

Динамика мозаики квазикристаллов из двух решеток при скольжении одной решетки по другой

Л. А. Чернозатонский¹⁾, В. А. Данилин

Институт биохимической физики им. Эмануэля РАН, 119334 Москва, Россия

Поступила в редакцию 23 июня 2026 г.

После переработки 17 июля 2026 г.

Принята к публикации 17 июля 2026 г.

Рассматривается прыжковая динамика квазикристаллической мозаики, состоящей из двух гексагональных или квадратных решеток, повернутых друг относительно друга на 90° , при этом одна решетка совершает равномерное поступательное движение. Показано, что малые смещения этой решетки могут приводить к большим скачкам центра мозаики в “узловые” положения изначально неподвижной квазикристаллической мозаики, вызывая быстрые скачки, несмотря на равномерное медленное скольжение одной решетки по другой. Такое скольжение решетки в квазикристаллах, образованных двумерными атомными слоями, фотонными и фононными кристаллами – с их слабыми межслойными связями – позволяет использовать рассматриваемый эффект в различных приложениях элементов, включающих квазикристаллические структуры конечных размеров. Также отмечено, что при однонаправленном движении подвижной решетки скачки мозаики могут происходить в дискретные моменты времени не только в направлении ее движения, но и в противоположном направлении. При скачкообразном изменении мозаичного рисунка внутри квазикристаллического образца нарушается симметрия и расположение мозаичных элементов, что изменяет его физические дисперсионные свойства во время скачков и, как ожидается, приведет к импульсному поведению соответствующих электронных, фотонных и фононных характеристик образца.

DOI: 10.7868/S3034576626090115

Хорошо известно, что мозаичный рисунок квазикристалла определяет его вращательную структуру с плотным расположением плиток – плотно упакованных элементов в плоской мозаичной сетке, – на основе которой раскрываются его физические свойства. Это относится не только к объемным образцам квазикристаллов, впервые обнаруженным в [1], но и к так называемым двумерным (2D) многослойным квазикристаллам, созданным из атомных решеток [2, 3]. Их появление было связано с широким применением новых методов получения класса 2D материалов из атомов большого набора элементов периодической таблицы [4]. Графен, однослойный графит толщиной в один атом углерода, безусловно, занимает ведущее положение [5]. В последнее время начались исследования квазикристаллов на основе фононных [6], фотонных [7] и спиновых [8] решеток. Использование слабого взаимодействия таких 2D слоев между собой привело к появлению целого направления материаловедения – твистроники [9], в котором один слой может быть легко повернут относительно другого на заданный угол. Оказалось, что такие

“скрученные” материалы обладают не только широким спектром свойств [2–8], но и находят применение в различных нано- и микроустройствах.

Ранее динамические свойства двумерного атомного квазикристалла со скольжением одного из слоев рассматривались только с точки зрения сверхмалого трения [10]. Однако изменение картины мозаики квазикристалла при продольном движении одного из его слоев не рассматривалось. В последнее время внимание было обращено на изменение электронных свойств графенового квазикристалла конечного размера с различными смещениями его мозаичного центра вследствие смещения одного слоя [11, 12]. Здесь мы рассматриваем эффект быстрого изменения мозаичного рисунка псевдодвумерного двухслойного квазикристалла с низкой постоянной скоростью движения одного слоя.

Наиболее распространенными и изученными двумерными квазикристаллами являются структуры додекагонального типа из двух гексагональных решеток (рис. 1), впервые предложенные П. Стампли [13]. Широко теоретически исследуются квазикристаллы и октагонального типа [14]. Поэтому мы проводим рассмотрение примеров динамики мозаики

¹⁾e-mail: chernol-43@mail.ru

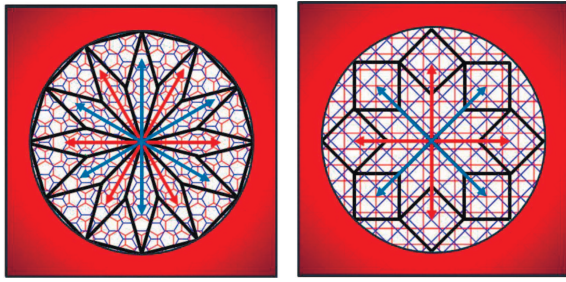


Рис. 1. (Цветной онлайн) “Роза” возможных направлений смещения слоев для sQC и hQC вдоль лучей, исходящих из центра квазикристалла под углами θ (красный) и ψ (синий). Жирные линии – стороны плиток соответствующей мозаики квазикристаллов

именно в таких двух типах квазикристаллов. Оно осуществляется на основе рассмотрения схемы неподвижной атомной и мозаичной структуры, которая характеризуется ее параметром P – длиной стороны равносторонних плиток, полностью заполняющих ее плоскость [13]. Нами показывается, что движение подвижной решетки вдоль оси симметрии квазикристалла с малой скоростью v на расстояниях ϵ меньше размера a его элементарной ячейки приводит к скачкообразному движению центра мозаики вдоль этой оси и в противоположном направлении со средней скоростью $V \gg v$ в интервале между двумя ближайшими скачками, когда подвижный центр мозаики проходит положения соседних узлов сетки фиксированной мозаики изначально стационарного квазикристаллического образца.

На примерах квазикристаллов из двух гексагональных или квадратных решеток (hQC или sQC) дан метод определения малого сдвига ϵ_i одного слоя при перемещении центра мозаики в положение узла мозаики, занимаемого в несмещенном квазикристалле. В принципе, используя этот метод, можно переместить в любую ячейку фиксированной решетки мозаику, но наибольшее ее перемещение с малым сдвигом решетки происходит только тогда, когда центр изначально несмещенного квазикристалла перемещается в узлы мозаики. В данной работе величина сдвига ϵ_i рассчитывается как: $\epsilon_{i(\psi)} = |\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|$, где $\epsilon_{i(\psi)}$ – значение ϵ_i для i -го узла вдоль направления мозаики ψ , $\mathbf{r}_m$ – вектор от центра мозаики до центра m -й ячейки нижнего слоя, и $\mathbf{r}_n$ – вектор от центра мозаики до центра n -й ячейки верхнего слоя в плоскости, в которой выровнены обе решетки [15].

В зависимости от направлений движения подвижной верхней решетки под углами $\theta = 0, 60, 120, 180, 240, 300^\circ$ (нижняя решетка типа “зигзаг”) или $\psi = 30, 90, 150, 210, 270, 330^\circ$ (нижняя решетка типа “кресло”) будут разные параметры сдвига, возникаю-

щие из-за 6-кратной симметрии гексагонального квазикристалла. В случае квадратных квазикристаллов будет 4-кратная симметрия и направления $\theta = 0, 90, 180, 270^\circ$ и $\psi = 45, 135, 225, 315^\circ$. В двуатомных материалах порядок симметрии двухслойного квазикристалла сводится к 3-му (в hQC) или 2-му (sQC) [16]. В данной статье мы рассматриваем смещения ϵ_i только относительно оси 0° (поскольку результаты применимы к направлениям, симметричным ему), поэтому в дальнейшем индекс (ψ) будет опущен, но метод применим и к любым другим направлениям.

Квазикристалл из гексагональных решеток. Рассмотрим сначала эффект для квазикристалла, состоящего из гексагональных решеток (hQC), в схеме плоской модели мозаики П. Стамфли на примере смещений центра hQC вдоль выбранной оси симметрии (рис. 1). Из всех возможных направлений движения верхней (синей) решетки вдоль нижней (красной) была выбрана ось симметрии QC (ось X зигзагообразной полосы фиксированной решетки), вдоль которой будет происходить движение мозаики из ее первоначального расположения (рис. 2). На оси симметрии расположены и пронумерованы узлы ее сетки на расстоянии D от центра мозаики, определяемом величиной, кратной параметру a ЭЯ гексагональной решетки [13, 16]. Мозаика образована ромбическими, квадратными и треугольными плитками со стороной длиной P .

Перемещение центра QC на расстояния D_i от его исходного стационарного положения во время равномерного движения “синей” решетки происходит скачками вдоль узлов; эти скачки в сотни раз превышают смещение движущейся решетки. Мозаичные скачки обычно происходят попеременно в прямом направлении ($D_i > 0$) и в направлении, противоположном постоянному движению верхней решетки, когда смещенный центр QC перескакивает в следующий узел. Зная значения D_i и ϵ_i , мы можем определить время достижения каждого i -го узла как $\tau_i = \left| \frac{\epsilon_i}{v} \right|$. Определив время между i -м и j -м (следующим узлом в табл. 1) переходами узла $\tau_{i,j}$, мы находим среднюю скорость перемещения смещенного центра QC $V_i = v \frac{D_{i,j}}{\epsilon_{i,j}}$ во время этого прыжка $D_{i,j} = D_j - D_i$ (табл. 1), где $\epsilon_{i,j} = \epsilon_j - \epsilon_i$.

Средняя скорость – это смещение центра мозаики на определенное расстояние, происходящее за интервал времени, соответствующий двум последовательным “остановкам”.

Используя метод [16], мы вычисляем точки “остановок” мозаичного центра QC и соответствующие средние скорости его перемещения между соседними “остановками” D_i и D_j .

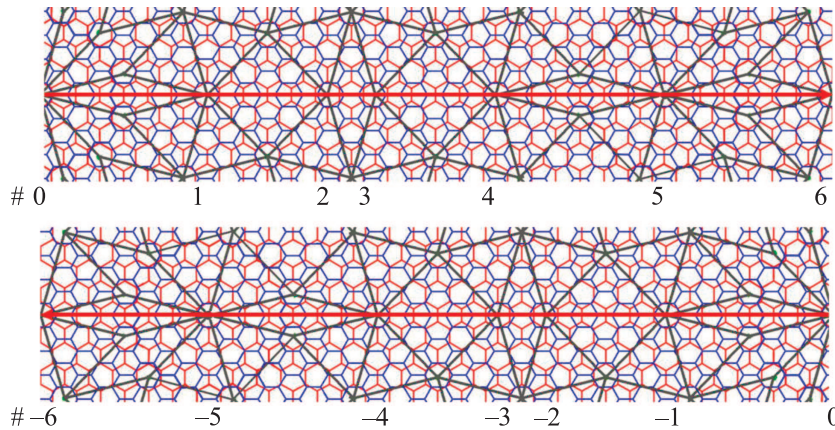


Рис. 2. (Цветной онлайн) Схематическое изображение мозаичной сетки квазикристалла, составленной из гексагональных решеток со смещенным центром QC (0) на оси X , вдоль которой номерами обозначены узлы мозаики – центры ЭЯ “зигзажной” гексагональной полосы неподвижной красной решетки. Гексагоны подвижной синей решетки расположены в виде полосы типа “кресло”

Помимо прыжков в узлы в том же направлении, что и смещения подвижного слоя, для (табл. 1, правая колонка), часть прыжков возникает и при обратном направлении к предыдущему скачку. В этом случае значения такого “обратного” скачка оказываются того же порядка величины, что и при скачке вперед.

Таблица 1. Параметры эффекта для квазикристалла, состоящего из гексагональных решеток. D_i – расстояния от центра QC до i -го узла в стационарной мозаике, $\varepsilon_i(a)$ – величина смещения слоя в направлении вперед, $\#$ – номер узла, V_i – средняя скорость перехода в этот узел из предыдущего узла (значения округлены до целых чисел)

$D_i(a)$	$\varepsilon_i(a)$	$\#$	V_i
71	0.014	13	5071v
45	0.033	8	–1368v
116	0.047	22	5071v
19	0.053	4	–16166v
90	0.067	17	5071v
64	0.086	12	–1368v
38	0.105	7	–1368v
109	0.119	20	5071v
12	0.124	2	–19400v
83	0.138	15	5071v
57	0.158	10	–1300v

Для достижения некоторых узлов в области $X > 0$ необходимо равномерно сдвинуть решетку в противоположном направлении $X < 0$. В этом случае значения средней скорости V_i при скачке назад имеют тот же порядок, что и при движении вперед.

Мы использовали метод построения решетки узлов “основной” мозаики, описанный в [13]. Каждый узел имеет свои собственные две центральные точки

гексагонов решеток, разделенных величиной ε_i внутри “узловое кольцо” в планарной схеме атомной QC структуры П. Стампфли. Однако только в центре мозаики QC (узел 0) эти две точки совпадают, а во всех остальных узлах они не совпадают. Из рисунка 3 видно, что после сдвига ε_i подвижной решетки новый сдвинутый QC центр занимает положение $-i$ -го узла, в то время как i -й узел смещенной мозаики занимает первоначальное место центра (ось Y является осью симметрии, поэтому узлы в направлении $X < 0$ расположены зеркально-симметрично относительно нее). Таким образом, можно рассматривать изменения свойств “подвижного” конечного размера квазикристалла с одной движущейся решеткой в конечной области исходного центра QC мозаики (рис. 3).

Первоначальная мозаика с центром находится в месте 0 (рис. 3а). “Перемещенная” мозаика при определенном заданном сдвиге ε_i одной решетки (верхняя “синяя” решетка на рис. 3б, в) имеет новый смещенный QC центр, расположенный в месте i -го узла исходной мозаики. Затем “ $-i$ -й” узел “перемещенной” мозаики появляется на месте 0-узла в центре ЭЯ закрепленной решетки (нижняя “красная” решетка на рис. 3), т.е. происходит необычная “рокировка” мозаик. При одном и том же направлении движения подвижной решетки мозаичные скачки могут происходить в двух направлениях, как вдоль движения этой решетки, так и в противоположном направлении.

На рисунке 4 показаны графики $D(T)$ и средних скоростей (в безразмерных единицах, где $T = \tau_a^v$ и $V = \frac{V_i}{v}$, а $V > 0$ есть скорость скачка, направленная вдоль X -оси) во время движения “синей” ре-

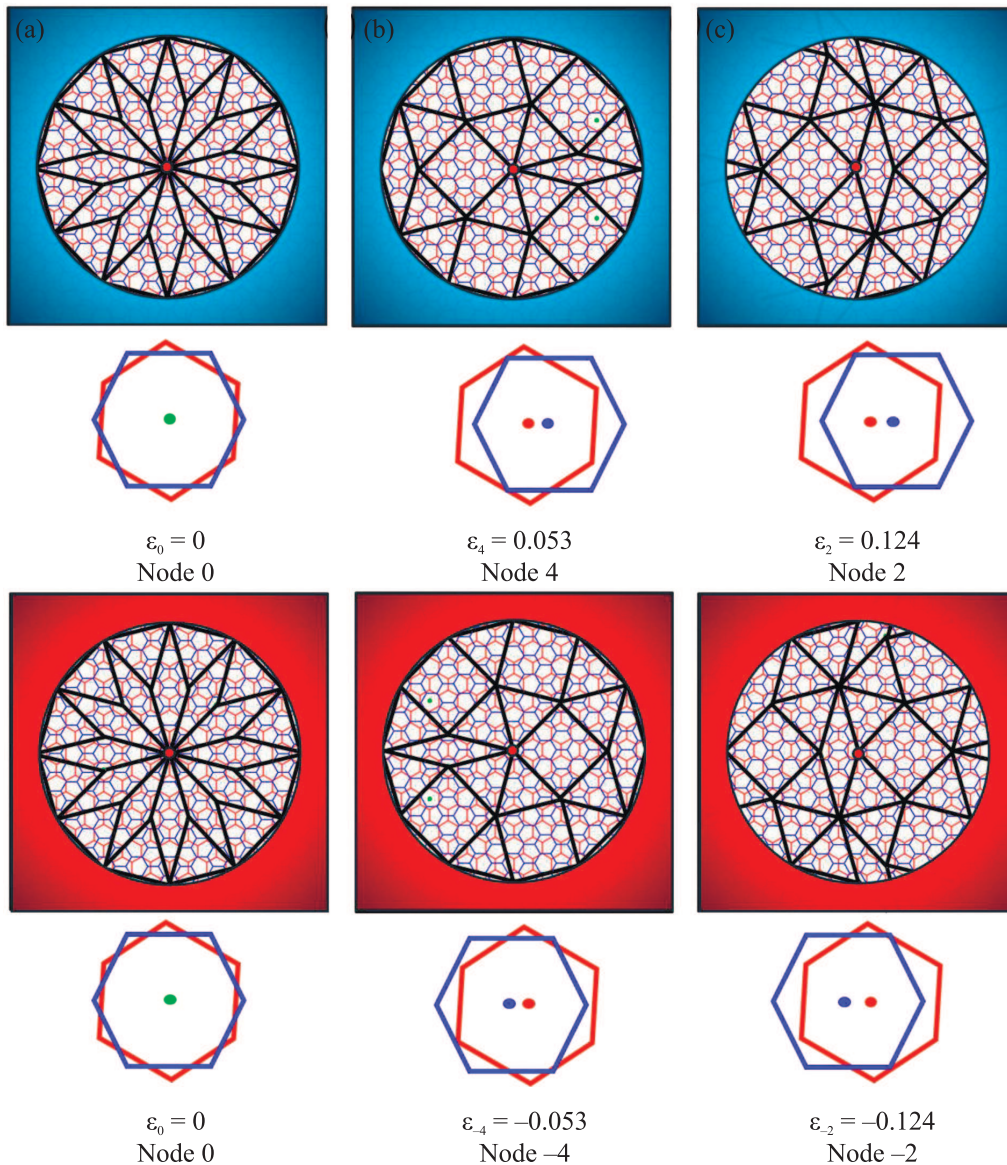


Рис. 3. (Цветной онлайн) Примеры изменения картины сетки мозаики QC при небольшом смещении подвижной “синей” решетки: вблизи центра исходной мозаичной структуры в окне синей панели появляются узлы -4 и -2 , или в окнах красной панели отслеживается положение, в котором QC центр перескакивает с узла 0 на узел 4 и с узла 0 на узел 2

сетки вдоль оси X (рис. 1). При расчете мест узлов неподвижной мозаики использовались значения из табл. 1. Например, при прыжке из 8-го в 22-й узел $V_{8,22} = 5071$ при величине скорости подвижной решетки $v = 1$.

На рисунке 4а явно виден эффект быстрого прыжка картины узлов в образце вдоль оси симметрии его мозаики. На графике видны параллельные линии движения, которые обозначают одинаковую скорость перемещения мозаики для разных прыжков в прямом направлении, например $V_{0,13} = V_{4,17} = 5071v$. Аналогичный эффект наблю-

дается при перемещении в обратном направлении. На рисунке 4б показано резкое изменение величины и знака средней скорости в интервале времени $0.00 \leq t \leq 0.16$.

Для графенового квазикристалла ($a = 2.46 \text{ \AA}$), используя скорость $v = 2 \text{ пм/пс}$, сравнимую с наблюдаемого в эксперименте при использовании сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ) [17], приведем величину средней скорости перемещения смещенного центра QC, равную -2736 пм/пс ($V_{13,8} = -1368 \cdot 2$), при “прыжке” мозаики из 13-го узла в 8-й в обратном направлении (рис. 4).

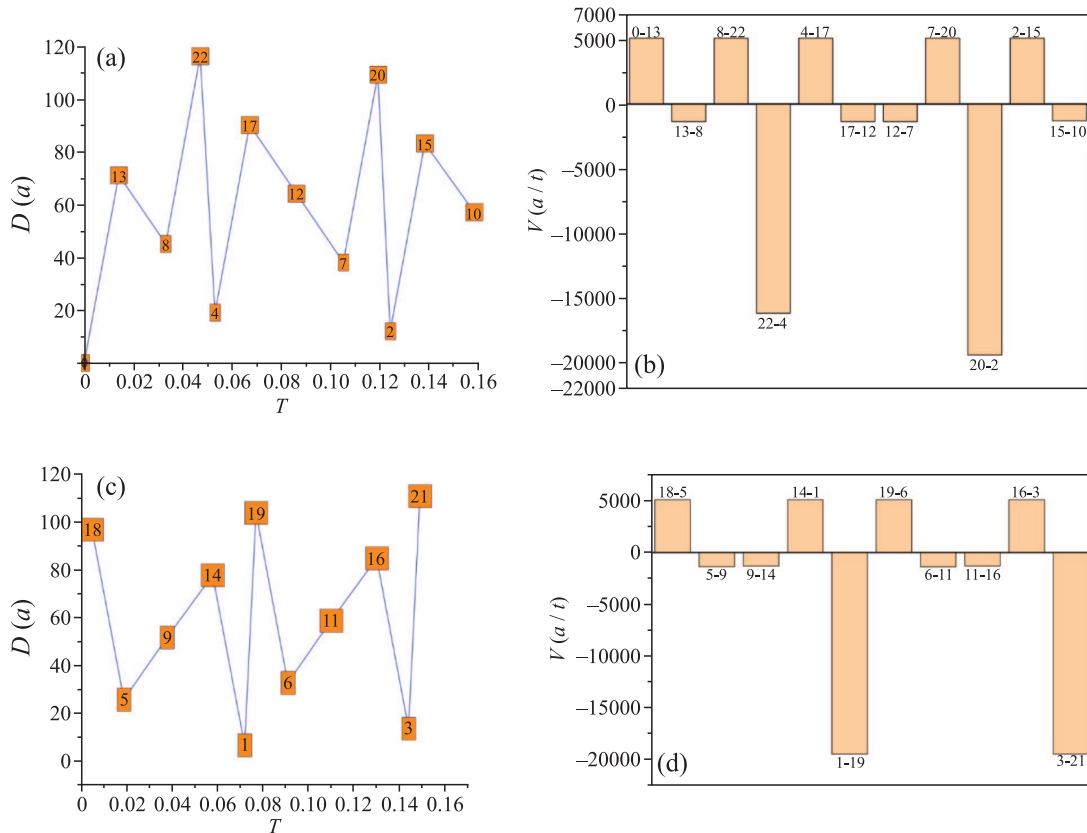


Рис. 4. (Цветной онлайн) Изменение мест “остановок” смещенных центров QC в узлах мозаики гексагонального квазикристалла со временем их прохождения (T) в прямом (а) и обратном (с) направлениях, соответственно, (b) и (d) величины средних скоростей $V_{i,j} = v \frac{D_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}}$ прохождения смещенного центра QC между соседними “остановками” в прямом и обратном направлении соответственно

Отметим, что при приближении сдвига к $\varepsilon_{\tau_a} = a$, в момент $\tau_a = a/v$ смещенный центр QC “останавливается” на месте $D_a = a$, но с малым прыжком мозаики всего на одну ЭЯ решетки.

Для экспериментов удобно следить за изменением картины мозаики на области вокруг центра QC – синяя панель на рис. 3, при движении подвижной решетки вправо – вдоль оси симметрии X . Туда перемещаются “зеркальные” области соответствующих i -тых узлов, и там же можно фиксировать каждую картину при прохождении узловых точек мозаики. При “остановке” в момент t_i движения скользящей решетки мы можем “считать” i -тую картинку (рис. 3). Таким образом, для считывания всех “ $-i$ ” картинок нам достаточно использовать образец hQC со смещенным центром с таким размером, который по ширине заведомо много больше выбранного участка смещений ε_i .

Полученные результаты позволяют количественно описать рассмотренный эффект в QC из “скользя-

щих” гексагональных решеток с любыми размерами ЭЯ и из любых материалов.

Квазикристалл из квадратных решеток.

Далее рассмотрим пример динамики мозаики слоистого 2D додекагонального квазикристалла (Амман-Бенкер [18]), состоящего из квадратных решеток с пронумерованными узлами (sQC, рис. 1). В качестве оси симметрии sQC были выбраны возможные направления движения верхней (синей) решетки вдоль нижней (красной) – ось X , аналогично случаю с гексагональными решетками. На рисунке 5 показана схема квазикристалла, состоящего из двух квадратных решеток, пересекающихся под углом 45° с его мозаичной сеткой.

Динамика изменений мозаики такого квазикристалла описывается аналогично вышерассмотренному примеру на основе смещения подвижной (синей) решетки относительно неподвижной (красной) решетки. “Зеркальное” отражение узлов также характерно для этих образцов. На рисунке 6 показаны

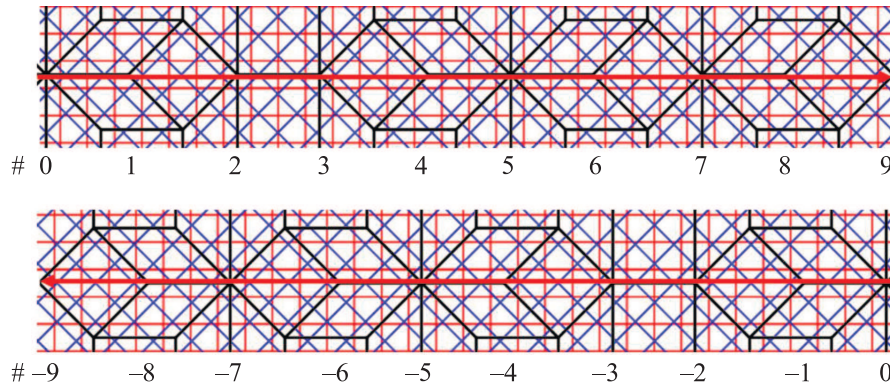


Рис. 5. (Цветной онлайн) Диаграмма мозаичной решетки квазикристалла с центром QC (0) вдоль оси X (для $X > 0$ и $X < 0$), вдоль которой номерами обозначены узлы мозаики

примеры изменения картин мозаики в ограниченной центральной области образца (центральный, 7 и -7 , 4 и -4 узлы соответственно). Мозаичные движения при наблюдении стационарного эффекта (синяя рамка) и узлы, которые после движения станут смещенными центральными узлами квазикристалла (наблюдение за смещенным центром квазикристалла – красная рамка).

При одном направлении движения подвижной решетки мозаичные скачки могут происходить в двух направлениях, как вдоль движения этой решетки, так и против нее, как описано выше, что типично для sQC. Соответствующие значения параметров эффекта для квазикристалла с квадратной решеткой показаны в табл. 2.

Таблица 2. Параметры эффекта для квазикристалла, состоящего из квадратных решеток. D_i – расстояние от стационарного центра QC до i -го узла, $\varepsilon_i(a)$ – расстояние смещения слоя в прямом направлении, $\#$ – номер узла, V_i – средняя скорость перехода в этот узел из предыдущего узла (значения округлены до целых чисел)

$D_i(a)$	$\varepsilon_i(a)$	$\#$	V_i
41	0.012	12	$3417v$
24	0.042	7	$-567v$
7	0.071	2	$-3412v$
48	0.083	14	$3417v$
31	0.113	9	$-567v$
14	0.142	4	$-3412v$
55	0.154	16	$3417v$
38	0.184	11	$-567v$

На рисунке 7 показаны графики $D(T)$ и средних скоростей (в единицах $T = \tau \frac{v}{a}$ и $V = \frac{V_i}{v}$, где $V > 0$, когда смещенный центр QC перемещается вдоль оси X , при перемещении подвижной “синей” решетки вдоль оси X на рис. 5). При расчетах средних скоростей использовались расстояния

от стационарного центра мозаики из табл. 2. Например, $V_{2,14} = 3417$ (при $v = 1$). Мозаики sQC характеризуются более низкими скоростями, чем скачки в hQC.

На рисунке 7а показан аналогичный эффект скачков в образце sQC вдоль оси симметрии, как и в случае гексагонального квазикристалла.

Было обнаружено, что с самого начала движения мозаика совершает псевдоколебательное движение. График показывает параллельные линии движения, которые указывают на одинаковую скорость движения для разных переходов в прямом направлении, например, $V_{0,12} = V_{7,19} = 3417v$. Движение в противоположном направлении будет иметь аналогичный эффект. Значения средних скоростей скачков показаны более подробно на рис. 7б.

Для sQC будет удобно наблюдать эффект, используя пару обычных углеродных решеток в качестве плоской микроструктуры, например, с параметром $a \approx 60$ мкм [19]. Параметры эффекта (табл. 2) рассчитываются путем подстановки значения решетки a . В качестве иллюстрации мы представляем значение “скачка” от центра sQC до 14-го узла $D_{14} = 48a = 48 \cdot 60 = 2880$ мкм при смещении $\varepsilon_{14} = 0.083a = 0.083 \cdot 60 = 4.98$ мкм, которое в 578 раз меньше, чем мозаичный скачок.

Используя малое значение постоянной скорости перемещения движущегося слоя $v = 2$ м/с (скорость ходьбы), мы оцениваем среднюю скорость прыжка центра мозаики между узлами 14 и 9 как -1134 м/с ($V_{14,9} = -567 \cdot 2$), что примерно в 3 раза превышает скорость звука в воздухе.

Заключение. В заключение стоит упомянуть существующие методы перемещения подвижной решетки на скользящей поверхности: с помощью накопечника СТМ [20] или под действием внешнего поля

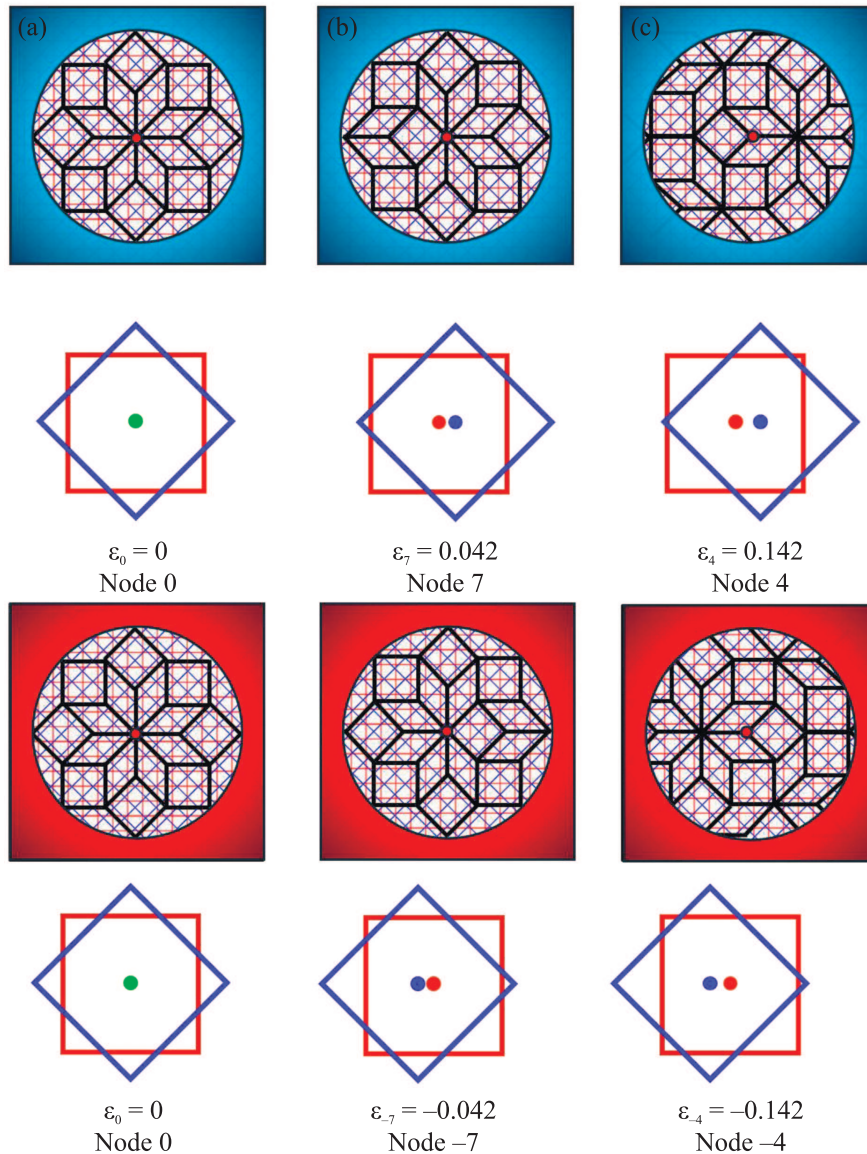


Рис. 6. (Цветной онлайн) Примеры изменения картины сетки мозаики QC при небольшом смещении подвижной "синей" решетки: вблизи центра исходной мозаичной структуры в окне синей панели появляются узлы -7 (b) и -4 (c), или в окнах красной панели отслеживается положение, в котором центр QC перескакивает с узла 0 на узел 7 (b) и с узла 0 на узел 4 (c)

в гибридных структурах [21]. Наблюдаемое нарушение симметрии при перескоке мозаики изменяет во времени дисперсионные электронные свойства ограниченного образца QC, что должно приводить к импульсному поведению оптических и электронных характеристик образца при движении одной из решеток [11, 12].

Используя тот или иной метод считывания изменяющихся изображений мозаичной решетки (изображения ТЭМ [22] или электронные, фотонные или фононные спектры [23]) в образце QC или hQC с небольшими сдвигами скользящей решетки, мы смо-

жем контролировать сигналы в измерительных приборах.

На практике оценка частоты и амплитуды скачков будет зависеть не только от размера квазикристалла, но и от общих условий эксперимента (плана, последовательности и количества "остановок", при которых наиболее выражено нарушение структуры распределения элементов, а следовательно, и уникального расположения атомов в образце, что, в свою очередь, повлияет, например, на уникальный электронный (фононный или оптический) спектр этого ква-

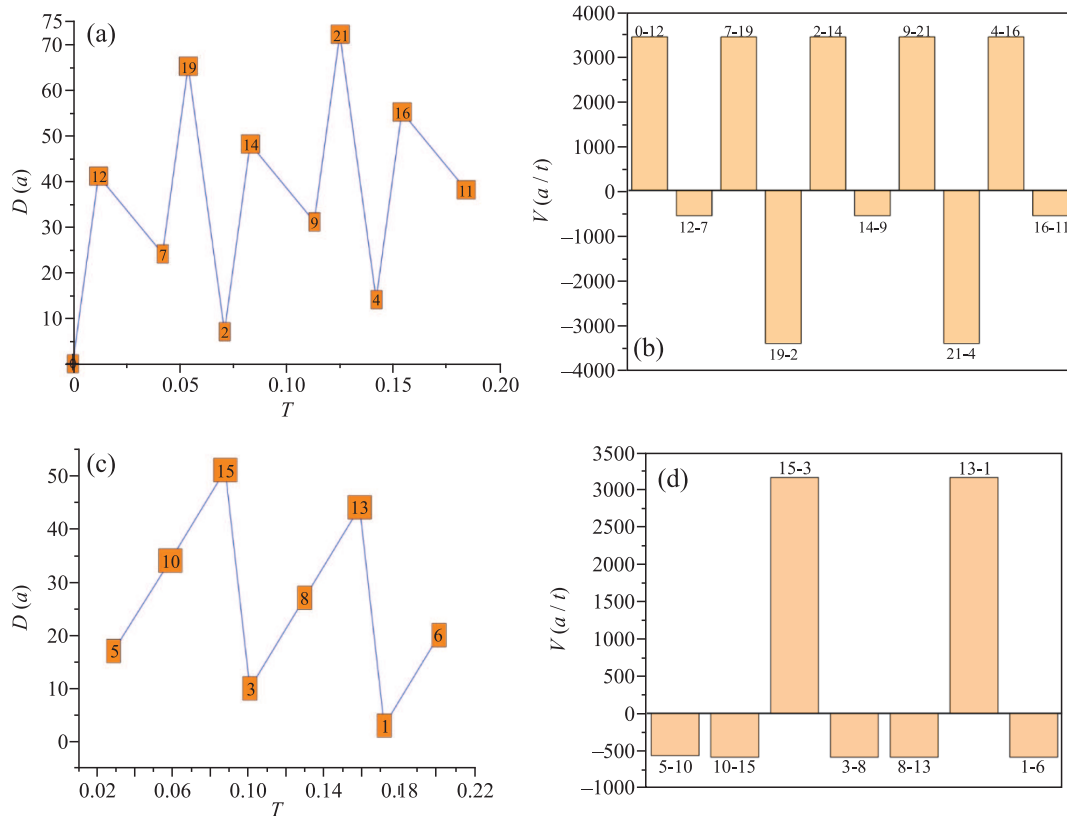


Рис. 7. (Цветной онлайн) Изменение мест “остановок” смещенных центров QC (a) и (c) в узлах мозаики sQC в зависимости от времени их прохождения (T) в прямом и обратном направлениях соответственно, (b) и (d) – значения средних скоростей $V_{i,j} = v_{\frac{D_{i,j}}{\varepsilon_{i,j}}}$ прохождения смещенного центра QC между соседними “остановками” в прямом и обратном направлениях соответственно

зикристаллического образца в выбранный момент времени).

Особенно важно отметить, что эффект гигантских скачков квазикристаллической мозаики из двух решеток с медленным скольжением одной из них является универсальным, т.е. его следует наблюдать в двумерном квазикристаллическом образце из решеток различной структуры и материалов, а также с размерами ЭЯ от нано- до макромасштаба. Рассматриваемую динамику квазикристалла со скользящими слоями в случае квазикристаллов из атомных решеток можно наблюдать с помощью ТЭМ, а в случае квазикристаллов из решеток с большим размером ячейки – либо визуально в микроскопе, либо путем исследования свойств таких квазикристаллов.

Финансирование работы. Авторы выражают благодарность за финансовую поддержку из федерального бюджета Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (# 125020401357-4).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, and J. W. Cahn, “Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry”, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1951 (1984); <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.1951>.
2. S. J. Ahn, P. Moon, T.-H. Kim, H.-W. Kim, H.-C. Shin, E. H. Kim, H. W. Cha, S.-J. Kahng, P. Kim, M. Koshino, Y.-W. Son, C.-W. Yang, and J. R. Ahn, “Dirac electrons in a dodecagonal graphene quasicrystal”, *Science* **361**, 782 (2018); <https://doi.org/10.1126/science.aar8412>.
3. W. Yao, E. Wang, C. Bao, Y. Zhang, K. Zhang, K. Bao, C. K. Chan, C. Chen, J. Avila, M. C. Asensio, J. Zhu, and S. Zhou, “Quasicrystalline 30° twisted bilayer graphene as an incommensurate superlattice with strong interlayer coupling”, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **115**, 6928 (2018); <https://doi.org/10.1073/pnas.1720865115>.
4. K. S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin, T. J. Booth, V. V. Khotkevich, S. V. Morozov, and A. K. Geim,

- “Two-dimensional atomic crystals”, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **102**(30), 10451 (2005); <https://doi.org/doi:10.1073/pnas.0502848102>.
5. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, and A. A. Firsov, “Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films”, *Science* **306**, 666 (2004); <https://doi.org/10.1126/science.1102896>.
6. C. Han, L.-Q. Chen, T. Yang, G. Xu, J. Li, C. Li, H. Fan, A. Alu, and C.-W. Qiu, “Observation of dispersive acoustic quasicrystals”, *Nat. Commun.* **16**, 1988 (2025); <https://doi.org/10.1038/s41467-025-57067-3>.
7. L. Spencer, N. Coste, X. Ni, S. Park, O. C. Schaeper, Y. D. Kim, T. Taniguchi, K. Watanabe, M. Toth, H. Tang, and I. Aharonovich, “A Van der Waals Moire Bilayer Photonic Crystal Cavity”, *Nano Letters* **25**(39), 14459 (2025); DOI: 10.1021/acs.nanolett.5c03959.
8. M. Lin, X. Gou, Z. Xie, A. Yang, L. Du, and X. Yuan, “Photonic quasicrystal of spin angular momentum”, *Sci. Adv.* **11**, eadv3938 (2025); DOI:10.1126/sciadv.adv3938.
9. M. Liu, L. Wang, and G. Yu, “Developing Graphene-Based Moire Heterostructures for Twistronics”, *Adv. Sci.* **9**, 2103170 (2022); <https://doi.org/10.1002/advs.202103170>.
10. J. Liu, X. Yang, H. Fang, W. Yan, W. Ouyang, and Z. Liu, “In Situ Twistronics: A New Platform Based on Superlubricity”, *Adv. Mater.* **37**, 2305072 (2025); <https://doi.org/10.1002/adma.202305072>.
11. D. Wang, D.-L. Bao, Q. Zheng, C.-T. Wang, S. Wang, P. Fan, S. Mishra, L. Tao, Y. Xiao, L. Huang, X. Feng, K. Müllen, Y.-Y. Zhang, R. Fasel, P. Ruffieux, S. Du, and H.-J. Gao, “Twisted bilayer zigzag-graphene nanoribbon junctions with tunable edge states”, *Nat. Commun.* **14**, 1018 (2023); <https://doi.org/10.1038/s41467-023-36613-x>.
12. K. J. U. Vidarte, A. B. Felix, and A. Latge, “Driving Electronic Features of Twisted Bilayer Zigzag-Graphene Nanoribbons”, *J. Phys. Chem. C* **130**, 1706 (2026); <https://doi.org/10.1021/acs.jpcc.5c06596>.
13. P. Stampfli, “A dodecagonal quasiperiodic lattice in two dimensions”, *Helvetica Physica Acta* **59**, 1260 (1986).
14. A. Jagannathan and M. Duneau, “Properties of the Ammann–Beenker Tiling and its Square Periodic Approximants”, *Israel Journal of Chemistry* **64**, e202300119 (2024); <https://doi.org/10.1002/ijch.202300119>.
15. P. Stampfli, “An easy way to quasiperiodic tilings”, <https://geometricolor.wordpress.com/2012/04/13/an-easy-way-to-quasiperiodic-tilings/>.
16. L. A. Chernozatonskii, “Mosaic Structure of Quasicrystals of Three Hexagonal Atomic Layers”, *JETP Lett.* **121**, 630 (2025); <https://doi.org/10.1134/S0021364025605998>.
17. H. Buch, A. Rossi, S. Forti, D. Convertino, V. Tozzini, and C. Coletti, Superlubricity of epitaxial monolayer WS₂ on graphene, *Nano Res.* **11**, 5946 (2018); <https://doi.org/10.1007/s12274-018-2108-7>.
18. F. P. M. Beenker, Algebraic theory of non-periodic tilings of the plane by two simple building blocks: a square and a rhombus, EUT report. WSK, Dept. of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology Eindhoven, 1982), v. 82-WSK-04.
19. C. Zhang, Q. Xie, C. Jiang, B. Wang, K. Yang, B. Gao, H. Xiao, Z. Chen, Z. Liu, C. Jin, H. Wang, J. Wu, W. Gao, Q. Yuan, T. Wu, and T. Deng, “Melting-assisted assembly of twisted graphene/h-BN superlattices with clean interfaces”, *Nat. Synth.* **5**, 918 (2026); <https://doi.org/10.1038/s44160-026-01000-z>.
20. T. Wang, L. Zhan, T. Zhang, Y. Li, H. Fan, X. Cao, Z. Zhou, Q. Yu, C. Grazioli, H. Yang, Q. Zhang, and Y. Wang, “Atomic Manipulation of 2D Materials by Scanning Tunneling Microscopy: Advances in Graphene and Transition Metal Dichalcogenides”, *Nanomaterials* **15**, 888 (2025); <https://doi.org/10.3390/nano15120888>.
21. X. Wang, X. Chen, Y. Long, J. Liu, F. Lin, J. Yin, Y. Liu, and W. Guo, “Manipulating thousands of non-volatile polarization states within one sliding ferroelectric transistor at room temperature”, *Nat. Electron.* **9**, 257 (2026); <https://doi.org/10.1038/s41928-025-01551-7>.
22. C. S. Tsang, X. Zheng, T. Yang, Z. Yan, W. Han, L. W. Wong, H. Liu, S. Gao, K. H. Leung, C.-S. Lee, S. P. Lau, M. Yang, J. Zhao, and T. H. Ly, “Polar and quasicrystal vortex observed in twisted-bilayer molybdenum disulfide”, *Science* **386**, 198 (2024); <https://doi.org/10.1126/science.adp7099>.
23. Z. Jiang, J. Liu, S. Zheng, G. Duan, and B. Xia, “Phononic twisted moire lattice with quasicrystalline patterns”, *Appl. Phys. Lett.* **121**, 142202 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0109404>.