

Термо-ЭДС графена в условиях сильного электрон-дырочного рассеяния¹⁾

В. Атласов²⁾, Д. Свинцов

Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия

Поступила в редакцию 24 июня 2026 г.

После переработки 16 июля 2026 г.

Принята к публикации 17 июля 2026 г.

Исследовано изменение термоэлектрических коэффициентов однослойного графена при переходе между дрейфово-диффузионным и гидродинамическим режимами транспорта. Переход управляется безразмерной силой электрон-дырочного взаимодействия r – отношением частоты межчастичных столкновений к частоте рассеяния на примесях и фононах. Обнаружен аномальный рост коэффициента Зеебека S в узкой окрестности точки зарядовой нейтральности, при этом максимум зависимости S от концентрации носителей масштабируется как $r^{1/2}$. Такое масштабирование объясняется сильным подавлением электрического тока за счет электрон-дырочного рассеяния вблизи точки нейтральности и нечувствительностью теплопереноса носителей к этому рассеянию. По той же причине электронная теплопроводность κ достигает максимума в точке нейтральности, а также принимает большие значения при высокой концентрации носителей вследствие частичного восстановления закона Видемана–Франца в однополярном пределе. Между этими большими значениями теплопроводность достигает минимума. Для вычисления S и κ при произвольных частотах столкновений построена точно решаемая кинетическая модель с межчастичными интегралами столкновений в обобщенном приближении времени релаксации. Установлено, что характеристики термоэлектрических фотодетекторов на основе p – n -переходов в графене улучшаются при переходе в гидродинамический режим, который характеризуется большой термо-ЭДС и ослабленным охлаждением горячих носителей за счет диффузии тепла к контактам.

DOI: 10.7868/S3034576626090107

I. Введение. Среди двумерных материалов графен особенно примечателен своим уникальным линейным энергетическим спектром. Такая нетривиальная зонная структура приводит к низкой электронной теплоемкости [1], сверхбыстрой термализации между носителями [2] и слабому охлаждению электронов за счет испускания фононов [3]. Вместе эти свойства обеспечивают эффективную генерацию и исключительно большие времена жизни горячих электронов и дырок [4]. Локализованное возбуждение этих горячих носителей создает градиент температуры, который стимулирует термоэлектрический эффект (эффект Зеебека), приводящий к появлению тока в замкнутой цепи или напряжения в разомкнутой цепи [5]. Количественно эффект Зеебека характеризуется термо-ЭДС S , выражающей возникновение напряжения в ответ на наведенный градиент температуры: $S = -dV/dT$. Это явление может быть успешно применено к задаче широкополосного фотодетектирования, поскольку падающее

излучение генерирует локализованные горячие носители, порождая фототермоэлектрический отклик [6, 7].

Существующие эксперименты [5, 8] и простые соображения масштабирования показывают, что максимальное значение коэффициента Зеебека в графене как функции настраиваемой энергии Ферми μ имеет порядок $S \sim k_B/e \approx 90$ мВ/К. Это наблюдение следует из нулевого значения термо-ЭДС точно в точке зарядовой нейтральности и спада S к нулю в вырожденном пределе $\mu \gg k_B T$ согласно соотношению Мотта $S = -(\pi^2 k_B)/(3e) \cdot k_B T \cdot \partial \ln \sigma / \partial \mu$, где σ – электропроводность [9]. Поскольку частота столкновений носителей не входит в соотношение Мотта, единственным подходящим безразмерным параметром, управляющим изменением S , является приведенная энергия Ферми $\mu/(k_B T)$. Максимум S , таким образом, достигается при $\mu \sim k_B T$ и имеет порядок k_B/e . Этот верхний предел ниже, чем в полупроводниках с запрещенной зоной, где параметрически большее значение $S_{\max} \sim (k_B/e)(E_G/k_B T)$ достигается при уровне Ферми, лежащем глубоко в запрещенной зоне ширины E_G [10]. Данное наблюдение ставит вопрос о возможных стратеги-

¹⁾См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ru

²⁾e-mail: atlasov.vr@phystech.edu

ях повышения термоэлектрических характеристик графена.

Возможный путь повышения термоэлектрических характеристик у структур на основе графена был предложен в работах [11, 12], в которых рассматривалось влияние электрон-электронных ($e-e$) столкновений на термо-ЭДС, электронную теплопроводность и безразмерный термоэлектрический показатель ZT . Приведенные выше аргументы масштабирования теряют силу в присутствии $e-e$ -рассеяния, поскольку термо-ЭДС S теперь может зависеть от отношения частоты $e-e$ -столкновений и частоты столкновений с внешними агентами (фононами и беспорядком). Увеличение S в вырожденно легированной взаимодействующей электронной системе оказалось малым [13]: рост частоты $e-e$ -рассеяния в легированном пределе приближает S к другому предельному значению – энтропии на единицу заряда [14, 15]. Оно снова имеет порядок k_B/e , хотя и несколько превышает предсказание формулы Мотта.

Влияние сильного взаимного рассеяния носителей на термоэлектричество в окрестности зарядовой нейтральности изучено меньше, поскольку прежние теории термоэлектричества с учетом межчастичных столкновений [11, 12, 16] ограничивались одним типом носителей заряда. Когда концентрации электронов и дырок сравнимы, принципиально важно также учитывать взаимное электрон-дырочное ($e-h$) взаимодействие при описании переноса [14, 17–19]. В работе [17] было показано, что эти столкновения дают дополнительный вклад в сопротивление в узкой окрестности зарядовой нейтральности, который быстро исчезает при малой несбалансированности электронов и дырок. Этот эффект, названный квантовым критическим сопротивлением [14] или электрон-дырочным увлечением [17], был предсказан более десяти лет назад и наблюдался в недавних экспериментах [20]. Электрон-дырочное рассеяние минимально при их сонаправленном дрейфе в градиенте температуры, что приводит к сильному нарушению закона Видемана–Франца [21] с более чем 200-кратным отклонением числа Лоренца от значения $\pi^2 k_B^2 / 3e^2$ в наиболее чистых образцах [22]. Исходя из слабого влияния $e-h$ -рассеяния на движение носителей в градиенте температуры и сильного влияния на электропроводность, разумно предположить, что коэффициент Зеебека должен возрастать при сильных $e-h$ -столкновениях. Однако полная теория переноса для этого явления отсутствует, как и оценки реально достижимых максимальных значений S . Вагнер и др. [18] вывели выражение для S в рамках двухжидкостного гидродинамического приближения, но

не проанализировали возникающую зависимость S от концентрации. Зарения и др. [23, 24] проанализировали термоэлектрические свойства в широком диапазоне концентраций с помощью вариационного подхода с двухмодовым анзацем для функции распределения и обнаружили рост S вблизи зарядовой нейтральности при последовательно ослабляемом беспорядке. Поскольку термо-ЭДС чрезвычайно чувствительна к форме функции распределения электронов, т.е. к асимметрии рассеяния “горячих” и “холодных” носителей, вариационный подход очень часто оказывается недостаточным для описания термоэлектричества [25, 26]. Таким образом, крайне желателен последовательный метод расчета термо-ЭДС с учетом сильного межчастичного рассеяния, охватывающий, в частности, переход между диффузионным и гидродинамическим режимами.

В настоящей работе мы приводим такой подход для описания термоэлектрических свойств графена при произвольном отношении частот внешнего и межчастичного рассеяния. Он основан на аналитически разрешимом обобщенном приближении времени релаксации (ОПВР) для интегралов столкновений носителей и сводится к двухжидкостной гидродинамике при сильных межчастичных столкновениях. Мы показываем, что увеличение S при сильном $e-h$ -рассеянии, действительно, имеет место в окрестности зарядовой нейтральности, а максимальное значение S параметрически превышает k_B/e в $r^{1/2}$ раз, где r – отношение частоты электрон-дырочных столкновений к частоте внешних столкновений; физически оно представляет силу электрон-дырочного рассеяния по сравнению с рассеянием на внешнем канале. Наконец, мы исследуем влияние электрон-дырочного рассеяния на показатель сигнал/шум графеновых термоэлектрических фотодетекторов на $p-n$ -переходах. Этот показатель пропорционален S , обратно пропорционален электронной теплопроводности κ (которая стремится уменьшить достижимый нагрев носителей) и прямо пропорционален $\sigma^{1/2}$ (которая порождает тепловой шум). Несмотря на противоположные эффекты $e-h$ -столкновений на S и σ , показатель выигрывает от сильного межчастичного рассеяния.

Статья организована следующим образом. В разделе II формулируется общая задача переноса и вводятся теоретический формализм и ключевые определения, используемые на протяжении всей работы. В разделе III А мы рассматриваем гидродинамический предел и количественно вычисляем коэффициент Зеебека S и теплопроводность κ в присутствии сильных столкновений частиц одного типа. В разделе III В вводится подход на основе ОПВР для мо-

делирования термоэлектрических свойств в промежуточном режиме переноса. Полученные результаты сравниваются с известными предельными случаями. В разделе III С мы демонстрируем, что учет электрон-дырочного рассеяния приводит к улучшению характеристик фотодетекторов на основе графена. Наконец, в разделе IV мы подводим итоги и обсуждаем дальнейшие перспективы.

II. Определения и предварительные сведения. Для вычисления термоэлектрических свойств, а именно электропроводности σ , теплопроводности κ и коэффициента Зеебека S (напряжения, возникающего в образце на единицу разности температур в разомкнутой цепи), мы вычисляем макроскопические потоки заряда и тепла для обоих типов носителей $\mathbf{j}_{e,h}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{j}_{e,h}^Q(\mathbf{r})$. Коэффициенты переноса затем определяются феноменологически при линейных возмущениях: $\mathbf{j} = -\sigma \nabla V - a \nabla T$, $\mathbf{j}^Q = -\kappa \nabla T + \Pi \mathbf{j}$; следовательно, термо-ЭДС равна $S = a/\sigma$. Функции распределения $f_{e,h}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, необходимые для вычисления потоков, находятся путем линеаризации кинетических уравнений вблизи локально-равновесного распределения Ферми-Дирака $f_{e,h}^0(p, \mathbf{r})$ при слабо неоднородных температуре $T(\mathbf{r})$ и энергии Ферми $\mu_{e,h}(\mathbf{r})$. В предположении симметричных энергетических зон графена ($\mathcal{E}_e(p) = \mathcal{E}_h(p) = \mathcal{E}(p) = v_F p$, энергия дырок считается положительной) линеаризованное кинетическое уравнение для электронов имеет вид:

$$-\mathbf{v}_p \frac{\nabla T}{T} (\mathcal{E} - \mu_e) \frac{\partial f_e^0}{\partial \mathcal{E}} + \mathbf{v}_p e \nabla V \frac{\partial f_e^0}{\partial \mathcal{E}} = C_e[f_e, f_h]. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}_p = \partial \mathcal{E} / \partial \mathbf{p} = v_F \cdot \mathbf{p} / p$ — групповая скорость носителей, а правая часть представляет полный интеграл столкновений, включающий внешний, электрон-электронный и электрон-дырочный каналы рассеяния: $C_e[f_e, f_h] = C_{e-\text{ext}}[f_e] + C_{e-e}[f_e] + C_{e-h}[f_e, f_h]$. Аналогичное уравнение справедливо для дырок.

В гидродинамическом режиме переноса доминирует рассеяние между частицами одного типа, поэтому функции распределения релаксируют к квази-ферми-дираковским состояниям, сдвинутым на дрейфовую скорость носителей $\delta \mathbf{u}_{e,h}$, поскольку такая форма обнуляет интегралы столкновений для частиц одного сорта. При малых внешних возмущениях эти гидродинамические поправки принимают вид

$$\delta f_{e,h}^{hd} = -\frac{\partial f_{e,h}^0}{\partial \mathcal{E}} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u}_{e,h}. \quad (2)$$

Поскольку вычисление транспортных свойств с полными функциями распределения включает

усреднение по импульсам, мы вводим специальное обозначение для среднего значения произвольной зависящей от импульса величины $\mathcal{F}(p)$ на одну частицу по невозмущенному состоянию:

$$\overline{\mathcal{F}}_{e,h}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n_{e,h}} \int_0^\infty \frac{g \cdot 2\pi p dp}{(2\pi\hbar)^2} \cdot f_{e,h}^0(p, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{F}(p), \quad (3)$$

где концентрации носителей $n_{e,h}$ получаются при подстановке $\mathcal{F} \equiv 1$. Соответственно, мы определяем фиктивные гидродинамическую и кинетическую массы носителей в графене как:

$$M_{e,h}^{hd} = \frac{3}{2} \frac{\overline{\mathcal{E}}_{e,h}}{v_F^2}, \quad \frac{1}{M_{e,h}^k} = \frac{v_F^2}{2} \overline{\left(\frac{1}{\mathcal{E}_{e,h}} \right)}. \quad (4)$$

Физически гидродинамическая масса $M_{e,h}^{hd}$ связывает коллективное движение носителей с переносимым импульсом и входит в силы трения ниже, тогда как $M_{e,h}^k$ — инертность носителей под действием приложенной электрической силы (которая для линейного спектра сводится к повороту их скорости), и потому это среднее определяет ток.

После введения этих макроскопических переменных неравновесные потоки могут быть явно вычислены. Мы начинаем расчет термоэлектрических свойств в разделе III А с рассмотрения чисто гидродинамического предела. Хотя он описывает лишь конкретный режим переноса, рассмотрение электронной и дырочной подсистем как связанных жидкостей дает интуитивно ясную физическую картину того, как межчастичное трение изменяет итоговые величины транспортных коэффициентов.

III. Результаты.

А. Качественная картина усиления термо-ЭДС из-за электрон-дырочного рассеяния: двухжидкостная гидродинамика. В гидродинамическом режиме носители ведут себя как две связанные заряженные жидкости с фиктивными плотностями $\rho_{e,h} = n_{e,h} M_{e,h}^{hd}$, испытывающие внешнее и взаимное трение. Интенсивность этих взаимодействий определяется временами релаксации импульса для внешнего ($\tau_{e-\text{ext}}$) и межчастичного (τ_{e-h}^{tr}) каналов, причем последние фундаментально связаны законом сохранения суммарного импульса в электрон-дырочных столкновениях: $\rho_e / \tau_{e-h}^{\text{tr}} = \rho_h / \tau_{h-e}^{\text{tr}}$ (третий закон Ньютона для двух жидкостей). Верхний индекс “tr” (транспортное) подчеркивает, что τ_{e-h}^{tr} — характерное время передачи импульса между жидкостями. Оно в общем случае отличается от квазичастичного электрон-дырочного времени столкновений τ_{e-h} , управляющего релаксацией формы распределений носителей. Их различие станет ясным в разделе III В.

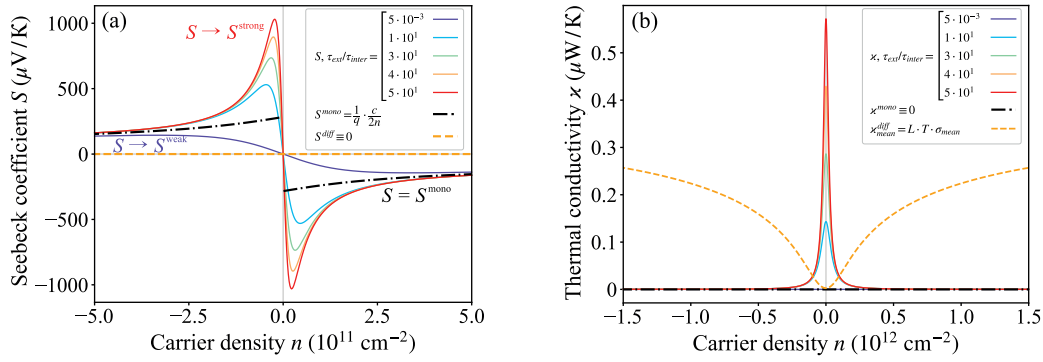


Рис. 1. (Цветной онлайн) Термоэлектрические свойства графена в гидродинамическом пределе при 300 К. (а) – Коэффициент Зеебека $S(n)$ при различной силе e - h -взаимодействия $r = \tau_{\text{ext}}/\tau_{\text{inter}}$. Эта величина варьируется с помощью управления внешним каналом (τ_{ext}). Результаты сравниваются с однополярным гидродинамическим пределом (S^{mono} , черный пунктир) и диффузионным пределом, в котором рассеяние на акустических фононах дает нулевую термо-ЭДС ($S^{\text{diff}} \equiv 0$, оранжевый пунктир). (б) – Теплопроводность $\kappa(n)$ на том же диапазоне. Однополярный предел тождественно обращается в нуль ($\kappa^{\text{mono}} \equiv 0$, черный пунктир), поскольку теплоперенос становится полностью конвективным, тогда как диффузионный предел следует стандартному закону Видемана-Франца с $L = \pi^2 k_B^2 / 3e^2$ – числом Лоренца (оранжевый пунктир, $\kappa^{\text{diff}}_{\text{mean}}$, рассчитано для средней электропроводности σ_{mean} на рассматриваемом интервале τ_{ext})

При малом гидродинамическом возмущении $\delta f_{e,h}^{hd}$ вблизи равновесия интегралы столкновений уравнений Больцмана (1) могут быть линейаризованы по дрейфовым скоростям: $C_{e-\text{ext}} = -\delta \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{S}_{\text{ext}}[f_e^0]$, $C_{e-h} = -(\delta \mathbf{u}_e - \delta \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{S}_{e-h}[f_e^0, f_h^0]$. Умножение получившихся линейаризованных кинетических уравнений на импульс и интегрирование по импульсному пространству дает управляющие уравнения Эйлера. В частности, для электронов:

$$\frac{1}{2} c_e \nabla T - e n_e \nabla V = -\frac{\rho_e}{\tau_{e-\text{ext}}} \delta \mathbf{u}_e - \frac{\rho_e}{\tau_{e-h}^{\text{tr}}} (\delta \mathbf{u}_e - \delta \mathbf{u}_h), \quad (5)$$

где $c_{e,h} = \partial (n_{e,h} \overline{\mathcal{E}_{e,h}}) / \partial T$ – поверхностные теплоемкости. Примечательно, что $s_{e,h} = \frac{1}{2} c_{e,h}$ – энтропия носителей на единицу площади, так что первый член в левой части есть энтропийная сила, толкающая носители из горячей области в холодную. Решение этой системы относительно термо-ЭДС дает:

$$S = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2} \times \frac{(n_h - n_e)(c_h + c_e) \cdot \frac{\rho_{\text{av}}}{\tau_{\text{inter}}} + n_h c_h \frac{\rho_e}{\tau_{e-\text{ext}}} - n_e c_e \frac{\rho_h}{\tau_{h-\text{ext}}}}{(n_h - n_e)^2 \frac{\rho_{\text{av}}}{\tau_{\text{inter}}} + n_h^2 \frac{\rho_e}{\tau_{e-\text{ext}}} + n_e^2 \frac{\rho_h}{\tau_{h-\text{ext}}}}, \quad (6)$$

где введены обозначения для приведенной гидродинамической плотности $\rho_{\text{av}}^{-1} = \rho_e^{-1} + \rho_h^{-1}$ и полной частоты межчастичных столкновений $\tau_{\text{inter}}^{-1} = (\tau_{e-h}^{\text{tr}})^{-1} + (\tau_{h-e}^{\text{tr}})^{-1}$. Отношение времен рассеяния $r = \tau_{\text{ext}}/\tau_{\text{inter}}$, являющееся числом межчастичных столкновений на один акт внешнего рассеяния,

служит, таким образом, безразмерной силой e - h -взаимодействия: при $r \gg 1$ столкновения между частицами разного сорта доминируют над рассеянием на примесях и фононах, переводя систему в гидродинамический режим, тогда как $r \ll 1$ описывает обычный диффузионный перенос.

Уравнение (6) естественным образом воспроизводит основные транспортные пределы. Вдали от точки Дирака ($|\mu| \gg k_B T$), где доминирует один тип носителей и межчастичное увлечение исчезает, разложение Зоммерфельда восстанавливает классический однополярный гидродинамический предел:

$$S_{e,h}^{\text{mono}} = \mp \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{2} \frac{c_{e,h}}{n_{e,h}} \approx -\frac{2\pi^2 k_B}{3e} \cdot \frac{k_B T}{\mu}. \quad (7)$$

Аналогично, когда межчастичное рассеяние много слабее внешнего ($\tau_{\text{inter}} \gg \tau_{\text{ext}}$), система распадается на две несвязанные жидкости, определяя базовую термо-ЭДС:

$$S^{\text{weak}} = \frac{\sigma_e^{\text{weak}} \cdot S_e^{\text{mono}} + \sigma_h^{\text{weak}} \cdot S_h^{\text{mono}}}{\sigma_e^{\text{weak}} + \sigma_h^{\text{weak}}}, \quad (8)$$

с индивидуальными электропроводностями $\sigma_{e,h}^{\text{weak}} = n_{e,h} e^2 \tau_{\{e,h\}-\text{ext}} / M_{e,h}^{hd}$. Напротив, в ультрагидродинамическом пределе ($\tau_{\text{inter}} \ll \tau_{\text{ext}}$) вблизи точки зарядовой нейтральности термо-ЭДС становится независимой от времен столкновений и гиперболически масштабируется со сдвигом по энергии $\Delta\mu$:

$$S^{\text{strong}}(\Delta\mu) \approx -\frac{k_B}{e} \cdot \frac{\frac{M_0^{hd} v_F^2}{2} \cdot \frac{M_0^k v_F^2}{2}}{k_B T \cdot \Delta\mu}, \quad (9)$$

где нижний индекс “0” обозначает вычисление точно в точке зарядовой нейтральности; $M_0^{hd}v_F^2/2$, $M_0^k v_F^2/2 \sim k_B T$.

Зависимость S от концентрации носителей $n(\mu) = n_e(\mu) - n_h(\mu)$ – величины, непосредственно управляемой затворным напряжением, – при различных силах электрон-дырочного рассеяния r (для времен рассеяния, вычисленных при $\mu = 0$) показана на рис. 1а. Здесь мы сравниваем ее с диффузионным результатом для рассеяния на акустических фононах – $S^{\text{diff}} \equiv 0$; нулевая термо-ЭДС следует из энергетической зависимости времени рассеяния на акустических фононах [27]. Более сильное межчастичное рассеяние приближает термо-ЭДС к гиперболическому профилю (9) и сдвигает положение пика ближе к точке Дирака. При $r > 1$ отслеживание положения этого пика μ_{peak} и его максимального значения S_{peak} дает корневой закон масштабирования:

$$\mu_{\text{peak}} \approx \pm \frac{M_0^k v_F^2}{2} \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad S_{\text{peak}} \rightarrow \mp \frac{k_B}{e} \cdot \frac{M_0^{hd} v_F^2}{2 \cdot k_B T} \sqrt{r}. \quad (10)$$

Это приближение и точные пиковые значения изображены на рис. 2. В противоположном пределе невзаимодействующих жидкостей ($r \rightarrow 0$) термо-ЭДС достигает универсального экстремума $S_{\text{peak}}^{\text{weak}} \approx \pm 1.73 k_B/e$ при $\mu_{\text{peak}} \approx \pm 1.94 k_B T$.

Гидродинамический подход применим также для теплопроводности κ , которая рассчитывается как:

$$\kappa = \frac{1}{e} (M_e^{hd} + M_h^{hd}) v_F^2 \cdot \frac{S_h - S_e}{\sigma_h^{-1} + \sigma_e^{-1}}. \quad (11)$$

Выражения для линейных коэффициентов S_{ext} и S_{e-h} , микроскопические определения времен рассеяния и полный вывод уравнений (5), (6), (11) приведены в разделах I и II Дополнительного материала.

Как показано на рис. 1b, наша модель воспроизводит сильное нарушение закона Видемана–Франца вблизи зарядовой нейтральности, согласующееся с экспериментальными наблюдениями. Повышение относительной силы электрон-дырочного взаимодействия за счет увеличения τ_{ext} приводит к росту пикового значения κ в точке Дирака. Принципиально, что κ тождественно обращается в нуль в однополярном одножидкостном пределе: поскольку неравновесные гидродинамические поправки к распределению строго пропорциональны дрейфовой скорости носителей $\delta \mathbf{u}$, поток тепла становится полностью конвективным ($\mathbf{j}^Q \propto \mathbf{j}$), подавляя чистую тепловую диффузию. Наконец, в отличие от инвариантной к способу масштабирования термо-

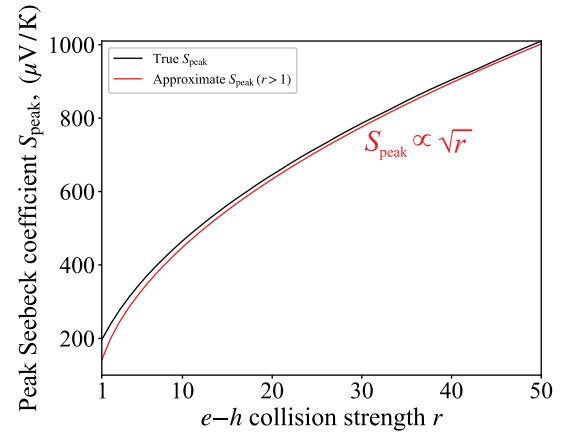


Рис. 2. (Цветной онлайн) Пиковый коэффициент Зеебека как функция безразмерной силы e - h -взаимодействия r при 300 К. Точные максимальные значения, полученные из гидродинамической модели (черная линия), сравниваются с аналитическим корневым приближением ($S_{\text{peak}} \propto \sqrt{r}$), справедливым в режиме сильного e - h -рассеяния ($r > 1$) (красная линия)

ЭДС S , κ зависит от абсолютных значений времен релаксации τ_{inter} , τ_{ext} , подобно электропроводности σ . Следовательно, изменение отношения частот путем усиления межчастичного рассеяния и путем ослабления внешних столкновений приводит к различным физическим результатам. Мы выбрали τ_{ext} в качестве варьируемого параметра, поскольку управление внешним рассеянием физически более осуществимо.

Стоит отметить, что электрон-дырочная симметрия представленных кривых является следствием предположения о коническом спектре, которое является приближением. Зонная асимметрия реального графена (скорости электронов и дырок различаются на $\sim 5\%$ при $\mu \sim 100$ мэВ от точки Дирака [28]) лишь слабо их возмущает, сдвигая точку зарядовой нейтральности и положения пиков при сохранении роста как $\sqrt{r}$ (см. раздел III Дополнительного материала).

В. Термо-ЭДС на гидродинамическо-диффузионном переходе: подход ОПВР. Хотя чисто гидродинамическая модель воспроизводит правильные порядки величин, она требует сверхбыстрых столкновений между частицами одного сорта, из-за чего в ней получаются завышенные пиковые значения S в переходных режимах, приближающихся к диффузионному пределу. Чтобы описать этот переход, мы применяем ОПВР, вводя модельные интегралы столкновений для правой части кинетических уравнений [29]:

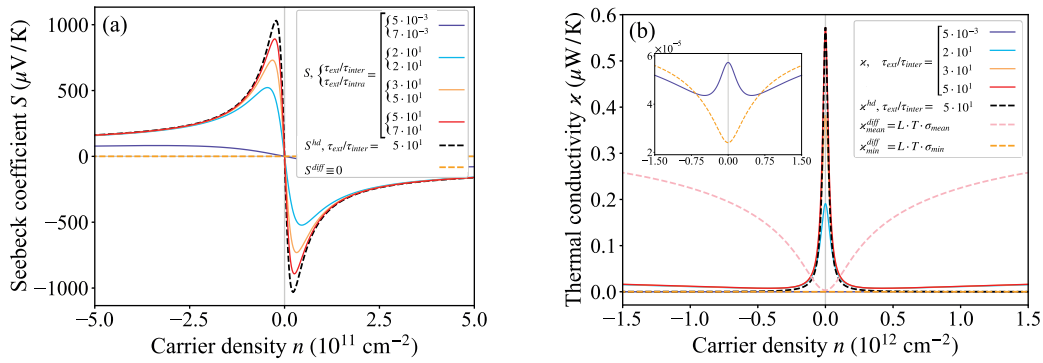


Рис. 3. (Цветной онлайн) Термоэлектрические свойства графена, вычисленные в обобщенном приближении времени релаксации (ОПВР) при 300 К. (а) – Коэффициент Зеебека $S(n)$ при различных силах $e-h$ - ($\tau_{\text{ext}}/\tau_{\text{inter}}$) и $e-e$ - ($\tau_{\text{ext}}/\tau_{\text{intra}}$) взаимодействиях. Изменение достигается управлением временем внешнего рассеяния τ_{ext} . Результаты ОПВР сравниваются с чисто гидродинамическим пределом (S^{hd} , черный пунктир) и чисто диффузионным пределом ($S^{diff} \equiv 0$, оранжевый пунктир). (б) – Теплопроводность $\kappa(n)$ на том же диапазоне. Данный подход интерполирует между гидродинамическим пределом (κ^{hd} , черный пунктир) и диффузионным пределом, подчиняющимся закону Видемана–Франца (κ^{diff}), построенным как для средней, так и для минимальной электропроводности на рассматриваемом интервале τ_{ext} (розовый и оранжевый пунктир соответственно). На вставке показан профиль теплопроводности глубоко в диффузионном режиме

$$C_{e-\text{ext}}[f_e] = -\frac{\delta f_e}{\tau_{e-\text{ext}}}, \quad C_{e-e}[f_e] = -\frac{\delta f_e - \delta f_e^{hd}}{\tau_{e-e}}, \quad (12)$$

$$C_{e-h}[f_e, f_h] = -\frac{\delta f_e - \delta f_e^{hd}}{\tau_{e-h}} - \frac{\delta f_e^{hd} - \delta f_{e-h}^{hd}}{\tau_{e-h}^{\text{tr}}},$$

где δf_e^{hd} задается выражением (2), а $\delta f_{e-h}^{hd} = -(\partial f_e^0 / \partial \mathcal{E}) \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u}_h$. Для дырок справедливы симметричные выражения. С установленной правой частью кинетических уравнений легко находятся неравновесные поправки к распределениям $\delta f_{e,h}$ через внешние поля ∇V , ∇T и $\delta \mathbf{u}_{e,h}$ из (1).

Данный подход обладает двумя существенными преимуществами. Во-первых, он естественным образом восстанавливает чисто гидродинамический режим, когда доминируют $e-e$ - и $h-h$ -столкновения ($\tau_{e-e} \ll \tau_{e-h}, \tau_{e-\text{ext}}$). Во-вторых, $e-h$ -член описывает как релаксацию к гидродинамическому профилю (через время рассеяния τ_{e-h}), так и взаимное трение, стремящееся выровнять между собой электронную и дырочную жидкости (через транспортное время τ_{e-h}^{tr}). Эти транспортные времена фундаментально связаны законом сохранения суммарного импульса в электрон-дырочных столкновениях: $\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} (C_{e-h}[f_e, f_h] + C_{h-e}[f_h, f_e]) = 0$, откуда следует $\rho_e / \tau_{e-h}^{\text{tr}} = \rho_h / \tau_{h-e}^{\text{tr}}$. Это объясняет выбор τ_{e-h}^{tr} в качестве параметра, описывающего электрон-дырочное взаимодействие, сделанный нами в разделе III А.

Более того, наложение закона сохранения импульса при столкновениях между частицами одного типа ($\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \cdot C_{e-e, h-h} = 0$) требует, чтобы истинные

поправки к распределениям $\delta f_{e,h}$ и гидродинамические возмущения $\delta f_{e,h}^{hd}$ несли в точности одинаковый суммарный импульс. В результате это ограничение порождает макроскопическую систему, структурно идентичную гидродинамическим уравнениям Эйлера (5); однако $\delta \mathbf{u}_{e,h}$ в подходе ОПВР – не макроскопические дрейфовые скорости, а лишь некоторые параметры распределений. Для извлечения коэффициентов переноса мы подставляем полученные неравновесные функции распределения $\delta f_{e,h}$, дополненные системой (5), в определения электрического и теплового потоков, получая тем самым аналитические выражения для коэффициента Зеебека и теплопроводности.

Ввиду громоздкости получающихся выражений для S и κ мы опускаем здесь их полные аналитические формы. Их поведение как функций концентрации носителей n изображено на рис. 3. Аналогично гидродинамической модели, усиление электрон-дырочного рассеяния (которое мы вновь достигаем увеличением τ_{ext}) повышает значение термо-ЭДС вблизи зарядовой нейтральности. Для сильно вырожденной системы ($|\mu|/(k_B T) \gg 1$) S сходится к однополярному гидродинамическому пределу, если доминирует рассеяние частиц одного типа, или подавляется к диффузионному пределу, если преобладает внешнее рассеяние. В целом подход ОПВР обеспечивает плавную интерполяцию как для S , так и для κ между диффузионным и гидродинамическим пределами. Примечательно, что расчеты теплопроводности выявляют выраженное отклонение от закона

Видемана–Франца вблизи зарядовой нейтральности даже при доминировании внешнего рассеяния (фиолетовая кривая).

Транспортные времена τ_{e-ext} и τ_{e-h}^{tr} фиксируются первыми моментами микроскопических интегралов столкновений и совпадают с временами из раздела III A. Специфичные для ОПВР времена τ_{e-e} и τ_{e-h} оцениваются как времена жизни квазичастиц по золотому правилу Ферми [30, 31]; τ_{e-e} также может быть извлечено экспериментально [32]. Основным сделанным нами упрощением было рассмотрение этих параметров как констант по импульсу. Хотя импульсная независимость времен взаимного рассеяния носителей не влияет на приближение к гидродинамическому режиму, частоты внешних столкновений должны зависеть от импульса. Именно это является ключевой причиной расхождения между нашей моделью и строгим диффузионным пределом ($S^{diff} \equiv 0$). Такой расчет не представляет принципиальной проблемы и может быть выполнен численно (в этом случае закон сохранения импульса при столкновениях частиц одного типа уже не сводился бы к системе (5)).

С. Проявления e - h -рассеяния в фотоотклике графеновых переходов. Фотонапряжение в графеновых p - n -переходах возникает главным образом за счет фототермоэлектрического эффекта, т.е. нагрева носителей заряда светом, дрейфа заряда в возникающих градиентах температуры и накопления заряда на контактах. По этой причине предсказанные изменения термо-ЭДС S и теплопроводности κ , вызванные рассеянием носителей, должны проявляться в величине чувствительности фотодетектора. Тепловой шум p - n -перехода зависит от сопротивления, на которое, в свою очередь, также влияет e - h -рассеяние. Ниже мы явно вычисляем чувствительность и отношение сигнал/шум графеновых переходов с учетом межчастичного рассеяния.

Типичная структура фотодетектора на p - n -переходе показана на рис.4. Области с противоположным типом проводимости обычно создаются приложением затворного напряжения. Падающий свет нагревает носители заряда, температура $T(x)$ которых определяется тепловой диффузией к холодным металлическим выводам и охлаждением за счет испускания фононов подложки. Обозначая температуру перехода в середине канала как T_{max} , а температуру металлического контакта как T_0 , термоэлектрическое напряжение записывается в виде:

$$V_{ph} = (S_p - S_n)(T_{max} - T_0). \quad (13)$$

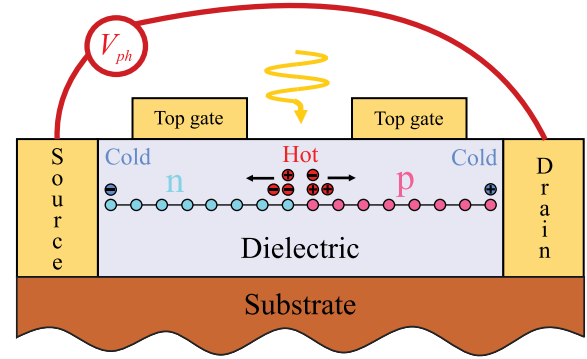


Рис. 4. (Цветной онлайн) Схематическое изображение фототермоэлектрического детектора на основе графена. Устройство представляет собой p - n -переход, в котором падающее излучение (P_{inc}) генерирует локализованные горячие носители. Это оптическое поглощение нагревает центральную область перехода до пиковой температуры T_{max} , тогда как внешние контакты остаются термализованными при температуре окружающей среды T_0 . Возникающий градиент температуры создает измеримое фототермоэлектрическое напряжение V_{ph} на устройстве

Максимизация V_{ph} достигается при противоположных уровнях Ферми в n - и p -областях, что соответствует $S_p = -S_n \equiv S$. Такая симметричная ситуация будет далее представлять для нас центральный интерес.

Для оценки величины нагрева T_{max} при заданной поглощенной электромагнитной мощности на единицу площади p_{abs} мы применяем модель теплопереноса, основанную на следующих предположениях: (1) электромагнитная мощность поглощается равномерно по переходу длины L ; (2) потоки тепла, переносимые электронами и дырками, равны $j_{e,h}^Q = -\kappa_{e,h} dT/dx$ с $\kappa_e = \kappa_h$ и направлены симметрично от горячего пятна к выводам; (3) потери тепла за счет испускания фононов подложки характеризуются временем охлаждения τ_{sub} , а скорость потерь равна $c[T(x) - T_0]/\tau_{sub}$, где $c = c_e + c_h$; (4) как подложка, так и контакты находятся при базовой температуре T_0 . Решение этой модели в симметричной конфигурации дает:

$$T_{max} - T_0 = \frac{\tau_{sub}}{c} p_{abs} \cdot \left[1 - \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{c}{\kappa \tau_{sub}}} \frac{L}{2} \right) \right]. \quad (14)$$

При больших значениях длины тепловой диффузии (слабом охлаждении через фононы подложки) температура обратно пропорциональна теплопроводности, $T_{max} - T_0 \approx P_{abs}/(8\kappa)$, здесь $P_{abs} = p_{abs}L^2$.

Восприимчивость перехода к падающему свету характеризуется вольт-ваттной чувствительностью

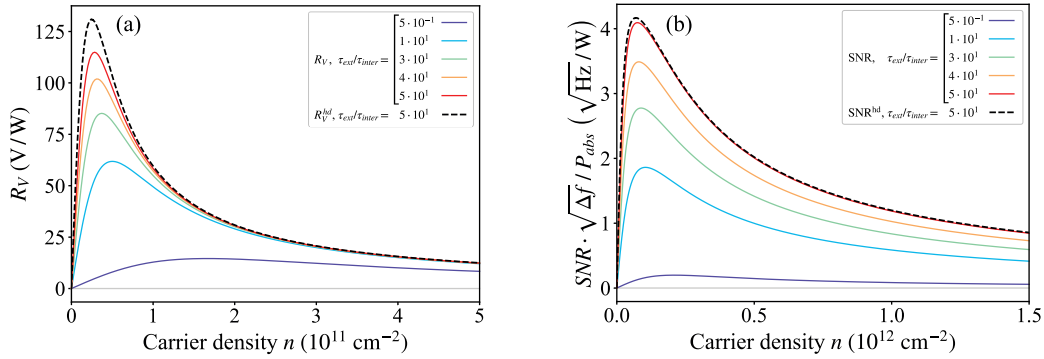


Рис. 5. (Цветной онлайн) Показатели качества фотодетектора как функции концентрации носителей при температуре окружающей среды 300 К. (а) – Вольт-ваттная чувствительность R_V и (б) – нормированное отношение сигнал/шум ($\text{SNR} \cdot \sqrt{\Delta f} / P_{\text{abs}}$) вычислены в предположении времени охлаждения в подложку $\tau_{\text{sub}} = 1$ пс и длины перехода $L = 10$ мкм. Кривые демонстрируют эффект при изменении безразмерной силы межчастичного взаимодействия $\tau_{\text{ext}}/\tau_{\text{inter}}$ путем управления внешним каналом рассеяния. Сплошные линии показывают результаты, полученные в обобщенном приближении времени релаксации (ОПВР), которые сравниваются с чисто гидродинамическим пределом (R_V^{hd} и SNR^{hd} , черные пунктирные линии) со сверхсильным межчастичным рассеянием

$R_V = V_{\text{ph}}/P_{\text{abs}}$, которая непосредственно вычисляется из уравнений (13) и (14) и построена на рис. 5а как функция концентрации носителей n . Различные цвета на рис. 5 соответствуют различным значениям силы межчастичного взаимодействия r . Время охлаждения принято равным $\tau_{\text{sub}} \sim 1$ пс, а длина структуры составляет $L = 10$ мкм. Наиболее примечательным свойством зависимости чувствительности $R_V(n)$ от силы e - h -рассеяния является ее резкий рост при переходе в гидродинамический режим: отклик демонстрирует семикратное увеличение при изменении $\tau_{\text{ext}}/\tau_{\text{inter}}$ от 0.5 до 5.0. Величина R_V более чувствительна к e - h -рассеянию, чем максимальная термо-ЭДС S_{max} , поскольку резкое уменьшение теплопроводности κ вдали от зарядовой нейтральности также вносит значительный вклад в фотоотклик.

В реальных экспериментах по детектированию света фотонапряжение всегда возникает на фоне шума, поэтому отношение сигнал/шум является наиболее подходящим показателем восприимчивости структуры. В отсутствие напряжения смещения среднеквадратичное напряжение шумов задается формулой Найквиста $V_{\text{noise}} = \sqrt{4k_B T_0 R \Delta f}$, где Δf – полоса частот, а R – сопротивление. Отношение сигнал/шум p - n -перехода с рис. 4 тем самым задается выражением

$$\text{SNR} = \frac{V_{\text{ph}}}{V_{\text{noise}}} = \frac{(S_p - S_n)(T_{\text{max}} - T_0)}{\sqrt{4k_B T_0 R \Delta f}}, \quad (15)$$

оно отражает влияние электрон-дырочного рассеяния на все три термоэлектрические характеристики S , κ и R . Отношение сигнал/шум (15) как функция концентрации носителей построено на рис. 5б. Оно также выигрывает от перехода в гидродинамический

режим, и наши расчеты показывают, что SNR испытывает примерно 20-кратное увеличение в том же диапазоне отношений времен рассеяния. Причина того, что SNR возрастает даже сильнее, чем R_V , кроется в нетривиальном поведении шума – его величина, как оказалось, убывает с ростом r , так что SNR вдвойне выигрывает от этого перехода. Такое специфическое поведение шума является прямым следствием масштабирования r через увеличение τ_{ext} , а не через уменьшение τ_{e-h}^{tr} . Как следствие, такое масштабирование шума приводит к тому, что оптимальное легирование n^* для максимизации SNR смещается дальше от зарядовой нейтральности, чем оптимумы для $S(n)$ и $R_V(n)$. Это упрощает экспериментальное наблюдение усиленного отношения сигнал/шум, поскольку приближению к зарядовой нейтральности препятствуют электрон-дырочные “лужи”.

IV. Обсуждение и выводы. В заключение, мы показали, что рассеяние между носителями заряда в графене сильно влияет на его термо-ЭДС и теплопроводность. Параметром, управляющим этими изменениями, является безразмерная сила межчастичного взаимодействия r : отношение времени рассеяния на внешних агентах (примесях и фононах) τ_{ext} к времени электрон-дырочного рассеяния τ_{inter} , $r = \tau_{\text{ext}}/\tau_{\text{inter}}$. Пиковое значение термо-ЭДС S_{max} масштабируется как $r^{1/2}$ и достигается при $\mu \sim k_B T / r^{1/2}$. Для теплопроводности сильно нарушается закон Видемана–Франца, она стремится к нулю вдали от зарядовой нейтральности в ультрагидродинамическом режиме, а при промежуточных r демонстрирует симметричный минимум возле зарядовой нейтральности.

Хотя экспериментальные проявления электрон-дырочного рассеяния и увлечения в сопротивлении, зависящем от концентрации носителей, уже сообщались [20], прямых измерений S в сильном гидродинамическом режиме не существует. Предыдущие измерения S на диффузионно-гидродинамическом переходе [8] опирались на варьирование температуры, что ограничивало доступное окно значений r : при больших температурах рассеяние на оптических фононах подавляло межчастичное рассеяние. Перспективный способ наблюдения предсказанной зависимости $S(r)$ заключается в динамической активации ловушек в инкапсулирующем диэлектрике, реализованной в [33]. Существуют сильные косвенные экспериментальные свидетельства увеличения S вблизи зарядовой нейтральности в наиболее чистых образцах графена. В частности, в работе [7] сообщалось о значениях S до 300 мкВ/К, что значительно превышает предсказания невзаимодействующих теорий. Тем не менее этот результат опирается на применение соотношения Мотта к зависящей от концентрации проводимости, а не на прямое измерение термоэлектрического напряжения при известном градиенте температуры.

Хотя наша теория использует симметричный электрон-дырочный спектр графена, усиленная термо-ЭДС фундаментально возникает из самого наличия e - h -рассеяния. Усиление должно иметь место и в узкозонных полупроводниках с произвольными электрон-дырочными спектрами, таких как квантовые ямы на основе теллурида кадмия-ртути [34, 35], структуры скрученного двухслойного графена [36] и сверхрешетки графен-нитрид бора с наведенными запрещенными зонами [37]. В частности, двумерные полуметаллы на основе HgCdTe обладают почти линейными, но электрон-дырочно-асимметричными спектрами и могут приближенно описываться как дираковская жидкость с неравными фермиевскими скоростями электронов и дырок. Мы построили такую двухжидкостную модель и убедились, что усиление коэффициента Зеебека сильным электрон-дырочным рассеянием сохраняется, тогда как зонная асимметрия приводит к смещению точки зарядовой нейтральности к ненулевому легированию и к небольшому смещению пиков термо-ЭДС (эти вычисления можно найти в разделе III Дополнительного материала). Оптическое возбуждение электрон-дырочных пар [38, 39] представляет собой еще один многообещающий инструмент усиления e - h -рассеяния и связанного с ним роста термо-ЭДС.

Наши результаты завершают картину термо-ЭДС в графене при переменной концентрации примесей.

Предел исчезающего межчастичного рассеяния был изучен в [40], где было показано, что S стремится к нулю при очень большой концентрации примесей вследствие самоусреднения электронных и дырочных “луж”. При низкой концентрации примесей, когда рассеяние на фононах доминирует над рассеянием на примесях, невзаимодействующая теория предсказывает заметное уменьшение S . Это происходит из-за независимости коэффициента диффузии носителей заряда от энергии при рассеянии на акустических фононах через деформационный потенциал. Здесь мы показываем, что частоту рассеяния на примесях следует сравнивать не только с частотой рассеяния на фононах, но и с частотой электрон-дырочного рассеяния. Как только последняя начинает доминировать, термо-ЭДС должна вновь возрасти, особенно вблизи зарядовой нейтральности.

Финансирование работы. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект # 21-79-20225-П.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

1. K. C. Fong, E. E. Wollman, H. Ravi, W. Chen, A. A. Clerk, M. D. Shaw, H. G. Leduc, and K. C. Schwab, Measurement of the Electronic Thermal Conductance Channels and Heat Capacity of Graphene at Low Temperature, *Physical Review X* **3**, 041008 (2013).
2. D. Brida, A. Tomadin, C. Manzoni, Y. J. Kim, A. Lombardo, S. Milana, R. R. Nair, K. S. Novoselov, A. C. Ferrari, G. Cerullo, and M. Polini, “Ultrafast collinear scattering and carrier multiplication in graphene”, *Nat. Commun.* **4**, 1987 (2013).
3. T. Low, V. Perebeinos, R. Kim, M. Freitag, and P. Avouris, “Cooling of photoexcited carriers in graphene by internal and substrate phonons”, *Physical Review B* **86**, 045413 (2012).
4. M. Massicotte, G. Soavi, A. Principi, and K. J. Tielrooij, “Hot carriers in graphene-fundamentals and applications”, *Nanoscale* **13**, 8376 (2021).
5. Y. M. Zuev, W. Chang, and P. Kim, “Thermoelectric and Magnetothermoelectric Transport Measurements of Graphene”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 096807 (2009); 0812.1393.
6. N. M. Gabor, J. C. Song, Q. Ma, N. L. Nair, T. Taychatanapat, K. Watanabe, T. Taniguchi, L. S. Levitov, and P. Jarillo-Herrero, “Hot carrier-assisted intrinsic photoresponse in graphene”, *Science* **334**, 648 (2011).
7. K. P. Soundarapandian, A. Montanaro, I. Vangelidis et al. (Collaboration), “C-band 160 gbs-1 zero-bias graphene photodetectors: Breaking the responsivity-

- bandwidth trade-off by heterostructure engineering”, arXiv preprint arXiv:2605.23627 (2026).
8. F. Ghahari, H.-Y. Xie, T. Taniguchi, K. Watanabe, M.S. Foster, and P. Kim, “Enhanced Thermoelectric Power in Graphene: Violation of the Mott Relation by Inelastic Scattering”, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 136802 (2016); arXiv:1601.05859.
 9. N.W. Ashcroft and N.D. Mermin, *Solid state physics* (1976).
 10. H.J. Goldsmid and J.W. Sharp, “Estimation of the thermal band gap of a semiconductor from seebeck measurements”, *J. Electron. Mater.* **28**, 869 (1999).
 11. A. Principi and G. Vignale, “Violation of the Wiedemann-Franz Law in Hydrodynamic Electron Liquids”, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 056603 (2015); 1406.2940.
 12. T.I. Andersen, T.B. Smith, and A. Principi, “Enhanced photoenergy harvesting and extreme thomson effect in hydrodynamic electronic systems”, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 166802 (2019).
 13. H.-Y. Xie and M.S. Foster, “Transport coefficients of graphene: Interplay of impurity scattering, Coulomb interaction, and optical phonons”, *Phys. Rev. B* **93**, 195103 (2016); 1601.05862.
 14. M. Müller, L. Fritz, and S. Sachdev, “Quantum-critical relativistic magnetotransport in graphene”, *Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics* **78**, 115406 (2008).
 15. M.S. Foster and I.L. Aleiner, “Slow imbalance relaxation and thermoelectric transport in graphene”, *Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics* **79**, 085415 (2009).
 16. S.O. Potashin, L.E. Golub, and V.Y. Kachorovskii, “Thermoelectric and viscous contributions to the hydrodynamic ratchet effect”, *Phys. Rev. B* **111**, 205401 (2025).
 17. D.A. Svintsov, V.V. Vyurkov, S.N. Yurchenko, and V.I. Ryzhii, “Hydrodynamic model for electron-hole plasma in graphene”, *J. Appl. Phys.* **111**, 083715 (2012).
 18. G. Wagner, D.X. Nguyen, and S.H. Simon, “Transport in Bilayer Graphene near Charge Neutrality: Which Scattering Mechanisms Are Important”, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 026601 (2020).
 19. Y. Nam, D.-K. Ki, D. Soler-Delgado, and A.F. Morpurgo, “Electron-hole collision limited transport in charge-neutral bilayer graphene”, *Nat. Phys.* **13**, 1207 (2017).
 20. L.A. Ponomarenko, A. Principi, A.D. Niblett, W. Wang, R.V. Gorbachev, P. Kumaravadivel, A.I. Berdyugin, A.V. Ermakov, S. Slizovskiy, K. Watanabe, T. Taniguchi, Q. Ge, V.I. Fal’ko, L. Eaves, M.T. Greenaway, and A.K. Geim, “Extreme electron-hole drag and negative mobility in the Dirac plasma of graphene”, *Nat. Commun.* **15**, 9869 (2024).
 21. J. Crossno, J.K. Shi, K. Wang, X. Liu, A. Harzheim, A. Lucas, S. Sachdev, P. Kim, T. Taniguchi, K. Watanabe, T.A. Ohki, and K.C. Fong, “Observation of the dirac fluid and the breakdown of the wiedemann-franz law in graphene”, *Science* **351**, 1058 (2016).
 22. A. Majumdar, N. Chadha, P. Pal, A. Gugnani, B. Ghawri, K. Watanabe, T. Taniguchi, S. Mukerjee, and A. Ghosh, “Universality in quantum critical flow of charge and heat in ultraclean graphene”, *Nature Physics* **21**, 1374 (2025); 2501.03193.
 23. M. Zarenia, A. Principi, and G. Vignale, “Disorder-enabled hydrodynamics of charge and heat transport in monolayer graphene”, *2D Materials* **6**, 035024 (2019).
 24. M. Zarenia, T.B. Smith, A. Principi, and G. Vignale, “Breakdown of the Wiedemann-Franz law in AB - stacked bilayer graphene”, *Phys. Rev. B* **99**, 161407 (2019); 1901.05077.
 25. K. Durczewski and M. Ausloos, “Inelastic-phonon-scattering effect on the behavior of the thermoelectric power of metals”, *Phys. Rev. B* **49**, 13215 (1994).
 26. A. Greenfield and N. Wiser, “Thermoelectric power and electrical resistivity of liquid zn and cd: Theory versus experiment”, *Phys. Lett. A* **32**, 69 (1970).
 27. F.T. Vasko and V.I. Ryzhii, “Voltage and temperature dependencies of conductivity in gated graphene”, *Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics* **76**, 233404 (2007).
 28. R. Deacon, K.-C. Chuang, R. Nicholas, K. Novoselov, and A. Geim, “Cyclotron resonance study of the electron and hole velocity in graphene monolayers”, *Physical Review B – Condensed Matter and Materials Physics* **76**, 081406 (2007).
 29. D.A. Svintsov, “Hydrodynamic-to-ballistic crossover in dirac materials”, *Phys. Rev. B* **97**, 121405 (2018).
 30. M. Schütt, P. Ostrovsky, I. Gornyi, and A. Mirlin, “Coulomb interaction in graphene: Relaxation rates and transport”, *Phys. Rev. B* **83**, 155441 (2011).
 31. Q. Li and S. Das Sarma, “Finite temperature inelastic mean free path and quasiparticle lifetime in graphene”, *Phys. Rev. B* **87**, 085406 (2013).
 32. R. Krishna Kumar, D.A. Bandurin, F.M.D. Pellegrino et al. (Collaboration), “Superballistic flow of viscous electron fluid through graphene constrictions”, *Nat. Phys.* **13**, 1182 (2017).
 33. A. Gugnani, A. Majumdar, K. Watanabe, T. Taniguchi, and A. Ghosh, “Dynamically tunable hydrodynamic transport in boron-nitride-encapsulated graphene”, *Phys. Rev. Lett.* **135**, 256501 (2025).
 34. Z.D. Kvon, E.B. Olshanetsky, D.A. Kozlov, E. Novik, N.N. Mikhailov, and S.A. Dvoretzky, “Two-dimensional semimetal in HgTe-based quantum wells”, *Low Temp. Phys.* **37**, 202 (2011).
 35. A.V. Snegirev, V.M. Kovalev, M.V. Entin, E.B. Olshanetsky, G.M. Gusev, N.N. Mikhailov,

- and Z.D. Kvon, “Interplay between electron-hole and impurity scattering in hgte-based quantum wells”, *Phys. Rev. Res.* **7**, 043169 (2025).
36. A.K. Paul, A. Ghosh, S. Chakraborty, U. Roy, R. Dutta, K. Watanabe, T. Taniguchi, A. Panda, A. Agarwala, S. Mukerjee, S. Banerjee, and A. Das, “Interactiondriven giant thermopower in magic-angle twisted bilayer graphene”, *Nat. Phys.* **18**, 691 (2022).
 37. L. Elesin, A.L. Shilov, S. Jana, I. Mazurenko, P.A. Pantaleon, M. Kashchenko, N. Krivovichev, V. Dremov, I. Gayduchenko, T. Taniguchi, K. Watanabe, Y. Wang, K.S. Novoselov, D.A. Svintsov, G. Goltsman, E.I. Titova, and D.A. Bandurin, “Enhanced Terahertz Thermoelectricity Via Engineered Van Hove Singularities and Nernst Effect in Moiré Superlattices”, *Adv. Funct. Mater.* **7**, 1 (2026).
 38. Y.A. Pusep, M.A.T. Patricio, M.M. Glazov, G.M. Jacobsen, M.D. Teodoro, G.M. Gusev, and A.K. Bakarov, “Hydrodynamics of electron-hole coulomb drag”, *Phys. Rev. Res.* **7**, 043062 (2025).
 39. Y.A. Pusep, M.D. Teodoro, V. Laurindo, E.R. Cardozo de Oliveira, G.M. Gusev, and A.K. Bakarov, “Diffusion of photoexcited holes in a viscous electron fluid”, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 136801 (2022).
 40. E.I. Nikulin, A.I. Chernov, and D.A. Svintsov, “Maximization of thermopower in optimally-disordered graphene”, *JETP Lett.* **122**, 757 (2025).