Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 8, с. 617 – 625 © 2026 г. 25 октября

Генерация второй гармоники при облучении сверхпроводящих пленок структурированным светом[1)]

О. Б. Зуев[+*2)], *А. С. Мельников*[+×]

[+]*Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

[*]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[×]*Институт физики микроструктур РАН, 603950 Н. Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 22 июля 2026 г.
После переработки 5 сентября 2026 г.
Принята к публикации 7 сентября 2026 г.

На основе нестационарной теории Гинзбурга–Ландау выполнен расчет нелинейного отклика на второй гармонике сверхпроводящего конденсата под действием облучения структурированным светом (в частности, параксиальными Лагерр–Гауссовыми пучками). Рассмотрены два механизма нелинейности: нелинейность, связанная с модуляцией сверхтекучей плотности за счет потенциала электрон-дырочного разбаланса, сгенерированного электромагнитной волной, и внутренний диодный эффект в сверхпроводящей гибридной структуре, обусловленный совместным действием спин-орбитального взаимодействия Рашба и обменного поля. Показано, что оба механизма приводят к переизлучению волны с удвоенным орбитальным моментом пучка накачки, но имеют различные правила отбора и разные формы дифракционных картин. Для частного случая тонкой сверхпроводниковой пленки получены распределения интенсивности дифракционной картины в дальней зоне и исследована модовая структура рассеянного излучения.

DOI: 10.7868/S3034576626100161

Введение. В последние годы пучки структурированного света прочно вошли в арсенал экспериментальной физики как эффективный инструмент исследования электронных характеристик конденсированных сред, а также управления их свойствами. Использование структурированного света расширяет набор управляющих параметров воздействия на вещество: к частоте, интенсивности и поляризации добавляется пространственная фаза поля. Наиболее удобным с экспериментальной точки зрения примером являются Лагерр–Гауссовы (ЛГ) пучки с фазовым множителем $\exp(\mathrm{i}m\varphi)$: каждый фотон такой моды несет орбитальный угловой момент $m\hbar$ [1–4]. Поэтому ЛГ-пучки служат удобным эталоном при описании оптических переходов, фототоков и нелинейной конверсии частоты, избирательных по орбитальному моменту. [5–11]. В сверхпроводниках эта идея имеет дополнительный смысл: электромагнитная волна не только возбуждает квазичастицы, но и непосредственно индуцирует сверхтекучую скорость конденсата (бездиссипативные токи). Если отклик сверхпроводника нелинеен, фотоиндуцированный сверхтекучий ток становится источником когерентного излучения на новых частотах.

Генерация второй гармоники (ГВГ) особенно удобна для бесконтактного зондирования такой нелинейности. Объектом для измерения является дифракционная картина в дальней зоне, а не локальный ток в сверхпроводнике. При этом сигнал на второй гармонике может нести информацию о пространственной структуре источника, т.е. о том, какие азимутальные и радиальные компоненты сверхтока были возбуждены в пленке. Кроме того, существуют оптические сортировщики ЛГ-мод, которые преобразуют различные моды в разные выходные каналы и тем самым позволяют измерять модовый состав излучения, а не только его суммарную мощность [12]. Поэтому предсказания для долей орбитальных гармоник и радиальных профилей являются непосредственно проверяемыми. Близкие по духу работы обсуждали передачу углового момента света сверхпроводящему конденсату и оптическую запись вихревых конфигураций [13, 14]. ГВГ в двумерных сверхпроводниках ранее исследовалась также во флуктуационном режиме, в том числе для монослойных и изинговских систем [15, 16].

[1)]См. дополнительный материал к данной статье на сайте нашего журнала www.jetpletters.ru

[2)]e-mail: zuev.ob@phystech.edu

В отличие от этих работ, ниже мы рассматриваем когерентный отклик сформировавшегося сверхпроводящего конденсата ниже T_c на пространственно структурированную накачку.

В настоящей работе мы рассматриваем другую, но экспериментально связанную задачу: как сверхпроводящая пленка переизлучает вторую гармонику, когда ее возбуждает ЛГ-накачка с заданными индексами (p, m). Здесь p – радиальный индекс ЛГ-моды, а m – ее азимутальный индекс.

В стандартной модели электродинамики сверхпроводника квадратичный по полю источник отсутствует (имеется лишь кубичная по полю волны нелинейность [17, 18]). В данной работе мы рассмотрим обобщения стандартной модели, которые позволяют учесть два качественно различных механизма квадратичного отклика. Первый связан с электрон–дырочной асимметрией в сверхпроводнике: мнимая часть релаксационной константы создает линейную модуляцию величины параметра порядка за счет генерации потенциала электрон-дырочного разбаланса, а ее произведение с линейной сверхскоростью дает ток на частоте 2ω [19, 20], где ω – частота падающего излучения. Второй возникает в системах с внутренним сверхпроводящим диодным эффектом, где одновременно нарушены пространственная инверсия и инверсия относительно обращения времени. В пленке с взаимодействием Рашбы и обменным полем появляется выделенный вектор $\mathbf{u}_0 = \mathbf{n} \times \mathbf{h}$, и ток становится нелинейной функцией сверхскорости [21–27]. Здесь $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к пленке, а $\mathbf{h}$ – единичный вектор в направлении обменного поля. В работе [24] та же нелинейность приводила к генерации фотогальванического постоянного тока и эффекту сверхпроводящей фазовой батареи; здесь мы используем этот механизм нелинейности как источник второй гармоники рассеянной волны. В близкой задаче о вихрях в сверхпроводниках с внутренним диодным эффектом та же нелинейность приводит к хиральному искажению сверхтекучей скорости, нецентральным силам взаимодействия вихрей и анизотропии поверхностного барьера [28].

Одна из наших задач в данной публикации – рассмотреть эти два механизма квадратичной нелинейности и показать, что структурированная накачка позволяет различать их не только по величине сигнала, но и по особенностям дифракционной картины. Линейная сверхтекучая скорость $\mathbf{v}_{s,\omega}$, индуцированная полем на частоте ω, является общей для обоих механизмов: ее надо найти один раз из задачи экранирования падающей волны. Затем она входит в два разных квадратичных источника. В случае наличия электрон-дырочной асимметрии структура источника имеет вид “скаляр × вектор”, $\Delta_1 \mathbf{v}_{s,\omega}$, и дает значения орбитального момента $m' = 2m \pm 1$. В диодном случае источник имеет вид “вектор × вектор”, содержит ось $\mathbf{u}_0$ и дает компоненты углового момента $m' = 2m, 2m \pm 2$. Поэтому, например, для $m = 1$ электрон-дырочный вклад содержит нечетные каналы $m' = 1, 3$, а диодный – четные каналы $m' = 0, 2, 4$.

Это различие приводит к различным дифракционным картинам. Электрон-дырочные моды переизлученной волны находятся в ортогональных циркулярных поляризациях и не интерферируют между собой; поэтому интенсивность зависит только от радиального импульса q. В диодном случае при линейной или эллиптической ЛГ-накачке разные гармоники $m' = 2m, 2m \pm 2$ попадают в одну и ту же циркулярную компоненту поля. Их интерференция дает в полной интенсивности угловой член вида $\cos 2(\varphi - \varphi_u)$, поскольку переизлученные гармоники отличаются по орбитальному моменту на 2. Значение m меняет сами номера гармоник и радиальные профили, но не период этой основной угловой модуляции.

Параксиальная ЛГ-накачка и линейная сверхскорость. Рассмотрим сверхпроводящую пленку толщины d в плоскости $z = 0$. Падающий пучок распространяется вдоль нормали $\mathbf{n}$, а его фокус расположен на поверхности. Скалярную радиальную огибающую ЛГ-моды, из которой в используемом угловом TE/TM-представлении строятся компоненты векторного поля, запишем как

$$U_p^m(\rho) = \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_0}\right)^{|m|} L_p^{|m|}\left(\frac{2\rho^2}{w_0^2}\right), \mathrm{e}^{-\rho^2/w_0^2}, \qquad (1)$$

где w_0 – характерная ширина Лагерр–Гауссова пучка, а p и m – его радиальная и азимутальная моды соответственно.

Для выделения компоненты поля параллельной поверхности пленки, а, как следствие, и направления сверхтекучего тока, удобно ввести $\mathbf{Q}_\omega = \mathbf{n} \times \mathbf{B}_\omega$, где $\mathbf{B}_\omega$ – комплексная амплитуда падающего магнитного поля на освещенной поверхности. В лабораторном циркулярном базисе

$$Q_{\omega,\pm} \equiv Q_{\omega,x} \pm \mathrm{i} Q_{\omega,y} = B_0 \mathrm{i}^m \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m\pm1)\varphi} a_\pm(\rho), \qquad (2)$$

где

$$a_\pm(\rho) = \frac{u_p \mp \mathrm{i} u_s}{k}\left(\partial_\rho \mp \frac{m}{\rho}\right) U_p^m(\rho). \qquad (3)$$

Здесь $k = \omega/c$ – волновое число в вакууме, а величина B_0 задает характерную амплитуду магнитно-

го поля падающей волны. Комплексные числа u_s, u_p задают веса s- (TE-) и p- (TM-) поляризаций в угловом спектре пучка. Соотношение между огибающей Лагерр–Гауссовых пучков и полями E_ω, B_ω, а также значение компоненты E_z для модуляции сверхпроводящего параметра порядка, представлены в дополнительных материалах. Индекс m характеризует азимутальную фазу скалярной огибающей и продольной компоненты векторного пучка. В лабораторных циркулярных компонентах поперечного поля к нему добавляется поляризационный вклад ± 1, поэтому отдельные поперечные компоненты имеют азимутальные индексы $m \pm 1$.

Все поля далее являются комплексными амплитудами. Физическое поле восстанавливается как

$$\mathbf{E}(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}_\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{E}_{2\omega}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}\right].$$

Поэтому квадратичные источники на 2ω записываются через произведения комплексных амплитуд, например, $\mathbf{v}_{s,\omega}\cdot\mathbf{v}_{s,\omega}$ или $\mathbf{v}_{s,\omega}\cdot\Delta_1$, без преждевременного взятия вещественной части.

Линейная сверхскорость $\mathbf{v}_{s,\omega}$ является общей для обоих механизмов. В случае тонкой отражающей пленки ток почти однороден по толщине при $d \ll \ll |\lambda_{\mathrm{eff}}(\omega)|$, где $\lambda_{\mathrm{eff}}^{-2} = \lambda^{-2} - \frac{4\pi\mathrm{i}\sigma_n\omega}{c^2}$. Здесь λ – лондоновская глубина проникновения, а σ_n – проводимость нормальной компоненты. Из граничного условия для плотности тока, проинтегрированной по толщине пленки ($\mathbf{J}_\omega = \int_0^d \mathbf{j}_\omega(z)dz$)

$$2\mathbf{Q}_\omega = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_\omega, \qquad \mathbf{J}_\omega \simeq -2e\Delta_0^2 d\,\mathbf{v}_{s,\omega}. \tag{4}$$

Здесь $e > 0$ – модуль заряда электрона, а Δ_0 – равновесная амплитуда параметра порядка. Получаем

$$\mathbf{v}_{s,\omega} \simeq -\frac{8eaT_c\xi_0^2\lambda_{\mathrm{eff}}^2(\omega)}{c\hbar^2 d}\,\mathbf{Q}_\omega = -\frac{c}{4\pi e\Delta_0^2 d}\frac{\lambda_{\mathrm{eff}}^2(\omega)}{\lambda^2}\,\mathbf{Q}_\omega. \tag{5}$$

Здесь a – коэффициент разложения Гинзбурга–Ландау, а ξ_0 – масштаб длины когерентности на нулевой температуре. В низкочастотном пределе $\lambda_{\mathrm{eff}} \to \lambda$ это обычное выражение для сверхтока в тонкой пленке. При $d \gtrsim |\lambda_{\mathrm{eff}}|$ нужно учитывать распределение поля по толщине. Подробнее о нестационарном уравнении Гинзбурга–Ландау и граничных условиях можно прочитать в дополнительных материалах.

ГВГ в сверхпроводнике с эффектом электрон-дырочной асимметрии. Для описания механизма нелинейности, связанного с генерацией потенциала электрон-дырочного разбаланса, мы используем подход, основанный на нестационарной теории Гинзбурга–Ландау. Исходное уравнение для параметра порядка имеет вид [20]

$$-\Gamma(\hbar\partial_t - 2\mathrm{i}e\phi)\Delta = -aT_c\epsilon\Delta + b|\Delta|^2\Delta + \\ + aT_c\xi_0^2\left(-\mathrm{i}\nabla + \frac{2\pi}{\Phi_0}\mathbf{A}\right)^2\Delta. \tag{6}$$

Здесь $\epsilon = (T_c - T)/T_c$, $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$, а $\Gamma = \pi a/8 + \mathrm{i}\gamma$. В уравнении (6) Δ – комплексный параметр порядка, ϕ и $\mathbf{A}$ – скалярный и векторный электромагнитные потенциалы, а b – коэффициент разложения Гинзбурга–Ландау. Величина Φ_0 является квантом магнитного потока, Γ – комплексной релаксационной константой, а γ – ее мнимой частью. Малый параметр электрон-дырочной асимметрии равен $\nu = \frac{8\gamma}{\pi a}$. Заметим, что условия применимости нестационарной теории Гинзбурга–Ландау предполагают ограничение на рабочие частоты $\omega\tau_{ph} \ll 1$ (где τ_{ph} – время электрон-фононной релаксации). Исходя из этого критерия, а также учитывая, что даже в рамках более корректного микроскопического описания отклик сверхпроводящего конденсата должен исчезать при частотах, существенно превышающих величину сверхпроводящей щели, можно заключить, что в возможных экспериментах оптимальные частоты должны лежать в терагерцовом диапазоне.

Используем разложение сверхпроводящего параметра порядка в виде $\Delta = (\Delta_0 + \Delta_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi}$, $\Delta_0^2 = aT_c\epsilon/b$, и вводим инвариантный потенциал зарядового разбаланса $\widetilde{\phi} = \phi - (\hbar/2e)\partial_t\chi$. Здесь χ – фаза параметра порядка, а Δ_1 – линейная поправка к его амплитуде. В электрон-дырочном механизме продольное поле $E_{\omega,z}$ входит в граничное условие для $\widetilde{\phi}_\omega$ и тем самым создает поправку Δ_1 к модулю параметра порядка; соответствующий вывод приведен в дополнительных материалах. Линеаризация нестационарного уравнения Гинзбурга–Ландау дает два следующих равенства:

$$-\nabla^2\Delta_1 + q_1^2\Delta_1 = -\frac{2e\tau\nu\Delta_0}{\hbar\xi^2}\,\widetilde{\phi}_\omega, \tag{7}$$

где $q_1^2 = (2 - \mathrm{i}\omega\tau)/\xi^2$, $\xi^2 = \xi_0^2/\epsilon$ и $\tau = \pi\hbar/(8T_c\epsilon)$. Величина τ является временем релаксации Гинзбурга–Ландау, а ξ – длиной когерентности Гинзбурга–Ландау. В результате имеем $\Delta_1 = i^m e^{\mathrm{i}m\varphi}\Delta_\omega U_p^m \propto \nu$, а источник второй гармоники возникает из смешивания этой скалярной поправки с общей линейной сверхскоростью:

$$\mathbf{j}_{\mathrm{eh}}^{(2\omega)}(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{j}_{\mathrm{eh},2\omega}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}\right], \quad \mathbf{j}_{\mathrm{eh},2\omega} = -2e\Delta_0\Delta_1\mathbf{v}_{s,\omega}. \tag{8}$$

После усреднения по толщине и перехода к лабора-

торным циркулярным компонентам $j^{(2\omega)}_{\mathrm{eh},\pm} = j^{(2\omega)}_{\mathrm{eh},x} \pm \mathrm{i}j^{(2\omega)}_{\mathrm{eh},y}$ получаем, с точностью до общего множителя,

$$j^{(2\omega)}_{\mathrm{eh},+} = \mathcal{A}_{\mathrm{eh}} U_p^m a_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+1)\varphi},$$
$$j^{(2\omega)}_{\mathrm{eh},-} = \mathcal{A}_{\mathrm{eh}} U_p^m a_- \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m-1)\varphi}, \qquad (9)$$

где $\mathcal{A}_{\mathrm{eh}} = (-1)^m \frac{cB_0}{2\pi\Delta_0 d} \frac{\lambda^2_{\mathrm{eff}}(\omega)}{\lambda^2} \Delta_\omega \propto \nu$. Следовательно, набор азимутальных мод в случае рассматриваемого механизма нелинейности соответствует значениям угловых моментов

$$m'_{\mathrm{eh}} = 2m-1,\ 2m+1. \qquad (10)$$

ГВГ в сверхпроводнике с диодным эффектом. Второй механизм связан с внутренним сверхпроводящим диодным эффектом. Он может возникать, например, в гибридной тонкопленочной системе сверхпроводник–ферромагнитный изолятор, где одновременно нарушены пространственная инверсия и симметрия обращения времени. В рассматриваемой ситуации эти две симметрии нарушаются соответственно спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и обменным полем. Их совместное действие выделяет в плоскости пленки полярное направление $\mathbf{u}_0 = \mathbf{n} \times \mathbf{h}$, где $\mathbf{n}$ – нормаль к пленке, а $\mathbf{h}$ – единичный вектор в направлении обменного поля. Физически это означает, что сверхтоки вдоль $\mathbf{u}_0$ и против $\mathbf{u}_0$ уже не являются полностью эквивалентными: зависимость тока от сверхтекучей скорости получает нечетную относительно направления тока нелинейную поправку.

Следуя работе [24], удобно разлагать ток не около состояния с нулевой сверхскоростью, а около состояния с нулевым полным равновесным током. Поэтому мы вводим $\widetilde{\mathbf{v}}_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_{s0}$, где $\mathbf{v}_{s0}$ – равновесное смещение сверхтекучей скорости, компенсирующее спонтанный ток, возникающий в нецентросимметричной магнитной структуре [24, 29]. В этих обозначениях нелинейная связь ток–сверхскорость записывается как

$$\mathbf{j}_s = -e\Delta_0^2 \left[2\widetilde{\mathbf{v}}_s - \frac{\tilde{v}_s^2}{v_c}\mathbf{u}_0 - \frac{2(\mathbf{u}_0 \cdot \widetilde{\mathbf{v}}_s)}{v_c}\widetilde{\mathbf{v}}_s \right]. \qquad (11)$$

Первый член здесь является обычным лондоновским откликом, тогда как два оставшихся члена описывают диодную нелинейность. Именно они отвечают за то, что переменная сверхскорость $\mathbf{v}_s, \omega$, наведенная падающей волной, создает квадратичный по полю ток на частоте 2ω. В отличие от электрон-дырочного механизма, здесь не требуется амплитудная модуляция параметра порядка: вторая гармоника возникает непосредственно из нелинейной зависимости сверхтока от сверхскорости.

Параметр v_c задает характерную сверхскорость, при которой диодная поправка становится существенной по сравнению с линейным лондоновским током. Эквивалентно силу этого эффекта удобно характеризовать длиной η и безразмерным параметром $\zeta = \eta/\xi$. Параметр η служит мерой интенсивности кубического градиентного члена в эффективной энергии: чем больше η, тем сильнее асимметрия сверхтока относительно направления движения конденсата. В тонкопленочном низкочастотном пределе это приводит к оценке $v_{s,\omega}/v_c \sim (\eta/d)(B_0/H_{cm})(\xi/\lambda)$, которая отражает как собственную силу диодной нелинейности, так и усиление сверхтекучей скорости в пленке толщиной $d \ll \lambda$. Здесь H_{cm} – термодинамическое критическое поле.

Микроскопически параметр η определяется произведением двух факторов: магнитного нарушения симметрии обращения времени и спин-орбитального нарушения инверсии [30]. Поэтому по порядку величины $\eta \sim (E_{\mathrm{ex}}/T_c)(v_{\mathrm{so}}/v_F)\xi_0$ [24, 31]. Здесь E_{ex} – характерная энергия обменного, или зеемановского, расщепления в сверхпроводящей гибридной структуре; v_{so} – скорость, характеризующая силу рашбовского спин-орбитального взаимодействия; v_F — скорость Ферми; ξ_0 – чистая длина когерентности. Такая форма подчеркивает, что диодная нелинейность исчезает, если убрать либо обменное поле, либо спин-орбитальную связь. Для типичных гибридных структур разумный интервал оценок составляет $\zeta \sim 0.1 - 1$. Эта оценка согласуется с анализом диодных сверхпроводниковых структур, где тот же кубический градиентный член приводит к хиральной деформации сверхтекучей скорости в вихревом состоянии и нецентральному взаимодействию вихрей [28].

Комплексная амплитуда источника на частоте 2ω равна

$$\mathbf{j}_{\mathrm{D},2\omega} = \frac{e\Delta_0^2}{2v_c} \left[(\mathbf{v}_{s,\omega} \cdot \mathbf{v}_{s,\omega})\mathbf{u}_0 + 2(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}_{s,\omega})\mathbf{v}_{s,\omega} \right]. \qquad (12)$$

Для $\mathbf{u}_0 \parallel x$ получаем

$$j^{(2\omega)}_{\mathrm{D},+} = \mathcal{A}_{\mathrm{D}} \left[a_+^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+2)\varphi} + 2a_+a_- \mathrm{e}^{2\mathrm{i}m\varphi} \right],$$
$$j^{(2\omega)}_{\mathrm{D},-} = \mathcal{A}_{\mathrm{D}} \left[2a_+a_- \mathrm{e}^{2\mathrm{i}m\varphi} + a_-^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m-2)\varphi} \right], \qquad (13)$$

где $\mathcal{A}_{\mathrm{D}} = (-1)^m \frac{c^2 B_0^2}{32\pi^2 e\Delta_0^2 v_c d^2} \left(\frac{\lambda^2_{\mathrm{eff}}(\omega)}{\lambda^2} \right)^2 \propto \eta$. В результате получаем соответствующие значения угловых моментов

$$m'_{\mathrm{D}} = 2m-2,\ 2m,\ 2m+2. \qquad (14)$$

Экранировка и излучение на второй гармонике. Для корректного расчета излучения на второй гармонике нам необходимо учесть как ток нелинейного источника (приведенный выше), так и линейную экранировку этого тока на частоте 2ω:

$$\mathbf{j}^{(2\omega)} = \mathbf{j}_{\rm ph}^{(2\omega)} + \mathbf{j}_M^{(2\omega)}, \quad \mathbf{j}_M^{(2\omega)} = \frac{\mathrm{i}c^2}{8\pi\omega\lambda^2}\mathbf{E}^{(2\omega)} + \sigma_n\mathbf{E}^{(2\omega)}. \tag{15}$$

Тогда на второй гармонике получаем уравнение для Фурье-компонент

$$-\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}_2 - \lambda_2^{-2}\mathbf{E}_2 = -\frac{8\pi\mathrm{i}\omega}{c^2}\mathbf{j}_{\rm ph}^{(2\omega)} + \lambda^{-2}\nabla\widetilde{\phi}_2, \tag{16}$$

где $\lambda_2^{-2} = \lambda^{-2} - \frac{8\pi\mathrm{i}\omega\sigma_n}{c^2}$. Последний член в (16) важен для описания z-компоненты поля, но его поперечная часть мала как $(\lambda/w_0)^2$ для параксиальной накачки. Поэтому для излучаемого поперечного поля решается одномерная задача

$$\left[\partial_z^2 - \kappa_2^2(q)\right] E_\pm(q,z) = -\frac{8\pi\mathrm{i}\omega}{c^2} j_\pm^{(2\omega)}(q,z), \tag{17}$$

где $\kappa_2(q) = \sqrt{\lambda_2^{-2} + q^2}$. В вакууме вместо κ_2 мы имеем $K_2(q) = \sqrt{k_2^2 - q^2}$, $k_2 = 2\omega/c$. В дальней зоне над пленкой получаем выражение для электрического поля в виде:

$$E_{m',\pm}^{(\sigma)}(\rho,\varphi,z) = -\frac{8\pi\mathrm{i}\omega}{c^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\varphi}\int_0^\infty q\,dq \times \\ \times\, \mathcal{J}_{m',\pm}^{(\sigma)}(q) T_-(q) J_{m'}(q\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K_2(q)z}. \tag{18}$$

Индекс σ принимает значения eh и D, соответствующие электрон-дырочному и диодному механизмам нелинейности. Здесь $\mathcal{J}_{m',\pm}^{(\sigma)}(q)$ – преобразование Фурье–Бесселя соответствующей средней по толщине объемной плотности нелинейного тока. Для симметричной ультратонкой пленки и однородного по толщине источника

$$T_- = T_+ \simeq -\frac{\lambda_2^2}{1 - 2\mathrm{i}K_2\lambda_2^2/d}. \tag{19}$$

Вывод формулы (19) в дополнительных материалах.

Заметим, что для упрощения изложения в случае сверхпроводника с диодным эффектом мы пренебрегаем здесь влиянием магнитной восприимчивости тонкой пленки ферромагнитного изолятора на электродинамику излучения на второй гармонике.

Наблюдаемая интенсивность в поперечном импульсном пространстве определяется через модуль вектора Пойнтинга в дальней зоне. При $E_\pm = E_x \pm \mathrm{i}E_y$

$$I^{(\sigma)}(q_x,q_y) = \frac{c}{16\pi}\left(|E_+^{(\sigma)}|^2 + |E_-^{(\sigma)}|^2\right), \tag{20}$$

а радиальный профиль и доля мощности на гармонике m' равны

$$\bar{I}^{(\sigma)}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I^{(\sigma)}(q\cos\theta, q\sin\theta)\,d\theta, \tag{21}$$

$$\mathcal{P}_{m'}^{(\sigma)} = \frac{\sum_{s=\pm}\int_0^{k_2} q\,dq\,|E_{m',s}^{(\sigma)}(q)|^2}{\sum_{m'',s}\int_0^{k_2} q\,dq\,|E_{m'',s}^{(\sigma)}(q)|^2}. \tag{22}$$

Данные выражения позволяют нам оценить интенсивности $I_{\rm eh}^{(2\omega)}$ и $I_{\rm D}^{(2\omega)}$, приведенные ниже в выражениях (26). Величины $\mathcal{P}_{m'}^{(\sigma)}$ могут быть измерены экспериментально. После спектрального выделения частоты 2ω излучение необходимо направить на сортировщик ЛГ-мод, который пространственно разделяет каналы с разными азимутальными и радиальными индексами [12].

Дифракционные картины в дальней зоне. На рисунке 1 мы представляем дифракционные картины излучения на второй гармонике, возникающие для случаев двух разных механизмов, рассмотренных в работе. Размер картины на экране определяется фраунгоферовской дифракцией: $\theta_{\rm dif} \sim (k_2 w_0)^{-1}$ и $\rho_{\rm dif} \sim z/(k_2 w_0)$. Для сверхпроводника с электрон-дырочной асимметрией при $p = m = 1$ доминирует кольцо с центральным минимумом. Такая картина связана с произведением $U_p^m a_\pm$: производная ЛГ-профиля добавляет радиальные узлы, но угловая зависимость исчезает из полной интенсивности после суммирования ортогональных циркулярных поляризаций. Диодный источник содержит a_+^2, a_+a_- и a_-^2; кроме того, вектор $\mathbf{u}_0$ выбирает ось в плоскости. Поэтому форма дифракционных картин меняется качественно: интенсивность перераспределяется между центральной областью, лепестками и внешним кольцом.

Для механизма, связанного с генерацией электрон-дырочного разбаланса, две гармоники $2m \pm 1$ находятся в ортогональных циркулярных компонентах:

$$\mathbf{E}_{\rm eh} = A(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+1)\varphi}\mathbf{e}_+ + B(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m-1)\varphi}\mathbf{e}_-. \tag{23}$$

Так как $\mathbf{e}_+ \cdot \mathbf{e}_-^* = 0$, полная интенсивность равна $|A|^2 + |B|^2$ и не содержит интерференционного члена $\cos 2\varphi$. В диодном случае разные гармоники появляются в одной и той же циркулярной компоненте, например

$$E_{\mathrm{D},+} = A_+(q)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+2)\varphi} + B_+(q)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}m\varphi}, \tag{24}$$

(для $E_{\mathrm{D},-}$ аналогично), и поэтому получаем

$$I_{\rm D}(q,\varphi) = I_0(q) + I_2(q)\cos\{2[\varphi - \varphi_u] + \delta(q)\}. \tag{25}$$

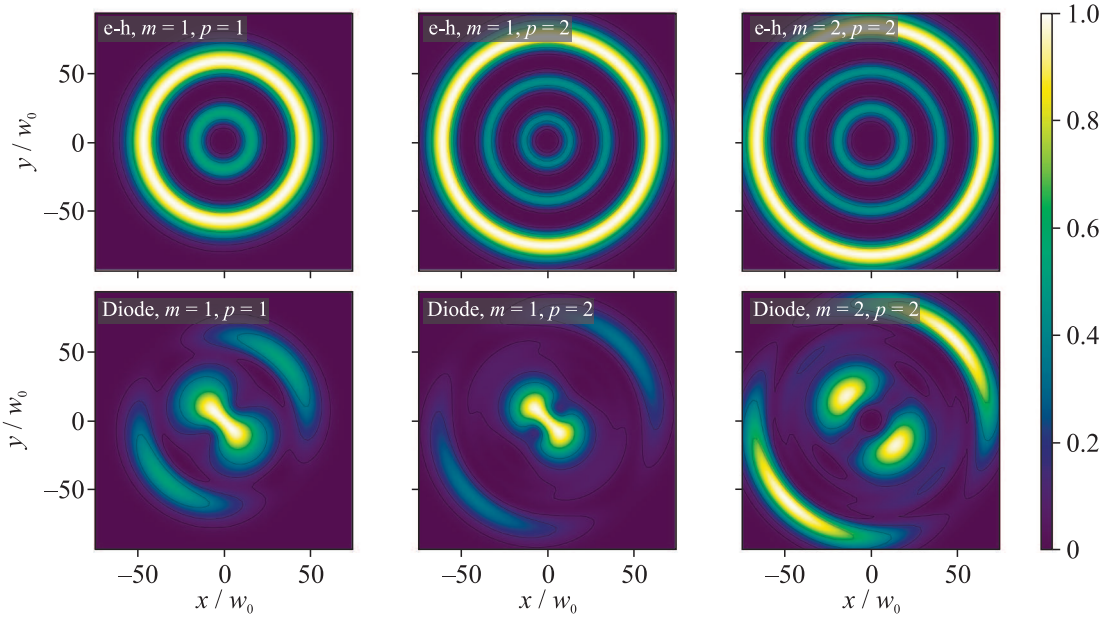

Рис. 1. (Цветной онлайн) Дифракционные картины излучения на второй гармонике, создаваемого фотоиндуцированными токами в тонкой пленке. Показана нормированная интенсивность $I(x,y)/I_{\max}$ в плоскости детектора на большом расстоянии z. Верхний ряд соответствует сверхпроводнику с электрон-дырочной асимметрией, нижний ряд – сверхпроводнику с диодным эффектом. Столбцы соответствуют $(m,p) = (1,1), (1,2), (2,2)$. Во всех панелях взята ЛГ-накачка с линейной поляризацией $u_s = u_p = 1/\sqrt{2}$. В диодном случае для $m = 1$ присутствует канал $m' = 0$, что допускает ненулевую интенсивность в центре картины, тогда как для $m = 2$ разрешены только $m' = 2, 4, 6$, и интенсивность в центре картины подавлена.

Здесь φ_u задает направление $\mathbf{u}_0$, а $\delta(q)$ – фаза комплексного интерференционного коэффициента между соседними модами в (24). Период этой модуляции не зависит от входного m: угловые моменты соседних гармоник всегда отличаются на два.

Интенсивность излучения и ее распределение по модам. На рисунке 2 изображены усредненные по углу радиальные профили дифракционной картины второй гармоники. Для выбранной линейной поляризации излучения и углового момента $m = 1$ в сверхпроводнике с электрон-дырочной асимметрией мощность делится между $m' = 1$ и $m' = 3$. Диодный источник разрешает четные гармоники; в примере с $m = 1$ максимальной интенсивностью обладает гармоника с $m' = 2$, а гармоника с $m' = 0$ отвечает за интенсивность на малых углах (см. рис. 2). Модовый сортировщик дает прямой способ проверить эти предсказания: он не только фиксирует форму дифракционной картины, но и раскладывает поле по ортогональным ЛГ-каналам, что особенно полезно при слабых боковых максимумах. Парциальные модовые интенсивности, вычисленные по (22), показаны на рис. 3.

Из формул (18), (19), (20) мы получаем, что по порядку величины интенсивности излучения на второй гармонике для двух рассматриваемых механизмов, нормированные на интенсивность падающей волны $I_\omega = cB_0^2/8\pi$, имеют вид:

$$\frac{I_{\rm eh}^{(2\omega)}}{I_\omega} \sim (k\lambda)^2 \nu^2 \left(\frac{\xi}{w_0}\right)^2 \left(\frac{B_0}{H_{cm}}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^4,$$

$$\frac{I_{\rm D}^{(2\omega)}}{I_\omega} \sim (k\lambda)^2 \zeta^2 \left(\frac{B_0}{H_{cm}}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^4. \qquad (26)$$

Эти оценки не требуют, чтобы оба механизма обязательно измерялись в одном и том же образце: они задают масштаб сигнала на второй гармонике для двух разных типов сверхпроводящих пленок или для образца, где оба условия выполнены одновременно. Фактор $(\lambda/d)^4$ в (26) является следствием стандартного усиления плотности тока и сверхтекучей скорости в тонкопленочном образце с толщиной $d \ll \lambda$ и, соответственно, усиления интенсивности второй гармоники [20].

Зависимость электрон-дырочного механизма от ширины пучка связана с граничным условием для потенциала зарядового разбаланса $\widetilde{\phi}_\omega$. Как показано в дополнительных материалах, $\partial_z \widetilde{\phi}_\omega\big|_{z=0} = -E^{(i)}_{\omega,z} \propto \propto \omega \sin\theta\, B_0$. Для параксиального пучка $\sin\theta \simeq k_\perp/k$,

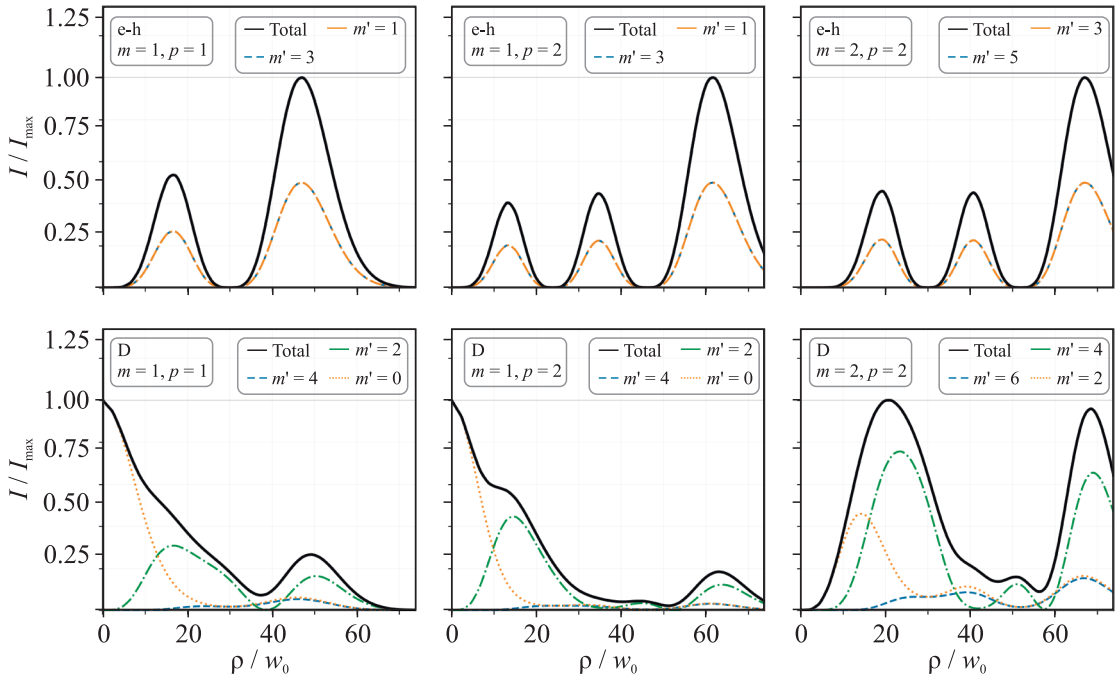

Рис. 2. (Цветной онлайн) Усредненные по углу радиальные профили дифракционной картины второй гармоники. Показана нормированная радиальная зависимость $\bar{I}(\rho)/I_{\max}$, где $\bar{I}(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I(\rho,\varphi)\,d\varphi$ – угловое среднее интенсивности излучения на второй гармонике в плоскости детектора на большом расстоянии z; $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Верхний ряд соответствует сверхпроводнику с электрон-дырочной асимметрией, нижний ряд – сверхпроводнику с диодным эффектом. Три столбца соответствуют падающей ЛГ-накачке с $(m,p) = (1,1)$, $(1,2)$ и $(2,2)$; во всех случаях взята линейная поляризация $u_s = u_p = 1/\sqrt{2}$. Черная сплошная кривая рассчитана по полному когерентному полю второй гармоники, а цветные кривые показывают вклады отдельных азимутальных каналов m' после углового усреднения: $m' = 2m \pm 1$ для электрон-дырочного механизма и $m' = 2m-2, 2m, 2m+2$ для диодного механизма

а характерный поперечный волновой вектор определяется шириной пучка, $k_\perp \sim w_0^{-1}$. Поэтому $\widetilde{\phi}_\omega$, а вместе с ним модуляция параметра порядка Δ_1, содержат дополнительный множитель $\sim \xi/w_0$. Диодный механизм, напротив, возникает непосредственно из квадратичной зависимости сверхтока от индуцированной сверхскорости и не требует возбуждения $\widetilde{\phi}_\omega$, поэтому такого дополнительного фактора ξ/w_0 в нем нет.

Используя оценки (26), можно получить параметрическое сравнение интенсивностей двух механизмов нелинейности. Если обе нелинейности присутствуют в одном образце или если сравниваются образцы с одинаковыми λ, ξ, d, w_0 и амплитудой накачки, то

$$\frac{I_{\mathrm{D}}}{I_{\mathrm{eh}}} \sim \frac{\zeta^2}{\nu^2}\left(\frac{w_0}{\xi}\right)^2. \tag{27}$$

Относительная величина диодного вклада определяется параметром ζ, тогда как электрон-дырочный механизм контролируется параметром ν и дополнительно подавлен малым фактором ξ/w_0. Поэтому для параксиального пучка с $w_0 \gg \xi$, при типичных значениях параметров $\zeta \sim 0.1{-}1$ и $\nu \sim 10^{-1}{-}10^{-2}$ диодный механизм может преобладать для структур с внутренним диодным эффектом.

Для иллюстрации возьмем характерные по порядку величины для тонкой пленки NbN параметры: $\lambda = 4\times10^{-5}$ см, $\xi = 5\times10^{-7}$ см, $d = 10^{-6}$ см, $H_{cm} = 1.2\times10^3$ Э, $w_0 = 10^{-1}$ см и $B_0 = 1$ Гс. При $f = 1$ ТГц формулы (26) дают

$$\frac{I_{\mathrm{D}}^{(2\omega)}}{I_\omega} \sim 10^{-6}{-}10^{-4}, \quad \frac{I_{\mathrm{eh}}^{(2\omega)}}{I_\omega} \sim 10^{-18}{-}10^{-16}$$

для $\zeta = 0.1{-}1$ и $\nu = 10^{-2}{-}10^{-1}$ соответственно. То есть конкретно для NbN электрон-дырочным механизмом можно заведомо пренебречь. Наша теория работает при условии слабого поля, которое в данном случае выполнено: $B_0 \ll H_{cm}\frac{d}{\lambda} \simeq 30$ Гс .

Механизм электрон-дырочной асимметрии дает большую долю переизлучения на второй гармонике для материалов с не слишком малым отношением T_c к энергии Ферми, например, FeSe. Для иллюстрации возьмем характерные по порядку величины

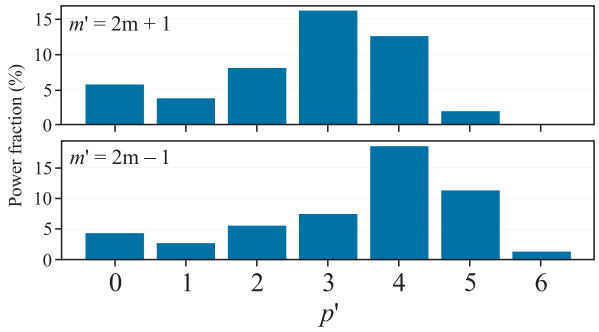

Рис. 3. (Цветной онлайн) Разложение излученного поля второй гармоники по ЛГ-модам для входной моды накачки с индексами $(p, m) = (2, 1)$ в геометрии тонкой сверхпроводящей пленки. Гистограммы показывают долю мощности отдельных выходных ЛГ-каналов на частоте 2ω в зависимости от радиального индекса p'. Верхняя и нижняя панели соответствуют двум разрешенным по спиральности ветвям орбитального момента: $m' = 2m + 1 = 3$ и $m' = 2m - 1 = 1$. Выбор базиса с характерной шириной $w_{2\omega} = w_0/\sqrt{2}$ соответствует квадратичной природе источника второй гармоники и приводит к конечному набору радиальных мод $p' = 0, 1, \ldots, 2p + 2$. Таким образом, рисунок демонстрирует не только правило отбора по азимутальному индексу $m' = 2m \pm 1$, но и конечную структуру возбужденных радиальных ЛГ-мод.

для тонкой пленки FeSe параметры: $\lambda = 10^{-4}$ см, $\xi = 10^{-6}$ см, $d \sim \xi$. При $f = 1$ ТГц, $w_0 = 10^{-2}$ см и $B_0/H_{cm} = d/\lambda = 0.01$ формулы (26) дают

$$\frac{I_{\text{eh}}^{(2\omega)}}{I_\omega} \sim 4 \times 10^{-10} - 4 \times 10^{-9}$$

для $\nu = 0.1 - 0.3$.

Рассматриваемая в нашей работе теория описывает только сверхпроводящий вклад в ГВГ. Как выше, так и ниже T_c имеется также вклад несверхпроводящей компоненты (нормальных квазичастиц). Этот вклад также зависит от температуры в силу изменения концентрации нормальных квазичастиц ниже T_c, однако вблизи критической температуры данная температурная зависимость нормального вклада очень слабая. Сверхпроводящий вклад, как мы видим, напротив, существенно зависит от температуры в области, близкой к T_c и, таким образом, его можно выделить по характерной температурной зависимости при проходе по температуре через T_c (с вычитанием нормального фона). Такого рода эксперимент может использоваться для наблюдения перехода в сверхпроводящее состояние.

Заключение. Мы сформулировали компактную теорию ГВГ структурированного света в сверхпроводящей пленке, где электрон-дырочная асимметрия и внутренний диодный эффект выступают как различные механизмы квадратичной нелинейности. Для параксиальной ЛГ-накачки это приводит к разным правилам отбора: $m' = 2m \pm 1$ для сверхпроводника с электрон-дырочной асимметрией и $m' = 2m, 2m \pm 2$ для сверхпроводника с диодной нелинейностью. Дифракционные картины, радиальные профили и распределения по модам дают взаимодополняющие способы экспериментального различения источников. Абсолютные величины интенсивностей задаются формулами (26): сигнал на второй гармонике от сверхпроводящей пленки с электрон-дырочной асимметрией контролируется параметром ν, а с диодной нелинейностью – безразмерным параметром $\zeta = \eta/\xi$ и выделенной осью $\mathbf{u}_0$. Механизм, связанный с электрон-дырочной асимметрией, оказывается особенно важен в образцах без диодной асимметрии. Экспериментальное измерение предсказанных эффектов может как определить указанные параметры квадратичной нелинейности, так и стать важным для приложений, связанных с использованием структурированного света для управления сверхпроводящими состояниями.

Финансирование работы. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант # 25-12-00042) в части анализа сверхпроводников с электрон-дырочной асимметрией и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 075-15-2025-010) в части расчетов для случая сверхпроводников с внутренним диодным эффектом.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. Б. А. Князев и В. Г. Сербо, "Пучки фотонов с ненулевой проекцией орбитального момента импульса: новые результаты", УФН **188**, 508 (2018) [B. A. Knyazev and V. G. Serbo, "Beams of photons with nonzero orbital angular momentum projection: new results", Phys.-Uspekhi **61**, 449 (2018)].
2. L. Allen, M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw, and J. P. Woerdman, "Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes", Phys. Rev. A **45**, 8185 (1992).
3. A. M. Yao and M. J. Padgett, "Orbital angular momentum: origins, behavior and applications", Adv. Opt. Photonics **3**, 161 (2011).
4. J. Mun, S.-W. Moon, and J. Rho, "Multipole decomposition for interactions between structured optical fields and meta-atoms", Opt. Express **28**, 36756 (2020).
5. G. F. Quinteiro and P. I. Tamborenea, "Twisted-light-induced optical transitions in semiconductors: Free-

carrier quantum kinetics", Phys. Rev. B **82**, 125207 (2010).

6. A. A. Gunyaga, M. V. Durnev, and S. A. Tarasenko, "Photocurrents induced by structured light", Phys. Rev. B **108**, 115402 (2023).
7. A. A. Gunyaga, M. V. Durnev, and S. A. Tarasenko, "Second Harmonic Generation due to the Spatial Structure of a Radiation Beam", Phys. Rev. Lett. **134**, 156901 (2025).
8. J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett, "Second-harmonic generation and the conservation of orbital angular momentum with high-order Laguerre–Gaussian modes", Phys. Rev. A **56**, 4193 (1997).
9. S.-M. Li, L.-J. Kong, Z.-C. Ren, Y. Li, C. Tu, and H.-T. Wang, "Managing orbital angular momentum in second-harmonic generation", Phys. Rev. A **88**, 035801 (2013).
10. E. V. Melik-Gaykazyan, K. L. Koshelev, J.-H. Choi, S. S. Kruk, H.-G. Park, A. A. Fedyanin, and Y. S. Kivshar, "Enhanced Second-Harmonic Generation with Structured Light in AlGaAs Nanoparticles Governed by Magnetic Response," Pis'ma v ZhETF **109**, 129 (2019) [E. V. Melik-Gaykazyan, K. L. Koshelev, J.-H. Choi, S. S. Kruk, H.-G. Park, A. A. Fedyanin, and Y. S. Kivshar, "Enhanced Second-Harmonic Generation with Structured Light in AlGaAs Nanoparticles Governed by Magnetic Response", JETP Lett. **109**, 131 (2019)].
11. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 3rd ed. (Academic Press, Amsterdam, 2008).
12. N. K. Fontaine, R. Ryf, H. Chen, D. T. Neilson, K. Kim, and J. Carpenter, "Laguerre-Gaussian mode sorter", Nat. Commun. **10**, 1865 (2019).
13. T.-T. Yeh, H. Yerzhakov, L. Bishop-Van Horn, S. Raghu, and A. Balatsky, "Quantum printing and induced vorticity in superconductors I: Linearly polarized light", Phys. Rev. Research **7**, 043111 (2025).
14. T.-T. Yeh, H. Yerzhakov, L. Bishop-Van Horn, S. Raghu, and A. Balatsky, "Quantum printing and induced vorticity in superconductors II: Laguerre–Gaussian beam", Phys. Rev. Research **7**, 043112 (2025).
15. М. В. Боев, В. М. Ковалев, "Вклад флуктуаций параметра порядка в генерацию второй гармоники в двумерных мономолекулярных сверхпроводниках", Письма в ЖЭТФ **116**, 173 (2022) [M. V. Boev and V. M. Kovalev, "Contribution of Fluctuations of the Order Parameter to the Second Harmonic Generation in Two-Dimensional Monomolecular Superconductors", JETP Lett. **116**, 173 (2022)].
16. K. Sonowal, A. V. Parafilo, M. V. Boev, V. M. Kovalev, and I. G. Savenko, "Second-harmonic generation in fluctuating Ising superconductors", 2D Mater. **10**, 045004 (2023).
17. Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг, "Сверхпроводящие сплавы в сильном переменном поле", ЖЭТФ **56**, 1297 (1969) [L. P. Gor'kov and G. M. Eliashberg, "Superconducting Alloys in a Strong Alternating Field", Sov. Phys. JETP **29**, 698 (1969)].
18. Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин, "К вопросу о нелинейной электродинамике тонких сверхпроводящих пленок", ЖЭТФ **59**, 234 (1970) [L. P. Gor'kov and N. B. Kopnin, "Nonlinear Electrodynamics of Thin Superconducting Films", Sov. Phys. JETP **32**, 128 (1971)].
19. N. B. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity* (Oxford University Press, Oxford, 2001).
20. O. B. Zuev, M. V. Kovalenko, and A. S. Mel'nikov, "Superconducting photocurrents induced by structured electromagnetic radiation", Phys. Rev. B **112**, 144503 (2025).
21. A. Daido, Y. Ikeda, and Y. Yanase, "Intrinsic Superconducting Diode Effect", Phys. Rev. Lett. **128**, 037001 (2022).
22. J. J. He, Y. Tanaka, and N. Nagaosa, "A phenomenological theory of superconductor diodes", New J. Phys. **24**, 053014 (2022).
23. M. Nadeem, M. S. Fuhrer, and X. Wang, "The superconducting diode effect", Nat. Rev. Phys. **5**, 558 (2023).
24. S. V. Mironov, A. S. Mel'nikov, and A. I. Buzdin, "Photogalvanic phenomena in superconductors supporting intrinsic diode effect", Phys. Rev. B **109**, L220503 (2024).
25. V. M. Edelstein, "Magnetoelectric Effect in Polar Superconductors", Phys. Rev. Lett. **75**, 2004 (1995).
26. V. M. Edelstein, "The Ginzburg–Landau equation for superconductors of polar symmetry", J. Phys.: Condens. Matter **8**, 339 (1996).
27. A. Buzdin, "Direct Coupling Between Magnetism and Superconducting Current in the Josephson φ_0 Junction", Phys. Rev. Lett. **101**, 107005 (2008).
28. A. V. Putilov, D. V. Zakharov, A. Kudlis, A. S. Mel'nikov, and A. I. Buzdin, "Vortex structure and intervortex interaction in superconducting structures with intrinsic diode effect", Phys. Rev. B **112**, 134507 (2025).
29. S. Mironov and A. Buzdin, "Spontaneous Currents in Superconducting Systems with Strong Spin-Orbit Coupling", Phys. Rev. Lett. **118**, 077001 (2017).
30. K.-R. Jeon, J.-K. Kim, J. Yoon, J.-C. Jeon, H. Han, A. Cottet, T. Kontos, and S. S. P. Parkin, "Zero-field polarity-reversible Josephson supercurrent diodes enabled by a proximity-magnetized Pt barrier, Nat. Mater. **21**, 1008 (2022).
31. J. Hasan, D. Shaffer, M. Khodas, and A. Levchenko, "Supercurrent diode effect in helical superconductors", Phys. Rev. B **110**, 024508 (2024).