Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 7, с. 557 – 563 © 2026 г. 10 октября

Избыточный ток в джозефсоновских контактах со спин-активными границами раздела

М. С. Каленков[1)]

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, 119991 Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 августа 2026 г.
После переработки 31 августа 2026 г.
Принята к публикации 31 августа 2026 г.

Развита теория избыточного тока в джозефсоновских контактах со спин-активными границами раздела. В рамках подхода матрицы рассеяния показано, что при весьма общих предположениях относительно свойств рассеяния на границе раздела избыточный ток в джозефсоновском контакте может быть представлен как сумма избыточных токов двух соответствующих контактов, в которых один из сверхпроводящих электродов заменен нормальным металлом. Полученное разложение справедливо для произвольной спин-активной матрицы рассеяния и не зависит от конкретной симметрии параметра порядка сверхпроводника.

DOI: 10.7868/S3034576626100088

1. Введение. Измерения транспортных характеристик сверхпроводящих гибридных контактов позволяют получать информацию о микроскопических свойствах контакта. В частности, вольт-амперная характеристика содержит сведения о процессах рассеяния квазичастиц и может использоваться для определения микроскопических параметров, влияющих на транспорт через контакт. Одной из величин, особенно чувствительных к этим параметрам, является избыточный ток, возникающий как не зависящий от напряжения вклад в ток при напряжениях, значительно превышающих величину сверхпроводящей щели. Несмотря на то, что избыточный ток определяется по высоковольтному поведению вольт-амперной характеристики, он формируется за счет процессов при энергиях порядка сверхпроводящей щели и поэтому содержит информацию о микроскопических параметрах контакта.

Избыточный ток в спинизотропных системах сверхпроводник/изолятор/сверхпроводник (SIS) и сверхпроводник/нормальный металл/сверхпроводник (SNS) был подробно исследован в работах [1–9]. Важным результатом, установленным для немагнитных контактов, является то, что избыточный ток SIS (SNS) контакта может быть представлен как сумма избыточных токов соответствующих SIN и NIS (SN и NS) контактов [3–7]. Поэтому естественно возникает вопрос о том, как изменяется это соотношение в присутствии спин-зависимого рассеяния на границе раздела, когда в задачу входят дополнительные степени свободы, связанные со спином квазичастиц.

Чувствительность сверхпроводящих контактов к магнитным материалам обусловлена синглетной природой сверхпроводящего состояния: электроны с противоположными проекциями спина, образующие куперовскую пару, при наличии магнитного рассеяния испытывают различные процессы рассеяния. Поэтому транспортные характеристики сверхпроводящих контактов существенно зависят от свойств спин-активных границ раздела [10–13].

Целью настоящей работы является установление общего соотношения для избыточного тока в джозефсоновских контактах со спин-активными границами раздела.

2. Модель. Мы используем квазиклассическую теорию сверхпроводимости. Центральным объектом этой теории является матричная функция Грина $\check{g}$, которая удовлетворяет квазиклассическому уравнению и условию нормировки

$$-i\mathbf{v}_f\nabla\check{g} = [\varepsilon\hat{\tau}_3 + eV + \check{\Delta} + \check{\Sigma}, \check{g}], \quad \check{g}^2 = 1, \qquad (1)$$

где $\check{g}$ – матрица размера 8×8 в спиновом, частица-дырка (Намбу) и келдышевском пространствах, $\mathbf{v}_f$ – скорость на поверхности Ферми, $V = V(\mathbf{r}, t)$ – скалярный потенциал, $\check{\Sigma}$ – матрица собственной энергии, которая может учитывать рассеяние на примесях, спин-орбитальное взаимодействие и другие эффекты, $\hat{\tau}_i$ – матрицы Паули в пространстве Намбу, а $\check{\Delta}$ – матрица параметра порядка, имеющая следующую структуру

[1)]e-mail: kalenkov@lpi.ru

$$\check{\Delta} = \begin{pmatrix} \hat{\Delta}^R & 0 \\ 0 & \hat{\Delta}^A \end{pmatrix}, \quad \hat{\Delta}^R = \hat{\Delta}^A = \hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ -\Delta^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где параметр порядка $\Delta = \Delta(\mathbf{r}, t)$ в общем случае может зависеть от координат и времени.

Матрица функции Грина имеет стандартную структуру в пространстве Келдыша

$$\check{g} = \begin{pmatrix} \hat{g}^R & \hat{g}^K \\ 0 & \hat{g}^A \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\hat{g}^{R,A,K}$ – запаздывающая, опережающая и келдышевская компоненты соответственно. Плотность электрического тока определяется через усредненную по импульсам келдышевскую функцию Грина

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\pi e N_f}{4} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \left\langle \mathbf{v}_f \, \mathrm{Sp}[\hat{\tau}_3 \hat{g}^K(\mathbf{p}_f, \mathbf{r}, \varepsilon, t)] \right\rangle, \tag{4}$$

где N_f – плотность состояний на уровне Ферми для одного направления спина, а угловые скобки обозначают усреднение по поверхности Ферми.

Квазиклассическое уравнение (1) должно быть дополнено соответствующими граничными условиями для квазиклассических функций Грина, необходимыми при решении задач с границами раздела. Для спин-активных границ раздела такие граничные условия были впервые сформулированы в работе [14]. Они связывают значения функций Грина на границе раздела для падающих ($\check{g}_{\mathrm{in},1}$ и $\check{g}_{\mathrm{in},2}$) и отраженных ($\check{g}_{\mathrm{out},1}$ и $\check{g}_{\mathrm{out},2}$) направлений импульса квазичастиц с обеих сторон границы раздела (см. рис. 1).

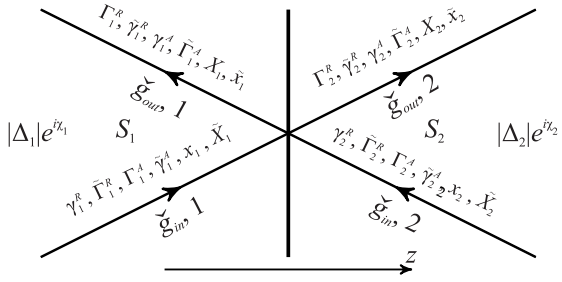

Рис. 1. Контакт двух сверхпроводников S_1 и S_2, разделенных спин-активной границей раздела, с четырьмя функциями Грина, входящими в граничные условия. Для каждой функции Грина указаны обозначения соответствующих риккати-амплитуд и функций распределения

Граничные условия для квазиклассических функций Грина в исходной форме имеют достаточно громоздкий вид, что существенно затрудняет решение нетривиальных задач с границами раздела. Эта трудность устраняется с помощью параметризации функций Грина через риккати-амплитуды $\gamma_{1,2}^{R,A}$, $\tilde{\gamma}_{1,2}^{R,A}$, $\Gamma_{1,2}^{R,A}$, $\tilde{\Gamma}_{1,2}^{R,A}$ и функции распределения $x_{1,2}$, $\tilde{x}_{1,2}$, $X_{1,2}$, $\tilde{X}_{1,2}$ [15–17]. Мы не приводим эту параметризацию, поскольку ее явный вид не требуется в настоящей работе. Важно отметить, что после такой параметризации граничные условия могут быть явно разрешены, что позволяет выразить значения прописных амплитуд Γ, $\tilde{\Gamma}$ и функций распределения X, $\tilde{X}$ на границе раздела через соответствующие строчные величины.

Другим важным свойством риккати-параметризации является то, что строчные риккати-амплитуды $\gamma_{1,2}^{R,A}$, $\tilde{\gamma}_{1,2}^{R,A}$ и функции распределения $x_{1,2}$, $\tilde{x}_{1,2}$ определяются исключительно свойствами соответствующего сверхпроводника в объеме и не зависят ни от границы раздела, ни от другого сверхпроводника.

Для последующего анализа не требуется делать каких-либо предположений о характере рассеяния на границе раздела. Рассеяние может зависеть от спинового состояния квазичастицы, в том числе включать процессы с переворотом спина. Единственным ограничением является требование, чтобы амплитуды рассеяния в нормальном состоянии слабо зависели от энергии на масштабе энергий параметров порядка сверхпроводников, что, в частности, реализуется в случае достаточно тонкой спин-активной прослойки F, например, ферромагнитной прослойки или магнитной прослойки с доменной структурой. Контакт двух сверхпроводников с такой прослойкой будем обозначать как SFS-контакт.

Используя граничные условия в форме, полученной в работе [16], можно выразить функции Грина на границе раздела через строчные риккати-амплитуды и функции распределения. В результате в случае независящего от времени напряжения электрический ток через контакт может быть представлен в следующем виде [18]

$$I(t) = \frac{e}{8} \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} \mathrm{Sp}\Big\{ Y(t,\varepsilon) Q(\varepsilon, eV) Y^+(t,\varepsilon) \times \\ \times \left(\mathbb{S}_n^+ \hat{o}_3 \hat{\tau}_3 \mathbb{S}_n - \hat{o}_3 \hat{\tau}_3 \right) \Big\}. \tag{5}$$

Здесь ток приведен в расчете на один проводящий канал, содержащий два спиновых состояния. Если контакт содержит несколько проводящих каналов, необходимо просуммировать вклады от всех каналов.

Ниже определены все величины, входящие в уравнение (5). Матрица рассеяния $\mathbb{S}_n$ имеет блочно-диагональную структуру в пространстве Намбу

$$\mathbb{S}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_e^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{S}_h \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathcal{S}_e$ и $\mathcal{S}_h$ – матрицы рассеяния на границе раздела в нормальном состоянии для электронов и дырок соответственно. Матрица рассеяния $\mathbb{S}_n$, вообще говоря, зависит от импульса квазичастицы вдоль границы раздела $\mathbf{p}_\parallel$. В общем случае, при отсутствии дополнительных симметрий границы раздела, между электронной и дырочной матрицами рассеяния существует связь

$$\mathcal{S}_e(\mathbf{p}_\parallel) = \mathcal{S}_h^T(-\mathbf{p}_\parallel), \tag{7}$$

которая связывает матрицы рассеяния при разных значениях импульса вдоль границы раздела. Если рассматривать матрицы рассеяния $\mathcal{S}_e$ и $\mathcal{S}_h$ при фиксированном значении $\mathbf{p}_\parallel$, то в общем случае какая-либо связь между ними отсутствует.

Матрицы $\hat{\tau}_i$ и $\hat{o}_i$ – матрицы Паули в пространстве Намбу и траекторий (терминалов) соответственно. В частности, для матриц $\hat{\tau}_3$ и $\hat{o}_3$ имеем

$$\hat{\tau}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \hat{o}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матричная функция $Q(\varepsilon, eV)$ определена как

$$\begin{aligned} Q(\varepsilon, eV) = \qquad\qquad (9) \\ = [1 - \mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon + eV/2)\mathbf{\Gamma}^+_{eq}(\varepsilon + eV/2)]h_0(\varepsilon + eV/2)\hat{P}_+ \\ + [1 - \mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon - eV/2)\mathbf{\Gamma}^+_{eq}(\varepsilon - eV/2)]h_0(\varepsilon - eV/2)\hat{P}_-, \end{aligned}$$

где $\hat{P}_\pm$ являются проекторами

$$\hat{P}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{o}_3\hat{\tau}_3). \tag{10}$$

Матрица $\mathbf{\Gamma}_{\text{eq}}$ содержит значения всех строчных риккати-амплитуд с обеих сторон границы раздела, у которых зависящая от времени сверхпроводящая фаза была исключена калибровочным преобразованием. Как было отмечено ранее, строчные риккати-амплитуды зависят только от свойств соответствующего сверхпроводника и поэтому после калибровочного преобразования просто совпадают с равновесными риккати-амплитудами, что отмечено дополнительным индексом "eq". Матрица $\mathbf{\Gamma}_{\text{eq}}$ имеет внедиагональную структуру в пространстве Намбу и диагональную структуру в пространстве траекторий (терминалов)

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{eq}}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma^R_{\text{eq},1}(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^R_{\text{eq},2}(\varepsilon) \\ \tilde{\gamma}^R_{\text{eq},1}(\varepsilon) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\gamma}^R_{\text{eq},2}(\varepsilon) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Здесь равновесные риккати-амплитуды $\gamma^R_{\text{eq},i}$ и $\tilde{\gamma}^R_{\text{eq},i}$ могут быть вычислены при любых не зависящих от времени фазах χ_1 и χ_2, например, при нулевых фазах. Выбор этих фаз не влияет на результаты, поэтому без ограничения общности можно положить $\chi_1 = \chi_2 = 0$. Разный выбор фаз соответствует лишь разному выбору начала отсчета времени t. Равновесные риккати-амплитуды $\gamma^R_{\text{eq},i}$ и $\tilde{\gamma}^R_{\text{eq},i}$ могут иметь нетривиальную энергетическую зависимость вследствие пространственной зависимости параметра порядка вблизи границы раздела. В модели с пространственно постоянным параметром порядка они совпадают со своим значением в объеме сверхпроводника

$$\gamma^R_{\text{eq},i}(\varepsilon) = \tilde{\gamma}^R_{\text{eq},i}(\varepsilon) = \frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - |\Delta_i|^2}}{|\Delta_i|}, \quad i = 1, 2, \tag{12}$$

где $|\Delta_{1,2}|$ обозначает величину параметра порядка в соответствующем сверхпроводнике, а ветвь квадратного корня выбирается так, чтобы получающееся выражение было аналитичным в верхней полуплоскости и стремилось к нулю при больших энергиях. Функция h_0 равна

$$h_0(\varepsilon) = \tanh\frac{\varepsilon}{2T}. \tag{13}$$

Матричная функция $Y(t, \varepsilon)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$\begin{aligned} Y(t,\varepsilon)\mathbb{S}_n + e^{-ieVt}Y(t, \varepsilon + eV)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon + eV/2)\hat{P}_+ + \\ + e^{ieVt}Y(t, \varepsilon - eV)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon - eV/2)\hat{P}_- = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде бесконечного ряда

$$Y(t, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ineVt} y_n(\varepsilon - neV), \tag{15}$$

где коэффициенты $y_n(\varepsilon)$ удовлетворяют матричным рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} y_n(\varepsilon)\mathbb{S}_n + y_{n+1}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon + neV + eV/2)\hat{P}_+ + \\ + y_{n-1}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon + neV - eV/2)\hat{P}_- = \delta_{n,0}, \end{aligned} \tag{16}$$

которые могут быть явно разрешены. Выражения для y_n с положительными и отрицательными индек-

сами n можно записать единым образом, если ввести параметр μ, принимающий значения $\pm$

$$y_{\mu n}(\varepsilon) = \alpha_0(\varepsilon)\alpha_\mu(\varepsilon+\mu eV/2)\alpha_\mu(\varepsilon+3\mu eV/2)\cdots \times\alpha_\mu(\varepsilon+(2n-1)\mu eV/2), \quad \mu=\pm,\ n>0, \tag{17}$$

где матрица $\alpha_0(\varepsilon)$ задается выражением

$$\alpha_0(\varepsilon) = \Big[\mathbb{S}_n + \alpha_-(\varepsilon-eV/2)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon-eV/2)\hat{P}_- + + \alpha_+(\varepsilon+eV/2)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon+eV/2)\hat{P}_+\Big]^{-1}, \tag{18}$$

а матричные функции $\alpha_\pm(\varepsilon)$ удовлетворяют нелинейным матричным уравнениям

$$\alpha_\mu(\varepsilon) = -\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\hat{P}_{-\mu}\Big[\mathbb{S}_n + + \alpha_\mu(\varepsilon+\mu eV)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon+\mu eV)\hat{P}_\mu\Big]^{-1}. \tag{19}$$

Уравнения (15)–(19) вместе с уравнениями (5) и (9) дают компактное и удобное для аналитических вычислений описание нестационарного джозефсоновского эффекта в SFS-контактах с границами раздела различного типа, включая магнитные границы раздела. Далее эти уравнения используются для аналитического вывода выражения для избыточного тока.

3. Избыточный ток. В данном разделе мы построим разложение по обратному напряжению для усредненного по времени электрического тока в SFS-контакте в пределе больших напряжений $|eV| \gg \gg |\Delta_{1,2}|$. При напряжениях, значительно превышающих сверхпроводящую щель, усредненный по времени ток может быть представлен в виде

$$\overline{I} = G_{\mathrm{N}}V + I_{\mathrm{ex}} + \mathcal{O}(1/V), \tag{20}$$

где первый член соответствует вкладу нормального состояния, а не зависящий от напряжения член I_{ex} представляет собой избыточный ток. Избыточный ток содержит информацию о микроскопических свойствах границы раздела и является основным объектом анализа в данном разделе.

Для построения разложения по обратному напряжению сначала рассмотрим энергетическую зависимость матричных функций α_0, $\alpha_\pm$ и функций y_n в пределе больших напряжений $|eV| \gg |\Delta_1|, |\Delta_2|$. Их свойства непосредственно следуют из уравнений (17)–(19).

При больших напряжениях функции $\alpha_\pm(\varepsilon)$ имеют в основном ту же энергетическую зависимость, что и $\mathbf{\Gamma}_{\mathrm{eq}}(\varepsilon)$. Они обладают нетривиальной энергетической зависимостью при энергиях $|\varepsilon| \sim |\Delta_{1,2}|$, где имеют порядок единицы, и при $|\varepsilon| \gg |\Delta_{1,2}|$ убывают как $|\varepsilon|^{-1}$.

Функция $\alpha_0(\varepsilon)$ имеет нетривиальную энергетическую зависимость только вблизи точек $\varepsilon = \pm eV/2$, где она имеет порядок единицы, и стремится к не зависящей от энергии константе $\mathbb{S}_n^+$ при условии $|\varepsilon \pm eV/2| \gg |\Delta_{1,2}|$.

В результате получаем, что при больших напряжениях функция $y_{\mu n}(\varepsilon)$ ($n>0$, $\mu=\pm$) имеет пики при энергиях $-\mu eV/2$, $-\mu 3eV/2$, …, $-\mu(2n-1)eV/2$. Высота пиков ведет себя как $|V|^{1-n}$, тогда как их ширина имеет порядок $|\Delta_{1,2}|$. Вне областей, соответствующих пикам, функция имеет значения порядка $|V|^{-n}$.

Подставляя ряд (15) в уравнение (5) и используя установленные выше свойства функций y_n, находим, что для вычисления избыточного тока достаточно учесть слагаемые, содержащие только функции y_{-1}, y_0 и y_1. В результате получаем следующее приближенное выражение для усредненного по времени тока при больших напряжениях

$$\overline{I} = \frac{e}{8}\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,\mathrm{Sp}\Big\{y_0(\varepsilon)Q(\varepsilon,eV)y_0^+(\varepsilon)K\Big\} + + \sum_{\mu=\pm1}\frac{e}{8}\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,\mathrm{Sp}\Big\{y_\mu(\varepsilon-\mu eV)Q(\varepsilon,eV)y_\mu^+(\varepsilon-\mu eV)K\Big\} + \mathcal{O}(1/V^2), \tag{21}$$

где для компактности записи введено следующее обозначение

$$K = \mathbb{S}_n^+\hat{o}_3\hat{\tau}_3\mathbb{S}_n - \hat{o}_3\hat{\tau}_3. \tag{22}$$

Выражение (21) можно далее преобразовать, подставив выражение (9) для функции $Q(\varepsilon, eV)$. Сохраняя члены до порядка V^0 включительно, получаем следующее выражение для усредненного по времени тока

$$\overline{I} = \frac{e}{8}\times \times\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,\mathrm{Sp}\Big\{y_0(\varepsilon)\Big[h_0(\varepsilon+eV/2)\hat{P}_+ + h_0(\varepsilon-eV/2)\hat{P}_-\Big]\times \times y_0^+(\varepsilon)K\Big\} - \sum_{\mu=\pm1}\frac{e}{8}\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,\mathrm{Sp}\Big\{y_0(\varepsilon-\mu eV/2)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma}_{eq}^+(\varepsilon) \times h_0(\varepsilon)\hat{P}_\mu y_0^+(\varepsilon-\mu eV/2)K\Big\} + \sum_{\mu=\pm1}\frac{e}{8}\int\frac{d\varepsilon}{2\pi} \times\mathrm{Sp}\Big\{y_\mu(\varepsilon-\mu eV/2)\Big[h_0(\mu eV)\hat{P}_\mu + [1-\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma}_{eq}^+(\varepsilon)] \times h_0(\varepsilon)\hat{P}_{-\mu}\Big]y_\mu^+(\varepsilon-\mu eV/2)K\Big\} + \mathcal{O}(1/V). \tag{23}$$

Здесь удобно явно выделить линейный по напряжению вклад в ток. Для этого в первом слагаемом уравнения (23) выполним замену

$$y_0(\varepsilon) = \mathbb{S}_n^+ - \sum_{\mu=\pm1} y_\mu(\varepsilon)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon+\mu eV/2)\hat{P}_\mu\mathbb{S}_n^+. \quad (24)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
\overline{I} = G_{\rm N}V - \\
- \sum_{\mu=\pm1}\frac{e}{8}\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,{\rm Sp}\Big\{y_\mu(\varepsilon-\mu eV/2)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\hat{P}_\mu\mathbb{S}_n^+ \\
\times\Big[h_0(\varepsilon)\hat{P}_\mu - h_0(\mu eV)\hat{P}_{-\mu}\Big]\left(\hat{o}_3\hat{\tau}_3\mathbb{S}_n - \mathbb{S}_n\hat{o}_3\hat{\tau}_3\right)\Big\} \\
- \sum_{\mu=\pm1}\frac{e}{8}\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,{\rm Sp}\Big\{\Big[h_0(\varepsilon)\hat{P}_\mu - h_0(\mu eV)\hat{P}_{-\mu}\Big]\mathbb{S}_n\hat{P}_\mu \\
\times\mathbf{\Gamma}_{eq}^+(\varepsilon)y_\mu^+(\varepsilon-\mu eV/2)\left(\mathbb{S}_n^+\hat{o}_3\hat{\tau}_3 - \hat{o}_3\hat{\tau}_3\mathbb{S}_n^+\right)\Big\} \\
+ \sum_{\mu=\pm1}\frac{e}{8}\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,{\rm Sp}\Big\{y_\mu(\varepsilon-\mu eV/2)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\hat{P}_\mu\mathbb{S}_n^+\Big[h_0(\varepsilon)\hat{P}_\mu \\
-h_0(\mu eV)\hat{P}_{-\mu}\Big]\mathbb{S}_n\hat{P}_\mu\mathbf{\Gamma}_{eq}^+(\varepsilon)y_\mu^+(\varepsilon-\mu eV/2)K\Big\} \\
- \sum_{\mu=\pm1}\frac{e}{8}\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,{\rm Sp}\Big\{y_0(\varepsilon-\mu eV/2)\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma}_{eq}^+(\varepsilon)h_0(\varepsilon) \\
\times\hat{P}_\mu y_0^+(\varepsilon-\mu eV/2)K\Big\} \\
+ \sum_{\mu=\pm1}\frac{e}{8}\int\frac{d\varepsilon}{2\pi}\,{\rm Sp}\Big\{y_\mu(\varepsilon-\mu eV/2)\Big[[1-\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma}_{eq}^+(\varepsilon)]h_0(\varepsilon) \\
\times\hat{P}_{-\mu} + h_0(\mu eV)\hat{P}_\mu\Big]y_\mu^+(\varepsilon-\mu eV/2)K\Big\} + \mathcal{O}(1/V).
\end{aligned} \quad (25)$$

Здесь введена проводимость границы раздела в нормальном состоянии (для одного проводящего канала)

$$G_{\rm N} = \frac{e^2}{16\pi}\,{\rm Sp}\left(1 - \mathbb{S}_n\hat{o}_3\hat{\tau}_3\mathbb{S}_n^+\hat{o}_3\hat{\tau}_3\right). \quad (26)$$

При выводе выражения (25) производилось разложение по параметру $\Delta_{1,2}/(eV)$, который считался малым. Однако напряжение также входит в выражение (25) в виде комбинации eV/T через функцию $h_0(eV)$, и разложение по этому параметру не производится.

Поскольку функции $\Gamma_{\rm eq}(\varepsilon)$ быстро убывают при $|\varepsilon| \gg |\Delta_{1,2}|$, все интегрирования по энергии в уравнении (25) эффективно ограничены областью $|\varepsilon| \sim |\Delta_{1,2}| \ll |eV|$. Поэтому, с той же точностью, функции $y_0(\varepsilon-\mu eV/2)$ и $y_\mu(\varepsilon-\mu eV/2)$ в уравнении (25) могут быть заменены выражениями

$$y_0(\varepsilon-\mu eV/2) = [\mathbb{S}_n - \mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\hat{P}_{-\mu}\mathbb{S}_n^+\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\hat{P}_\mu]^{-1}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
y_\mu(\varepsilon-\mu eV/2) = -[\mathbb{S}_n - \mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\hat{P}_{-\mu}\mathbb{S}_n^+\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\hat{P}_\mu]^{-1} \\
\times\mathbf{\Gamma}_{eq}(\varepsilon)\hat{P}_{-\mu}\mathbb{S}_n^+.
\end{aligned} \quad (28)$$

Несмотря на то, что уравнение (25) имеет достаточно громоздкий вид, оно позволяет сделать несколько важных выводов. Подставляя матрицу $\mathbf{\Gamma}_{\rm eq}(\varepsilon)$ в форме (11) в уравнения (25), (27) и (28), видим, что поправка к току нормального состояния распадается на две независимые части. Одна из них зависит только от риккати-амплитуд γ_1^R, $\tilde{\gamma}_1^R$ и не зависит от риккати-амплитуд с другой стороны границы раздела. Другая часть аналогично зависит только от γ_2^R и $\tilde{\gamma}_2^R$.

$$I_{\rm ex} = I_{\rm ex}[\gamma_{\rm eq,1}^R, \tilde{\gamma}_{\rm eq,1}^R] + I_{\rm ex}[\gamma_{\rm eq,2}^R, \tilde{\gamma}_{\rm eq,2}^R]. \quad (29)$$

Таким образом, член порядка V^0 в усредненном по времени токе не содержит интерференционных слагаемых, включающих риккати-амплитуды с обеих сторон границы раздела. Этот результат является вполне естественным. Хорошо известно, что осциллирующая часть тока, которая, очевидно, содержит риккати-амплитуды с обеих сторон границы раздела, убывает при больших напряжениях как V^{-1} [2, 9]. Следовательно, интерференционные слагаемые появляются только начиная с порядка V^{-1} как в осциллирующей, так и в усредненной части тока.

Уравнение (29) непосредственно устанавливает простое соотношение между избыточными токами в SFS и SFN контактах. Действительно, положим параметр порядка Δ_2 равным нулю. В этом случае SFS контакт эффективно превращается в SFN контакт, а второе слагаемое в правой части уравнения (29) исчезает. Таким образом, избыточный ток SFS контакта может быть представлен как сумма избыточных токов SFN и NFS контактов, получаемых соответственно при $\Delta_2 = 0$ и $\Delta_1 = 0$. Важно отметить, что данное разложение получено без каких-либо предположений о конкретном виде матрицы рассеяния границы раздела.

Стоит отметить, что задача о вольт-амперной характеристике джозефсоновского контакта является сложной неравновесной и *нестационарной* задачей. Однако соотношение (29) показывает, что для вычисления избыточного тока эту задачу решать не обязательно, так как она сводится к значительно более простой *стационарной* задаче о вычислении избыточного тока в NFS и SFN структурах. Вольт-амперную характеристику NFS и SFN контактов можно представить в виде

$$\begin{aligned}
I_{\rm X}(V) = \frac{1}{4e}\int G_{\rm X}(\varepsilon)\big[h_0(\varepsilon+eV) \\
-h_0(\varepsilon-eV)\big]d\varepsilon, \quad {\rm X} = {\rm NFS, SFN},
\end{aligned} \quad (30)$$

где $G_{\rm NFS,SFN}(\varepsilon)$ – спектральный кондактанс соответствующего контакта. Отсюда легко найти поведение

вольт-амперной характеристики NFS (SFN) контакта при больших напряжениях

$$I_{\mathrm{X}}(V) = G_{\mathrm{N}}V + I_{\mathrm{ex,X}} + \mathcal{O}(1/V),\ \mathrm{X} = \mathrm{NFS},\ \mathrm{SFN}, \quad (31)$$

где $G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{NFS}}(\infty) = G_{\mathrm{SFN}}(\infty)$ – кондактанс контакта в нормальном состоянии, а $I_{\mathrm{ex,X}}$ – первая неисчезающая поправка к нормальному току по малому параметру $|\Delta_{1,2}|/(eV)$, определяемая соотношением

$$I_{\mathrm{ex,X}} = \frac{1}{2e}\tanh\frac{eV}{2T} \times \int [G_{\mathrm{X}}(\varepsilon) - G_{\mathrm{N}}]\, d\varepsilon, \quad \mathrm{X} = \mathrm{NFS},\ \mathrm{SFN}. \quad (32)$$

Величина (32) является первой неисчезающей поправкой к нормальному току $G_{\mathrm{N}}V$ по малому параметру $|\Delta_{1,2}|/(eV)$. При этом для ее вывода предположение о величине параметра eV/T делать не требуется. Поэтому при конечных eV/T она, вообще говоря, зависит от напряжения. В пределе $|eV| \gg T$ эта зависимость исчезает, и величина (32) дает избыточный ток в его обычном определении. В противоположном пределе $|\Delta_{1,2}| \ll |eV| \ll T$ она линейно зависит от напряжения и приводит к изменению наклона вольт-амперной характеристики по сравнению с нормальным состоянием вследствие наличия сверхпроводимости.

Рассмотрим теперь избыточный ток в SFS-контакте. Соотношение (29) показывает, что для вычисления первой неисчезающей поправки к нормальному току по малому параметру $|\Delta_{1,2}|/(eV)$ в SFS-контакте нет необходимости решать нестационарную задачу, а можно вычислить соответствующие поправки для контактов, в которых один из сверхпроводников заменен нормальным металлом, и сложить эти два вклада

$$I_{\mathrm{ex,SFS}} = I_{\mathrm{ex,SFN}} + I_{\mathrm{ex,NFS}}. \quad (33)$$

Как и в случае NFS и SFN контактов, в пределе $|eV| \gg T$ эта первая неисчезающая поправка дает избыточный ток в его обычном определении, тогда как в противоположном пределе $|\Delta_{1,2}| \ll |eV| \ll T$ она линейно зависит от напряжения и определяет изменение наклона вольт- амперной характеристики по сравнению с нормальным состоянием вследствие наличия сверхпроводимости. Данное разложение обобщает ранее полученные результаты для контактов с немагнитными границами раздела [3–7] на случай произвольных спин-активных границ раздела.

Важно подчеркнуть, что вывод данного результата не опирается на какой- либо конкретный вид сверхпроводящего спаривания и не требует предположения о пространственной однородности параметра порядка. Поэтому полученное разложение может быть применено также к сверхпроводящим состояниям с анизотропным параметром порядка, а также к спин-триплетным сверхпроводящим состояниям с нетривиальной спиновой структурой куперовских пар. Отметим также, что, хотя вывод проводился для баллистического контакта, полученное разложение избыточного тока сохраняется и для диффузных точечных контактов.

4. Выводы. Развито систематическое разложение по обратному напряжению для усредненного по времени тока в джозефсоновских контактах со спин- активными границами раздела без введения ограничений на матрицу рассеяния границы раздела или симметрию параметра порядка. В рамках данного подхода показано, что сложная неравновесная и нестационарная задача о вычислении избыточного тока в джозефсоновском SFS-контакте сводится к двум значительно более простым стационарным задачам о вычислении избыточного тока в SFN и NFS контактах. В результате избыточный ток в джозефсоновском контакте представлен в виде суммы избыточных токов двух соответствующих контактов, в которых один из сверхпроводящих электродов заменен нормальным металлом. Этот результат обобщает хорошо известное разложение избыточного тока для контактов с немагнитными границами раздела на случай произвольного спин-активного рассеяния.

Полученное разложение является достаточно общим. Оно не зависит от какой-либо конкретной симметрии параметра порядка и остается справедливым для анизотропных сверхпроводников, включая состояния со спин-триплетным спариванием. Кроме того, вывод не требует пространственной однородности параметра порядка и поэтому остается применимым при учете его самосогласованного подавления вблизи границы раздела.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков, А. В. Зайцев, “Об избыточном токе в сверхпроводящих точечных контактах”, Письма в ЖЭТФ **28** 637 (1978) [S. N. Artemenko, A. F. Volkov, and A. V. Zaitsev, “The excess current in superconducting point junctions”, JETP Lett. **28**, 589 (1978)].

2. С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков, А. В. Зайцев, "Теория нестационарного эффекта Джозефсона в коротких сверхпроводящих контактах", ЖЭТФ **76**, 1816 (1979) [S. N. Artemenko, A. F. Volkov, and A. V. Zaitsev, "Theory of nonstationary Josephson effect in short superconducting contacts", Sov. Phys. JETP **49**, 924 (1979)].
3. А. В. Зайцев, "Теория чистых коротких микромостиков S-c-S и S-c-N", ЖЭТФ **78**, 221 (1980) [A. V. Zaitsev, "Theory of pure short S-c-S and S-c-N microjunctions", Sov. Phys. JETP **51**, 111 (1980)].
4. T. M. Klapwijk, G. E. Blonder, and M. Tinkham, "Explanation of subharmonic energy gap structure in superconducting contacts", Physica B+C **109–110**, 1657 (1982).
5. G. E. Blonder, M. Tinkham, and T. M. Klapwijk, "Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion", Phys. Rev. B **25**, 4515 (1982).
6. А. В. Зайцев, "Квазиклассические уравнения теории сверхпроводимости для контактирующих металлов и свойства микроконтактов с сужением", ЖЭТФ **86**, 1742 (1984) [A. V. Zaitsev, "Quasiclassical equations of the theory of superconductivity for contiguous metals and the properties of constricted microcontacts", Sov. Phys. JETP **59**, 1015 (1984)].
7. M. Hurd, S. Datta, and P. F. Bagwell, "Current-voltage relation for asymmetric ballistic superconducting junctions", Phys. Rev. B **54**, 6557 (1996).
8. V. S. Shumeiko, E. N. Bratus, and G. Wendin, "Scattering theory of superconductive tunneling in quantum junctions", Low Temp. Phys. **23**, 181 (1997).
9. A. Bardas and D. V. Averin, "Electron transport in mesoscopic disordered superconductor–normal-metal–superconductor junctions", Phys. Rev. B **56**, R8518 (1997).
10. F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov, "Odd triplet superconductivity and related phenomena in superconductor-ferromagnet structures", Rev. Mod. Phys. **77**, 1321 (2005).
11. M. G. Blamire and J. W. A. Robinson, "The interface between superconductivity and magnetism: understanding and device prospects", J. of Phys.: Condens. Matter **26**, 453201 (2014).
12. А. С. Мельников, С. В. Миронов, А. В. Самохвалов, А. И. Буздин, "Сверхпроводящая спинтроника: современное состояние и перспективы", УФН **192**, 1339 (2022) [A. S. Mel'nikov, S. V. Mironov, A. V. Samokhvalov, and A. I. Buzdin, "Superconducting spintronics: state of the art and prospects", Phys.-Uspekhi **65**, 1248 (2022)].
13. M. Eschrig, "Spin-polarized supercurrents for spintronics: a review of current progress", Rep. Prog. Phys. **78**, 104501 (2015).
14. A. Millis, D. Rainer, and J. A. Sauls, "Quasiclassical theory of superconductivity near magnetically active interfaces", Phys. Rev. B **38**, 4504 (1988).
15. M. Fogelström, "Josephson currents through spin-active interfaces", Phys. Rev. B **62**, 11812 (2000).
16. E. Zhao, T. Löfwander, and J. A. Sauls, "Nonequilibrium superconductivity near spin-active interfaces", Phys. Rev. B **70**, 134510 (2004).
17. M. Eschrig, "Distribution functions in nonequilibrium theory of superconductivity and Andreev spectroscopy in unconventional superconductors", Phys. Rev. B **61**, 9061 (2000).
18. M. S. Kalenkov and A. D. Zaikin, "Absence of fractional ac Josephson effect in superconducting junctions", Phys. Rev. B **110**, 134521 (2024).