения для матричных элементов операторов $\hat{j}_0^\mu$ и $\hat{F}$:

$$\begin{aligned} (\hat{j}_0^\mu)_{nm} &= \frac{1}{4} \left[(\hat{V}^\mu)_{nm} \sigma_3 \varepsilon_m + \varepsilon_n \sigma_3 (\hat{V}^\mu)_{nm} \right], \\ (\hat{F})_{nm} &= \frac{1}{2} \partial_\nu \chi \left[\varepsilon_n \sigma_3 (\sigma_3 r^\nu)_{nm} + (\sigma_3 r^\nu)_{nm} \varepsilon_m \sigma_3 \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь и далее мы используем правило $(\hat{A}\hat{B})_{nm} = \sum_k (\hat{A})_{nk} \sigma_3 (\hat{B})_{km} = \sum_k (\hat{A}\sigma_3)_{nk} \sigma_3 (\hat{B})_{km}$, следующее из уравнения (4). Далее мы хотим выразить $(\hat{F})_{nm}$ полностью в терминах оператора скорости, $(\hat{V}^\mu)_{nm}$. Мы имеем

$$\begin{aligned} (\hat{V}^\nu)_{nm} &= i(\hat{\mathcal{H}}r^\nu - r^\nu \hat{\mathcal{H}})_{nm} \\ &= i(\varepsilon_n \sigma_3 (\sigma_3 r^\nu)_{nm} - (\sigma_3 r^\nu)_{nm} \varepsilon_m \sigma_3). \end{aligned}$$

Вводя $\eta = (\hat{V}^\nu)_{nm}$ и $\xi = (\sigma_3 r^\nu)_{nm}$, мы видим, что

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \sigma_3 \eta \sigma_3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \varepsilon_n & -\varepsilon_m \\ -\varepsilon_m & \varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_3 \xi \\ \xi \sigma_3 \end{pmatrix}.$$

Разрешая это уравнение относительно ξ , находим

$$(\sigma_3 r^\nu)_{nm} = \frac{i}{\varepsilon_m^2 - \varepsilon_n^2} \left(\varepsilon_n \sigma_3 (\hat{V}^\nu)_{nm} + \varepsilon_m (\hat{V}^\nu)_{nm} \sigma_3 \right), \quad (11)$$

тогда искомое выражение принимает вид

$$\begin{aligned} (\hat{F})_{nm} &= -\frac{i}{2} \frac{\partial_\nu \chi}{\varepsilon_n^2 - \varepsilon_m^2} \times \\ &\times \left[(\varepsilon_n^2 + \varepsilon_m^2) (\hat{V}^\nu)_{nm} + 2\varepsilon_n \varepsilon_m \sigma_3 (\hat{V}^\nu)_{nm} \sigma_3 \right], \end{aligned} \quad (12)$$

отметим, что $F_{nm}^{11} = F_{mn}^{22}$, $F_{nm}^{12} = F_{mn}^{12}$, $F_{nm}^{21} = F_{mn}^{21}$.

Обсудим матричные элементы оператора скорости, $(\hat{V}^\nu)_{nm}$. Легко показать, что в этой величине содержится лишь два независимых комплексных числа. Можно представить $(\hat{V}^\nu)_{nm}$ в виде

$$(\hat{V}^\mu)_{nm} = \begin{pmatrix} V_{a,nm}^\mu & -(V_{b,nm}^\mu)^* \\ V_{b,nm}^\mu & -(V_{a,nm}^\mu)^* \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $V_{a,nm}^\mu = \int d\mathbf{r} \Psi_n^\dagger \hat{V}^\mu \Psi_m$, $V_{b,nm}^\mu = \int d\mathbf{r} \bar{\Psi}_n^\dagger \hat{V}^\mu \Psi_m$, с определенными выше псевдоспинорами Ψ_n , $\bar{\Psi}_n$.

Уместно также обсудить здесь матричные элементы $(r^\nu)_{mn}$, которые появляются в нашем анализе ниже. Повторяя шаги, которые привели нас от $(\sigma_3 r^\nu)_{mn}$ к $(\hat{V}^\nu)_{mn}$, мы аналогичным образом получаем

$$(r^\nu)_{mn} = \frac{i}{\varepsilon_n^2 - \varepsilon_m^2} \left[\varepsilon_m \sigma_3 (\tilde{V}^\nu)_{mn} + \varepsilon_n (\tilde{V}^\nu)_{mn} \sigma_3 \right], \quad (14)$$

$$(\tilde{V}^\nu)_{nm} = \begin{pmatrix} \tilde{V}_{a,nm}^\nu & -(\tilde{V}_{b,nm}^\nu)^* \\ -\tilde{V}_{b,nm}^\nu & (\tilde{V}_{a,nm}^\nu)^* \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Можно проверить, что 2×2 матрица $(\hat{V})_{mn}$ является эрмитово сопряженной матрице $(\hat{V})_{nm}$, и аналогично $(\tilde{V}^\nu)_{mn} = [(\tilde{V}^\nu)_{nm}]^\dagger$. Это значит, что $V_{a,mn}^\nu = (V_{a,nm}^\nu)^*$, $V_{b,mn}^\nu = -V_{b,nm}^\nu$ и $\tilde{V}_{a,mn}^\nu = (\tilde{V}_{a,nm}^\nu)^*$, $\tilde{V}_{b,mn}^\nu = \tilde{V}_{b,nm}^\nu$.

Далее мы используем также билинейные по $(\hat{V})_{mn}$ комбинации. Здесь мы определяем

$$\begin{aligned} X_{c,nm}^{\mu\nu} &= i(V_{c,nm}^\mu (V_{c,nm}^\nu)^* - (V_{c,nm}^\mu)^* V_{c,nm}^\nu), \\ \tilde{X}_{c,nm}^{\mu\nu} &= i(V_{c,nm}^\mu (\tilde{V}_{c,nm}^\nu)^* - (V_{c,nm}^\mu)^* \tilde{V}_{c,nm}^\nu), \end{aligned} \quad (16)$$

где $c = a, b$. Легко увидеть, что $X_{a,nm}^{\mu\nu} = -X_{a,mn}^{\mu\nu}$, $X_{b,nm}^{\mu\nu} = X_{b,mn}^{\mu\nu}$ и $\tilde{X}_{a,nm}^{\mu\nu} = -\tilde{X}_{a,mn}^{\mu\nu}$, $\tilde{X}_{b,nm}^{\mu\nu} = -\tilde{X}_{b,mn}^{\mu\nu}$.

Теория линейного отклика. Мы предполагаем, что возмущение $\hat{F}$ включается адиабатически, $\hat{F}e^{\delta t}$, причем $\delta \rightarrow +0$. Обычная формула для линейного по $\chi(\mathbf{r})$ отклика дает

$$\langle \hat{j}^\mu \rangle = \langle \hat{j}^\mu \rangle_0 - i \int_{-\infty}^0 dt \langle [\hat{j}^\mu(0), \hat{F}(t)] \rangle_0 e^{\delta t}, \quad (17)$$

где в представлении взаимодействия $\hat{A}(t) = e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{A} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}$, а усреднение с невозмущенным гамильтонианом дается формулой $\langle \hat{A} \rangle_0 = \text{Tr}(e^{-\hat{\mathcal{H}}/kT} \hat{A}) / \text{Tr}(e^{-\hat{\mathcal{H}}/kT})$. Выражение $\hat{j}_0^\mu$ не зависит от $\chi(\mathbf{r})$ и исчезает при усреднении, $\langle \hat{j}_0^\mu \rangle_0 = 0$. Следуя общепринятым обозначениям, мы пишем $\langle \hat{j}_1^\mu \rangle_0 \equiv -M^{\mu\nu} \partial_\nu \chi$ и $-i \int_{-\infty}^0 dt \langle [\hat{j}_0^\mu(0), \hat{F}(t)] \rangle_0 \equiv -S^{\mu\nu} \partial_\nu \chi$, таким образом, линейный по $\partial_\nu \chi$ вклад принимает вид

$$\langle \hat{j}^\mu \rangle = -(S^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}) \partial_\nu \chi,$$

а тензор теплопроводности записывается в виде

$$\kappa^{\mu\nu} = \frac{1}{T} (S^{\mu\nu} + M^{\mu\nu}). \quad (18)$$

Заметим, что вклады $S^{\mu\nu}$ и $M^{\mu\nu}$ аналогичны парамагнитному и диамагнитному вкладу соответственно в теории электрической проводимости металлов.

В первую очередь мы обсудим коэффициент $S^{\mu\nu}$. Используя симметричные по индексам n, m свойства матричных элементов операторов $\hat{F}$, $\hat{j}_0^\mu$, мы находим

$$S^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \sum_{n,m} \left[\frac{2N(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} ((j_0^\mu)_{nm}^{11}(F)_{mn}^{11} + (j_0^\mu)_{nm}^{22}(F)_{mn}^{22}) - \frac{2N(\varepsilon_n) + 1}{\varepsilon_n + \varepsilon_m} ((j_0^\mu)_{nm}^{12}(F)_{mn}^{21} + (j_0^\mu)_{nm}^{21}(F)_{mn}^{12}) \right].$$

Используя теперь уравнения (10), (12) и (13), мы приходим к компактному выражению

$$S^{\mu\nu} = -\frac{1}{8} \sum_{n,m} \left[2N(\varepsilon_n) \frac{(\varepsilon_n + \varepsilon_m)^2}{(\varepsilon_n - \varepsilon_m)^2} X_{a,nm}^{\mu\nu} + (2N(\varepsilon_n) + 1) \frac{(\varepsilon_n - \varepsilon_m)^2}{(\varepsilon_n + \varepsilon_m)^2} X_{b,nm}^{\mu\nu} \right], \quad (19)$$

где величины $X_{c,nm}^{\mu\nu}$ определены в ур. (16). При выводе выражения для $S^{\mu\nu}$ мы сконцентрировались на холловском тепловом токе, подразумевая недиагональную тензорную структуру, $\mu \neq \nu$. Это позволило нам игнорировать в (19) внутризонные переходы, $\varepsilon_n = \varepsilon_m$; в противном случае, нам бы пришлось устранять возникающие особенности, допуская конечное время жизни квазичастиц [19].

Коэффициент $M^{\mu\nu}$ удобно представить в виде суммы

$$M^{\mu\nu} = M_1^{\mu\nu} + M_2^{\mu\nu},$$

с $M_1^{\mu\nu}$, $M_2^{\mu\nu}$, происходящими соответственно из двух первых слагаемых в $\hat{j}_1^\mu$, ур. (8), и их эрмитово сопряженных.

$$\begin{aligned} M_1^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \langle \hat{\mathcal{H}} \sigma_3 r^\nu \hat{V}^\mu + \hat{V}^\mu r^\nu \sigma_3 \hat{\mathcal{H}} \rangle_0 \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n,m} \varepsilon_n (2N(\varepsilon_n) + 1) \left[\frac{X_{a,nm}^{\mu\nu}}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} + \frac{X_{b,nm}^{\mu\nu}}{\varepsilon_n + \varepsilon_m} \right], \\ M_2^{\mu\nu} &= \frac{i}{8} \langle \hat{V}^\mu \sigma_3 \hat{V}^\nu - \hat{V}^\nu \sigma_3 \hat{V}^\mu \rangle_0 \\ &= \frac{1}{8} \sum_{n,m} (2N(\varepsilon_n) + 1) [X_{a,nm}^{\mu\nu} + X_{b,nm}^{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (20)$$

Объединяя вклады (19) и (20), мы приходим к выражению

$$\kappa^{\mu\nu} = -\frac{1}{T} \sum_n \varepsilon_n^2 \left(N(\varepsilon_n) + \frac{1}{2} \right) \Omega_n^{\mu\nu}, \quad (21)$$

где кривизна Берри $\Omega_n^{\mu\nu}$ определяется формулой

$$\Omega_n^{\mu\nu} = \sum_m \left[\frac{X_{a,nm}^{\mu\nu}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_m)^2} + \frac{X_{b,nm}^{\mu\nu}}{(\varepsilon_n + \varepsilon_m)^2} \right]. \quad (22)$$

Поскольку функция распределения Бозе–Эйнштейна $N(\varepsilon_n)$ в первом слагаемом в (21) фактически ограничивает суммирование по n энергиями $\varepsilon_n < T$, то соответствующий вклад в $\kappa^{\mu\nu}$ ограничен сверху. С другой стороны, не зависящее от T второе слагаемое в сумме (21) приводит при $T \rightarrow 0$ к расходящемуся вкладу $\kappa^{\mu\nu} \sim 1/T$, который является некоторым аналогом эффекта Мейснера в сверхпроводимости.

Далее мы показываем, что ур. (21) дает завышенную оценку величины расходящегося при $T \rightarrow 0$ вклада, и правильная процедура уменьшает его значение, хотя расходимость в $\kappa^{\mu\nu}$ *полностью не исчезает*.

Нулевые колебания. Наше главное наблюдение состоит в наличии так называемых нулевых колебаний в токе $\hat{j}_1^\mu$, которые следует учитывать совместно с ур. (8). Чтобы это увидеть, мы положим $V \equiv 0$ в ур. (2), тогда $v_n = 0$ в Υ_n и $X_{b,nm}^{\mu\nu} = 0$. Ввиду антисимметрии $X_{a,nm}^{\mu\nu}$ по индексам n, m мы имеем $S^{\mu\nu} = M_2^{\mu\nu} = 0$, в то время как $M_1^{\mu\nu} \neq 0$ в пределе $T = 0$, что приводит к расходимости (21). Ясно, что в отсутствие аномальных членов V в ур. (2) выражение для $\hat{j}_0^\mu$ должно иметь обычный вид $\varepsilon_n (\partial \varepsilon_n / \partial q) c_n^\dagger c_n$, вместо вида $\frac{1}{2} \varepsilon_n (\partial \varepsilon_n / \partial q) (c_n^\dagger c_n + c_n c_n^\dagger)$, следующего из ур. (8); и то же следует ожидать для $\hat{j}_1^\mu$. В результате средний ток $\langle \hat{j}_1^\mu \rangle$ в этом случае должен содержать выражение $\langle c_n^\dagger c_n \rangle = N(\varepsilon_n)$, вместо $\frac{1}{2} \langle c_n^\dagger c_n + c_n c_n^\dagger \rangle = N(\varepsilon_n) + 1/2$ в ур. (20). В случае же $V \neq 0$ ситуация более сложная, и мы обсуждаем это ниже.

В общем случае, рассмотрим нормально упорядоченный квадратичный по ψ оператор, $\hat{A}$, соответствующий наблюдаемой величине, $\hat{A} = \bar{\psi} A^{11} \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} A^{12} \bar{\psi} + \frac{1}{2} \psi A^{21} \psi$. Такой оператор самосопряжен, откуда следует, что $A^{11} = (A^{11})^\dagger$, $A^{12} = (A^{21})^*$. Для нашего удобства мы переходим от нормально упорядоченного вида к выражению

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\psi} & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{11} & (A^{21})^* \\ A^{21} & (A^{11})^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\psi} & \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{11} & 0 \\ 0 & -(A^{11})^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое используется для дальнейших матричных операций, а второе – пропорционально коммутатору, $[\psi, \bar{\psi}]$, который является с-числом, и, как правило, им можно пренебречь.

Второе слагаемое становится важным, например, в обсуждении разницы между неелевским и квантовым неелевским состояниями в антиферромагнетике. В этом случае оператор $\hat{A}$ – гамильтониан, с $A^{11} = J(0)$ и $A^{12} = J(\mathbf{q})$, здесь $J(\mathbf{q})$ – фурье-образ константы антиферромагнитного обмена. После диагонализации этот гамильтониан приобретает вид $\frac{1}{2} \sum_q \varepsilon(\mathbf{q})(c_q^\dagger c_q + c_q c_q^\dagger)$, где $\varepsilon(\mathbf{q}) = \sqrt{J(0)^2 - J(\mathbf{q})^2}$. Переходя снова к нормально упорядоченному виду, $H = \sum_q \varepsilon(\mathbf{q}) c_q^\dagger c_q$, мы получаем c -число. Разница этих двух c -чисел, $\Delta E = \frac{1}{2} \sum_q (\varepsilon(\mathbf{q}) - J(0))$, дает выигрыш в энергии квантового состояния Нееля по сравнению с обычным неелевским упорядочением.

Такие же рассуждения могут быть использованы в отношении тока, $\langle \hat{j}_1^\mu \rangle$, который вдобавок к уже вычисленным вкладам (20) должен содержать часть, опущенную в (8), но содержащуюся в правильном исходном виде, нормально упорядоченном по $\bar{\psi}, \psi$. Отметим, что в квазиклассическом подходе [20] величины $\bar{\psi}, \psi$ становятся операторами только после процедуры вторичного квантования, и вопрос о нормальном упорядочении не столь тривиален. В то же время, если использовать представление Малеева–Дайсона с осью квантования спина вдоль направления локальной намагниченности [3, 6, 19], то нормальное упорядочение возникающих выражений для наблюдаемых становится вполне очевидным.

Поправка к току $\hat{j}_1^\mu$. Недостающий вклад нулевых колебаний, т.е. второе слагаемое в (23), может быть восстановлен следующим образом

$$\hat{R}^\mu = \frac{1}{2}(\sigma_3 \hat{j}_1^\mu + \hat{j}_1^\mu \sigma_3).$$

После некоторых вычислений мы можем представить его в виде

$$\hat{R}^\mu = \frac{1}{4} \left(\hat{V}^\mu r^\nu \hat{H} + \hat{V}^\mu \sigma_3 \hat{H} r^\nu \sigma_3 + \frac{i}{2} \hat{V}^\mu \hat{V}^\nu \right) \partial_\nu \chi + \text{H.c.},$$

а среднее находится по формуле

$$\langle \hat{R}^\mu \rangle = \sum_n \left((N(\varepsilon_n) + \frac{1}{2}) \text{Tr}(\hat{R}^\mu)_{nn} - \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_3(\hat{R}^\mu)_{nn}) \right). \quad (24)$$

Диагональный матричный элемент имеет вид

$$(\hat{R}^\mu)_{nn} = \frac{1}{4} \sum_m (\hat{V}^\mu)_{nm} \left(\sigma_3(r^\nu)_{mn} \sigma_3 \varepsilon_n + \varepsilon_m (r^\nu)_{mn} + \frac{i}{2} \sigma_3 (\sigma_3 \hat{V}^\nu)_{mn} \right) \partial_\nu \chi + \text{H.c.} \quad (25)$$

Используя свойства матричных элементов $(r^\nu)_{mn}$, $(\hat{V}^\nu)_{mn}$, $(\sigma_3 \hat{V}^\nu)_{mn}$, ур. (14), (15), можно убедиться, что $\text{Tr}(\hat{R}^\mu)_{nn} = 0$ в ур. (24), и, следовательно, $\langle \hat{R}^\mu \rangle$

не зависит от T , как и ожидалось. Второе слагаемое, $-\frac{1}{2} \sum_n \text{Tr}(\sigma_3(\hat{R}^\mu)_{nn})$, не исчезает, и мы получаем

$$\langle \hat{R}^\mu \rangle = -\frac{1}{4} \sum_{nm} \left(\frac{\varepsilon_n + \varepsilon_m}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} \tilde{X}_{a,nm}^{\mu\nu} + \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_m}{\varepsilon_n + \varepsilon_m} \tilde{X}_{b,nm}^{\mu\nu} \right) \partial_\nu \chi.$$

Используя свойства величины $\tilde{X}_{c,nm}^{\mu\nu}$, ур. (16), мы можем представить вклад нулевых колебаний как

$$\langle \hat{R}^\mu \rangle = -\frac{1}{2} \sum_n \varepsilon_n^2 \tilde{\Omega}_n^{\mu\nu} \partial_\nu \chi, \quad (26)$$

с модифицированной кривизной Берри

$$\tilde{\Omega}_n^{\mu\nu} = \sum_m \left[\frac{\tilde{X}_{a,nm}^{\mu\nu}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_m)^2} + \frac{\tilde{X}_{b,nm}^{\mu\nu}}{(\varepsilon_n + \varepsilon_m)^2} \right]. \quad (27)$$

Полное выражение для холловской теплопроводности приобретает вид

$$\kappa^{\mu\nu} = -\frac{1}{T} \sum_n \varepsilon_n^2 \left[N(\varepsilon_n) \Omega_n^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (\Omega_n^{\mu\nu} - \tilde{\Omega}_n^{\mu\nu}) \right]. \quad (28)$$

Можно убедиться, что тензор $\kappa^{\mu\nu}$ антисимметричен по индексам μ, ν . Уравнение (28) является основным результатом этой работы, и мы обсуждаем его ниже.

Обсуждение и выводы. Во-первых, нужно отметить, что в отсутствие в гамильтониане аномальных членов, $V \equiv 0$ в ур. (2), мы имеем $v_n \equiv 0$ в Υ_n и, следовательно, $V_{a,nm}^\nu = \tilde{V}_{a,nm}^\nu$, $V_{b,nm}^\nu = \tilde{V}_{b,nm}^\nu = 0$ в (13), (15). Отсюда следует, что $X_{a,nm}^{\mu\nu} = \tilde{X}_{a,nm}^{\mu\nu}$, $X_{b,nm}^{\mu\nu} = \tilde{X}_{b,nm}^{\mu\nu} = 0$ и $\Omega_n^{\mu\nu} = \tilde{\Omega}_n^{\mu\nu}$. В этом случае второе слагаемое в (28) обращается в ноль, и наш результат упрощается

$$\kappa^{\mu\nu} = -\frac{1}{T} \sum_n \varepsilon_n^2 N(\varepsilon_n) \Omega_n^{\mu\nu}. \quad (29)$$

Это выражение исчезает в пределе $T \rightarrow 0$, что отличает его от результата работы [11], где вклад $M^{\mu\nu}$ был опущен и чье ур. (3) соответствует выражению $\kappa^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}/T$ с нашим ур. (19).

Учет вклада $M^{\mu\nu}$ в [13, 15] привел к обнулению $\kappa^{\mu\nu}$ при $T \rightarrow 0$. Однако, сравнивая ур. (20) из работы [13] даже с нашим более простым ур. (29), мы наблюдаем большую разницу в функциональном виде этих формул. В недавней работе [16] было продемонстрировано согласие результатов [13] и [15], поэтому мы сосредоточим свое внимание на последней работе.

Имея такое же выражение для тока, (7), мы видим, что некоторые полученные нами промежуточные формулы совпадают с аналогичными выражениями в [15]. А именно, мы согласуемся в форму-

лах для $S^{\mu\nu}$, $M_2^{\mu\nu}$ и не согласуемся в выражении для $M_1^{\mu\nu}$, наши ур. (19), (20). Вклад нулевых колебаний не обсуждался в работе [15]. Соответственно, явный аналитический вид нашего результата, ур. (28), отличается от такового в [15], ур. (32). Мы приводим детали нашего вычисления ур. (20) в приложении к этой работе. Возможная причина различий между нашими результатами может заключаться в следующем. Постановка задачи в [14, 16] соответствует четырехтерминальной геометрии, в которой топологический материал помещен между терминалами, поддерживаемыми при заданной температуре. Наличие удерживающего потенциала для магнонов на границе материала и наличие соответствующего краевого тока было необходимо для вывода формул в указанных работах. В нашем подходе, основанном на теории линейного отклика, мы не предполагаем удерживающего потенциала для магнонов, и краевой ток не возникает. Было бы интересно аккуратно рассмотреть этот вопрос в рамках формализма Келдыша [22, 23].

Обсудим теперь значимость двух членов суммы (28) для частного случая ТЭХ в двумерном СкК. Предварительные оценки показывают, что $\Omega_n^{\mu\nu}$ остается в среднем почти константой с ростом энергии, ε_n . Разница $(\Omega_n^{\mu\nu} - \bar{\Omega}_n^{\mu\nu})$, с другой стороны, ведет себя как $\varepsilon_0^2/\varepsilon_n^2$ в широком диапазоне энергий, $\varepsilon_0 \lesssim \varepsilon_n \lesssim J$, где $\varepsilon_0 = D^2/J \ll J$, здесь J и D – константы обменного взаимодействия и взаимодействия Дзялошинского–Мории, соответственно. Отсюда следует, что первый вклад в $\kappa^{\mu\nu}$ ограничен энергиями $\sim T$ и ведет себя как $\propto T^2/J$, а второй – слабо расходится при высоких энергиях и ведет себя как $\propto \varepsilon_0^2/T$. Вклад нулевых колебаний становится главным только при низких температурах, $T \lesssim J \cdot (\varepsilon_0/J)^{2/3}$, которые вряд ли превышают 1 К в реальных соединениях. Мы планируем провести соответствующий анализ в дальнейшем.

В заключение, мы заново анализируем формулу для ТЭХ в бозонных системах с возможным применением к неколлинеарным магнетикам с топологическим характером дисперсии магнонов. Мы показываем наличие остаточного вклада нулевых колебаний, что приводит к расходящейся холловской теплопроводности в пределе $T \rightarrow 0$.

Мы благодарим В. Е. Тимофеева за многочисленные полезные обсуждения.

Финансирование работы. Эта работа была выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект # 25-12-00212), <https://rscf.ru/en/project/25-12-00212/>. Работа была частично поддержана Фондом развития теоретической физики и математики “Базис”.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. P. Petrović, C. Psaroudaki, P. Fischer, M. Garst, and C. Panagopoulos, “Colloquium: Quantum properties and functionalities of magnetic skyrmions”, *Rev. Mod. Phys.* **97**, 031001 (2025).
2. N. Nagaosa and Y. Tokura, “Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions”, *Nature Nanotechnology* **8**, 899 (2013).
3. A. Roldán-Molina, A. S. Nunez, and J. Fernández-Rossier, “Topological spin waves in the atomic-scale magnetic skyrmion crystal”, *New J. Phys.* **18**, 045015 (2016).
4. T. Weber, D. M. Fobes, J. Waizner, P. Steffens, G. S. Tucker, M. Böhm, L. Beddich, C. Franz, H. Gabold, R. Bewley, D. Voneshen, M. Skoulatos, R. Georgii, G. Ehlers, A. Bauer, C. Pfeleiderer, P. Böni, M. Janoschek, and M. Garst, “Topological magnon band structure of emergent Landau levels in a skyrmion lattice”, *Science* **375**, 1025 (2022).
5. D. Ghader and B. Jabakhanji, “Momentum-space theory for topological magnons in two-dimensional ferromagnetic skyrmion lattices”, *Phys. Rev. B* **110**, 184409 (2024).
6. S. A. Díaz, T. Hirose, J. Klinovaja, and D. Loss, “Chiral magnonic edge states in ferromagnetic skyrmion crystals controlled by magnetic fields”, *Phys. Rev. Research* **2**, 013231 (2020).
7. V. E. Timofeev, Y. V. Baramygina, and D. N. Aristov, “Magnon topological transition in skyrmion crystal”, *JETP Lett.* **118**, 911 (2023).
8. V. E. Timofeev, D. A. Bedyayev, and D. N. Aristov, “Topological transition in spectrum of skyrmion crystal with uniaxial anisotropy”, *JETP Lett.* **123**, 476 (2026).
9. K. A. van Hoogdalem, Y. Tserkovnyak, and D. Loss, “Magnetic texture-induced thermal hall effects”, *Phys. Rev. B* **87**, 024402 (2013).
10. M. Akazawa, H.-Y. Lee, H. Takeda, Y. Fujima, Y. Tokunaga, T.-h. Arima, J. H. Han, and M. Yamashita, “Topological thermal hall effect of magnons in magnetic skyrmion lattice”, *Phys. Rev. Research* **4**, 043085 (2022).
11. H. Katsura, N. Nagaosa, and P. A. Lee, “Theory of the thermal Hall effect in quantum magnets”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 066403 (2010).
12. T. Qin, Q. Niu, and J. Shi, “Energy magnetization and the thermal Hall effect”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 236601 (2011).
13. T. Qin, J. Zhou, and J. Shi, “Berry curvature and the phonon Hall effect”, *Phys. Rev. B* **86**, 104305 (2012).
14. R. Matsumoto and S. Murakami, “Theoretical prediction of a rotating magnon wave packet in ferromagnets”, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 197202 (2011).

15. R. Matsumoto, R. Shindou, and S. Murakami, “Thermal Hall effect of magnons in magnets with dipolar interaction”, *Phys. Rev. B* **89**, 054420 (2014).
16. L. Mangeolle, L. Savary, and L. Balents, “Quantum kinetic equation and thermal conductivity tensor for bosons”, *Phys. Rev. B* **109**, 235137 (2024).
17. M. Garst, J. Waizner, and D. Grundler, “Collective spin excitations of helices and magnetic skyrmions: review and perspectives of magnonics in non-centrosymmetric magnets”, *Journal of Physics D: Applied Physics* **50**, 293002 (2017).
18. V.E. Timofeev and D.N. Aristov, ‘Magnon band structure of skyrmion crystals and stereographic projection approach”, *Phys. Rev. B* **105**, 024422 (2022).
19. C. Schütte and M. Garst, “Magnon-skyrmion scattering in chiral magnets”, *Phys. Rev. B* **90**, 094423 (2014).
20. V.E. Timofeev and D.N. Aristov, “Dynamic susceptibility of skyrmion crystal”, *JETP Lett.* **117**, 676 (2023).
21. J.M. Luttinger, “Theory of thermal transport coefficients”, *Phys. Rev.* **135**, A1505 (1964).
22. A. Kamenev, *Field Theory of Non-equilibrium Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
23. D.N. Aristov and P. Wölfle, “Transport properties of a two-lead Luttinger-liquid junction out of equilibrium: Fermionic representation”, *Phys. Rev. B* **90**, 245414 (2014).