Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 9, с. 727 – 733 © 2026 г. 10 ноября

Роль нерегулярной сети протяженных дефектов в двумерном плавлении на примере системы жестких дисков и графена

М. В. Кондрин[+1)], *Ю. Б. Лебедь*[*], *В. В. Бражкин*[+]

[+]*Институт физики высоких давлений им. Л. Ф. Верещагина РАН, 108840 Троицк, Москва, Россия*

[*]*Институт ядерных исследований РАН, 117312 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 сентября 2026 г.
После переработки 25 сентября 2026 г.
Принята к публикации 26 сентября 2026 г.

В двумерном случае не существует единой теории, описывающей плавление. Существующие теории связывают плавление с диссоциацией дислокаций или границ зерен, причем в этих двух случаях физика плавления существенно различается. В данной работе мы пытались рассмотреть плавление системы жестких дисков и графена, происходящее через накопление низкоэнергетичных сбоев упаковки в твердой фазе. Показано, что такое накопление приводит к аномалии на уравнении состояния, что свидетельствует о наличии слабого перехода первого рода, сопровождающего плавление. Количественные оценки, полученные в работе, демонстрируют хорошее согласие с результатами компьютерного моделирования и эксперимента.

DOI: 10.7868/S3034576626110061

1. Введение. В отличие от трехмерного случая, где плавление неизменно является переходом первого рода, двумерное плавление оказывается более разнообразным [1, 2]. Согласно теории Березинского – Костерлица – Таулесса – Хальперина – Нельсона – Янга [3–7], отмеченной Нобелевской премией, в двумерном случае возможен непрерывный переход бесконечного рода, где ключевую роль играют изолированные дислокации в твердой фазе. Переход в изотропную жидкость обусловлен диссоциацией дислокаций на пару дисклинаций, сопровождающийся потерей сдвиговой устойчивости. Впоследствии Чюи [8, 9] рассмотрел более сложные протяженные дефекты – границы зерен, представляющие из себя ряд дислокаций, и показал, что при определенном соотношении на энергию ядра дислокации в системе может реализоваться плавление через переход первого рода. Так что универсального механизма плавления в двумерном случае не существует. Как правило, в компьютерных симуляциях [10] на уравнении состояния, описывающем систему, вблизи плавления наблюдается слабая аномалия (петля ван-дер-Ваальса), что интерпретируется как наличие перехода первого рода. Впрочем, амплитуда этой петли оказывается меньше, чем флуктуации давления в системе [11], поэтому переход на самом деле является слабым переходом первого рода.

В этой связи кажется естественным провести исследование различных протяженных дефектов как движущего фактора плавления, реализующегося через переход первого рода. Естественно также потребовать, чтобы энергия формирования таких дефектов была по возможности низкой, чтобы такие дефекты могли образовываться в достаточном количестве при довольно низких температурах, т.е. в твердой фазе. Менее очевидное требование к протяженным дефектам – то, что они должны представлять собой сбои в упаковке. Природу этого требования можно объяснить следующим образом. Поскольку нас интересует именно плавление, где согласно критерию Борна происходит потеря сдвиговой жесткости, внимание должно быть сосредоточено на дефектах, образующихся в результате релаксации сдвиговых напряжений, т.е. дефект должен включать в себя сдвиг атомных слоев друг относительно друга. Ранее такой подход был использован нами при изучении плавления веществ с алмазной структурой, и было показано, что энергия формирования таких дефектов в пересчете на атом дефекта дает оценку сверху на температуру плавления [12–14]. Мы будем рассматривать систему жестких дисков как наиболее хорошо изученную с помощью компьютерного моделирования, а в качестве реальной хорошо исследованной системы – графен/графит.

Модель жестких дисков (в широком смысле – сфер), как правило, рассматривается в качестве ну-

[1)]e-mail: mkondrin@hppi.troitsk.ru

левого приближения реальных неупорядоченных систем, и в физике конденсированного состояния могла бы претендовать на роль модели идеального газа в приложении к реальным газам, если бы не малое количество точных результатов, полученных для нее. В частности, не известна даже точная формула для температуры, где наблюдается аномалия уравнения состояния, в окрестности которой наблюдается плавление системы жестких дисков. Эту аномалию, хотя это и не совсем точно для двумерных систем, можно отождествить с плавлением. В реальных экспериментах, именно аномалия на уравнении состояния является признаком фазового перехода, поэтому может использоваться для сравнения модели с экспериментом.

Протяженный дефект в системе жестких дисков, являющийся результатом релаксации сдвиговых напряжений, представлен на рис. 1a [15]. Желтая стрелка показывает сдвиг одной полуплоскости относительно другой, и, считая диаметр диска равным единице, этот сдвиг вдоль дефекта равен $\sqrt{3}/2$ и $1/2$ вдоль нормали к нему. Было также показано [15], что такие дефекты могут пересекаться, образуя нерегулярную сетку дефектов. Регулярный аналог такой сети объемом $V/V_0 = 25/21$ представлен на рис. 1b. Можно показать, что этот объем является максимальным для сети таких дефектов, обладающей тем свойством, что свободное пространство между дисками “сегментировано”, т.е. нельзя провести траекторию из любой точки свободного пространства до бесконечности, не пересекая границ дисков. В работе [15] это свойство было названо “nearly jammed configuration” и было названо отличительным признаком твердой фазы.

Для графена аналогичный протяженный дефект показан на рис. 2a. По всей видимости, такая 5- и 7-членная конфигурация атомов в графене, представляющая из себя ряд из дефектов Стоуна–Вейлса, впервые попала в поле зрения исследователей в 2007 г. [16] и рассматривалась позднее [17, 18] как сбой упаковки в графене. Регулярная структура, составленная из подобных дефектов, была предложена в 2017 г. [19] и получила собственное имя ψ-графен из-за рекордно низкой энергии образования. В пересчете на атом дефекта (зеленые атомы на рис. 2a) энергия образования оказалась равной 6400 K/атом. В работе [18] эта энергия была связана с энергетическим барьером, который необходимо преодолеть атомным слоям, чтобы быть сдвинутыми друг относительно друга, и таким образом является простой оценкой температуры плавления. То, что эти дефекты могут пересекаться, было высказано в той же работе на основании анализа термодинамических свойств графита при высоких температурах [20–22]. Структурная модель такого пересечения, т.е. нерегулярной сетки протяженных дефектов, была предложена позднее в работе [23] (см. рис. 2b). На рисунке 2b показана структура с максимально возможной концентрацией дефектов (атомы дефектов выделены зеленым и синим цветом), равной $x = 14/38 \approx 0.37$, при этом вдоль каждой стороны шестиугольника, образованного дефектами, выстраиваются по паре 5- и 7-членных циклов, составляющих половину дефекта Стоуна–Вейлса. По не вполне понятной причине энергия образования такого дефекта оказывается еще ниже, чем у одиночного сбоя упаковки, и составляет 5045 K на атом дефекта [23].

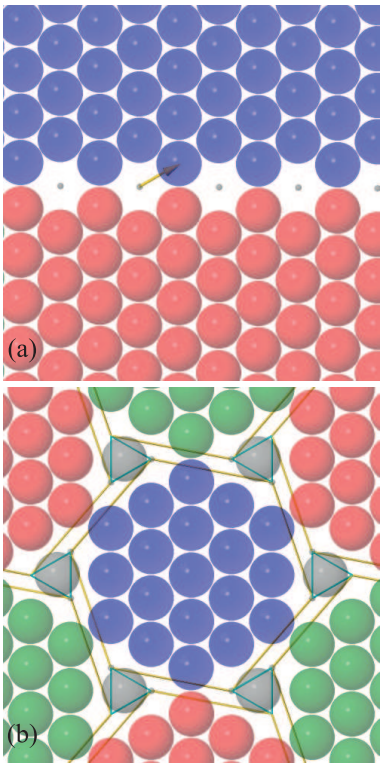

Рис. 1. (Цветной онлайн) (a) – Одиночный сбой упаковки и (b) – пример сети протяженных дефектов в системе жестких дисков [15]

Ниже на примере системы жестких дисков и графена в рамках единого подхода мы собираемся предложить оценку температуры плавления, точнее, положения аномалии на уравнении состояния.

Жесткие диски. Дадим оценку сжимаемости для атомных конфигураций, приведенных на рис. 1. Начнем с вычисления свободной энергии сбоев упаковки, ориентированных в одном направлении (рис. 1a). Применим комбинаторные соображения и запишем формулу для энергии Гиббса F для k

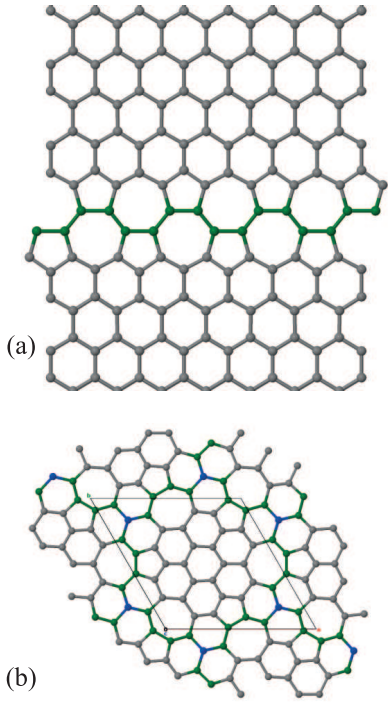

Рис. 2. (Цветной онлайн) (a) – Одиночный сбой упаковки и (b) – пример сети протяженных дефектов максимальной концентрации в графене [23]

дефектных слоев длиной l в системе, состоящей из N частиц:

$$\Delta F = P\Delta V - k_B T \log\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right). \qquad (1)$$

Здесь $n = N/l$. Далее применим формулу Стирлинга и запишем изменение объема V через объем бездефектной упаковки V_0, принимая во внимание рис. 1a:

$$\Delta F = \frac{PkV_0}{2n} - k_B T((n-k)\log(n) + k\log(n) - \\ - k\log(k) - (n-k)\log(n-k)), \qquad (2)$$

$$\Delta F = \frac{PxV_0}{2} + k_B Tn\left((1-x)\log(1-x) + x\log(x)\right), \qquad (3)$$

где $x = k/n$ – концентрация дефектов. Нас интересуют малые концентрации дефектов, поэтому последнюю формулу можно приближенно записать как:

$$\Delta F \approx \frac{PxV_0}{2} + k_B Tnx\log(x). \qquad (4)$$

Прежде чем мы приступим к минимизации этой формулы по отношению к x ($d\Delta F(x)/dx = 0$), мы приведем ее к виду, пригодному для описания общего случая, т.е. для описания нерегулярной сети протяженных дефектов, типа изображенного на рис. 1b. Во-первых, в этом случае l (а следовательно, и n) не является константой, а зависит от концентрации x. Эту зависимость можно установить приближенно, приняв во внимание рис. 1b) и формулу для концентрации $x = (V - V_0)/V$. $V - V_0 \propto l$, а $V \propto l^2$, стало быть $l = \alpha/x$, где α – коэффициент пропорциональности. Во-вторых, мы должны принять во внимание в конечной формуле определенный конфигурационный множитель, который отражает тот факт, что в каждом углу шестиугольника, составленного из протяженных дефектов, стыкуются три линейных дефекта (см. рис. 1b), и, стало быть, концентрация дефектов должна быть в Q раз больше, чем в случае протяженных дефектов, ориентированных вдоль одного направления. Таким образом, в качестве конечной приближенной формулы имеем:

$$-\frac{PV_0}{4k_B TN} = \frac{x}{\alpha}\log\left(\frac{x}{Q}\right) = \frac{1}{l}\log\left(\frac{x}{Q}\right). \qquad (5)$$

Для прояснения физического смысла этой формулы, нанесем ее на график вместе с уравнением состояния системы жестких дисков (рис. 3). В качестве уравнения состояния возьмем 9 первых членов вириального разложения по степеням плотности [24]. Оно хорошо воспроизводит уравнение состояния, полученное из компьютерных симуляций жидкой фазы системы жестких дисков. Также на график нанесены точки, соответствующие двум равенствам уравнения (5), – кружки отвечают второму равенству (с l), примененному к трем различным конфигурациям, разобранным в работе [15], а красная штриховая кривая – результату подгонки значения α, полученного в результате подстановки $l = \alpha/x$. В частности, конфигурации, изображенной на рис. 1b, соответствует крайний левый кружок с $x = 1 - V_0/V = 0.16$ и $l = 2$. Как видно из рис. 3, подгоночная кривая пересекается с уравнением состояния в точке с координатами $(V_0/V)_c = 1/1.31 = 0.76$ и $PV_0/(k_B TN) = 7.5$. Мы покажем ниже, что эта точка соответствует границе существования жидкой фазы, т.е. спинодали перехода жидкость–твердое тело. Отметим, что концентрация дефектов, полученная нами в точке плавления ($x = 0.24$), сравнима с концентрацией дефектов в расплаве, полученной методом молекулярной динамики в двумерных системах с плотной упаковкой частиц ($x \approx 20\,\%$) [25, 26].

Как следует из вывода формулы (5), очевидно, что она отвечает случаю образования сети протяженных дефектов концентрации x кооперативным образом, т.е. разом, и, следовательно, соответству-

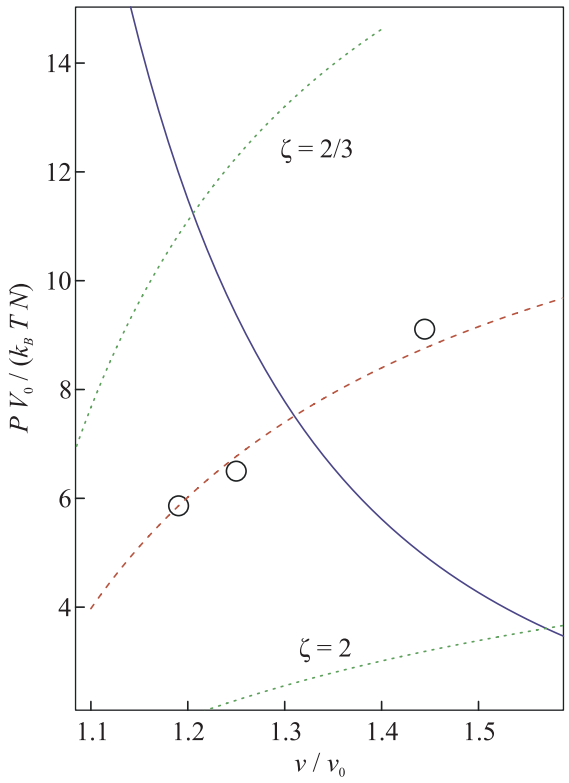

Рис. 3. (Цветной онлайн) Определение точки плавления системы жестких дисков (см. текст). Черные кружки и красная штриховая кривая отвечают двум равенствам формулы (5). Синяя кривая – уравнение состояния системы жестких дисков, в качестве которого взято вириальное разложение по степеням плотности. Зеленые пунктирные кривые отвечают формуле (6) с двумя различными параметрами ζ

ет случаю жидкой фазы. Но, как следует из рис. 3, это может происходить только в области значений, больших $(V/V_0)_c$, поскольку в этом диапазоне значения $PV_0/(k_BTN)$ на кривой состояния меньше, чем на кривой, соответствующей уравнению (5). И наоборот, в области значений, меньших $(V/V_0)_c$ значения $PV_0/(k_BTN)$ на кривой уравнения (5) оказываются недостаточными, чтобы создать сеть дефектов на уравнении состояния.

Покажем это несколько иным способом. Рассмотрим дефект, аналогичный изображенному на рис. 1a, но несколько другого объема, получающийся из идеального кристалла сдвигом полуплоскости на расстояние, меньшее, чем задаваемое вектором $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ (назовем такие дефекты недозрелыми), и большее (перезрелые дефекты). Будем характеризовать такие дефекты объемом $\zeta\Delta V$ (см. уравнение (1)), где $\zeta < 1$ для недозрелых дефектов и $\zeta > 1$ для перезрелых. Очевидно, что при сдвиговом напряжении вдоль дефекта одной полуплоскости относительно другой недозрелые дефекты будут испытывать сопротивление движению, а перезрелые – нет. Стало быть, недозрелые дефекты соответствуют твердой фазе, а перезрелые – жидкой. Повторяя для таких дефектов все рассуждения, приведшие к формуле (5), получим:

$$-\frac{\zeta PV_0}{4k_BTN} = \frac{x}{\alpha}\log\left(\frac{x}{Q}\right). \qquad (6)$$

Здесь x не зависит от ζ. Две кривые, задаваемые уравнением (6) с $\zeta < 1$ и $\zeta > 1$, приведены на рис. 3. Как и ожидалось, они пересекают уравнение состояния в точках меньших и больших $(V/V_0)_c$, которые соответствуют твердой и жидкой фазам. Значения $(V/V_0)_c$, полученные в компьютерных экспериментах, оказываются немного меньшими $V/V_0 = 1.265{-}1.285$ [10]. В то же время реальные эксперименты на коллоидных растворах в плоских порах дают результат, практически совпадающий с нашим $V/V_0 = 1.277{-}1.333$ [27].

Графен. Сначала приведем уравнение для сбоев упаковки графена, ориентированных в одном направлении (рис. 2a), т.е. аналог уравнения (4). В отличие от системы жестких дисков основной энергетический вклад дает не работа против внешнего давления, а изменение внутренней энергии из-за перестройки связей в дефекте. Таким образом запишем:

$$\Delta F \approx \Delta E x + k_BTx\log(x)/l, \qquad (7)$$

где ΔE – энергия образования дефекта в пересчете на один атом. При переходе к нерегулярной сетке дефектов повторяем все рассуждения про конфигурационный множитель $Q = 3$ и концентрационную зависимость $l = \alpha/x$. Получаем:

$$-\frac{\Delta E}{2k_BT} = \frac{x}{\alpha}\log\left(\frac{x}{Q}\right) = \frac{1}{l}\log\left(\frac{x}{Q}\right). \qquad (8)$$

Теперь получим общую формулу для концентрации регулярных сетей пространственных дефектов, где сеть представляет из себя равносторонние шестиугольники. Формула для стороны такого шестиугольника (зеленые атомы на рис. 2b) $l = 2n - 2$, где n – нечетное число $n \geq 3$. Всего атомов в шестиугольнике $N = 6(n-1)^2 + 6l/2 + 2 = 6(n-1/2)^2 + 1/2$, где учтено, что в сегменте, прилежащем к стороне, $(n-1)^2$ внутренних атомов (серые атомы на рис. 2b), l атомов дефекта делятся пополам между двумя соседними шестиугольниками, а 6 угловых атомов (голубые атомы на рис. 2b) делятся между тремя соседними шестиугольниками (итого 2 атома). Концентра-

цию $x = 3(l+1)/N$ и длину стороны шестиугольника $l+1$ мы будем приближенно считать, не различая угловые атомы и атомы, лежащие на сторонах шестиугольника, и будем полагать, что они принадлежат дефекту. Такая же условность использовалась при расчете концентрации в системе жестких дисков.

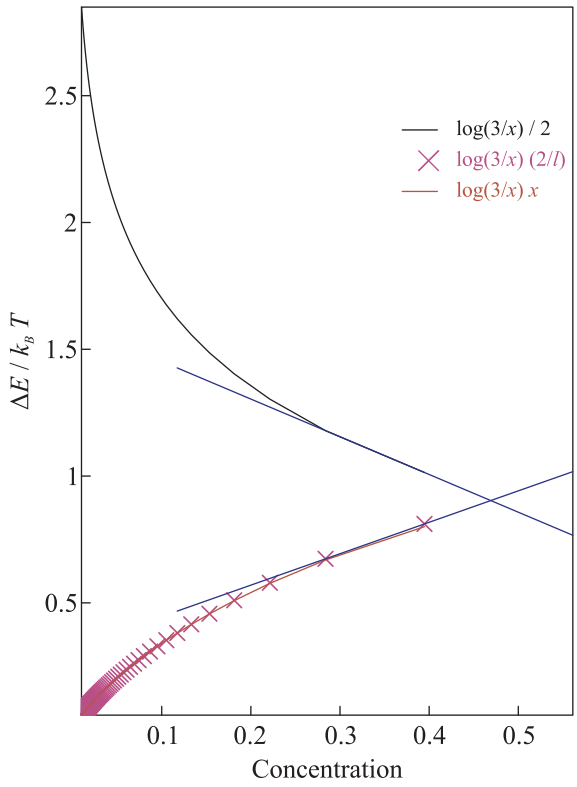

Рис. 4. (Цветной онлайн) Определение точки плавления графена. Символы × и красная кривая соответствуют двум равенствам формулы (8). Черная кривая – "уравнение состояния" в твердой фазе отвечает формуле (9)

На рисунке 4 приведены две кривые, соответствующие двум равенствам уравнения (8). В качестве "уравнения состояния" мы взяли формулу на концентрацию двойных дефектов

$$x = Q \exp(-2\Delta E/(k_B T)), \qquad (9)$$

которая применима в твердой фазе и приводит к экспериментально наблюдаемому отклонению высокотемпературной теплоемкости [18, 23]. Ее отличие от формулы (8) в том, что независимо от концентрации дефектов атомы к дефекту добавляются парами, т.е. диссоциированными дефектами Стоуна–Вейлса. Поскольку дефекты выстраиваются в один ряд, энергия формирования такого "прерывистого" дефекта в пересчете на атом дефекта оказывается ненамного выше, чем у сбоя упаковки, изображенного на рис. 2a. Например, "50:50 прерывистый" дефект, изображенный на рис. 5, имеет энергию образования $\Delta E = 9400\,\mathrm{K}/\text{атом}$ дефекта (выделенные зеленым цветом на рис. 5), что значительно ниже, чем энергия образования изолированного дефекта Стоуна–Вейлса, которая согласно [28] $\Delta E \geq 11500\,\mathrm{K}/\text{атом}$. Причина такого расхождения понятна из рис. 5 – это сдвиговые искажения решетки, зажатой между двумя дефектами, что приводит к частичной релаксации напряжения. Заметим, что диссоциация дефекта Стоуна–Вейлса – энергозатратный процесс, в частности протяженный дефект, состоящий из диссоциированных дефектов Стоуна–Вейлса (рис. 5b), имеет энергию образования $\Delta E = 16400\,\mathrm{K}/\text{атом}$. Причина такого роста связана с более сильными искажениями решетки, окружающей дефект.

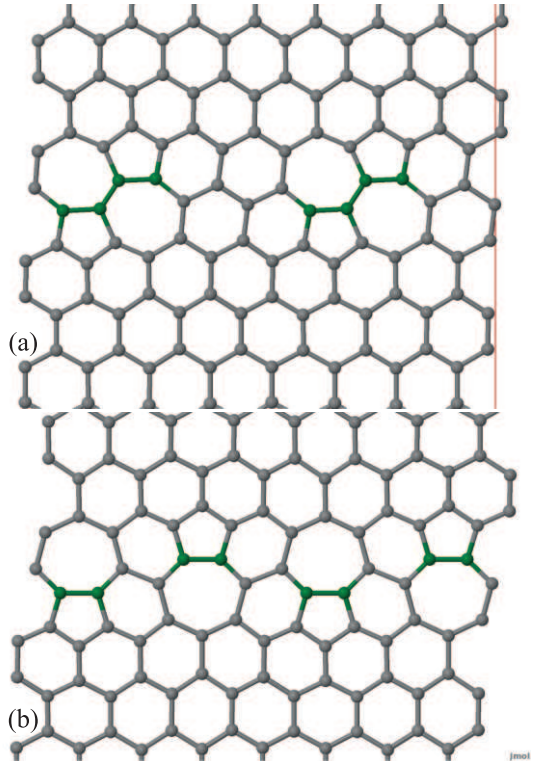

Рис. 5. (Цветной онлайн) Примерная структура "прерывистого" сбоя упаковки, состоящего из изолированных дефектов Стоуна–Вейлса (a) и диссоциированных дефектов Стоуна–Вейлса (b), описываемого формулой (9)

Экстраполяция зависимостей (8) и (9) в область высоких значений концентраций приводит к их пересечению в точке с координатами $x = 0.47$, $\Delta E/(k_B T) = 0.91$, т.е. немного выше по концентрации, чем дефект, изображенный на рис. 2b. Оценка температуры плавления, принимая во внимание приведенные выше оценки ΔE, дает значения $T_m =$

$= 7000$ K или $T_m = 5500$ K. Для сравнения приведем в качестве экспериментального значения температуры плавления графита: 4800 K [21], 6000–6200 K [29], 6300–6500 K [30].

Заключение. В рамках подхода, основанного на рассмотрении нерегулярной сетки протяженных дефектов, получены оценки положения аномалии уравнения состояния, сопровождающей плавление в системе жестких дисков и графена. Полученные оценки демонстрируют хорошее согласие с результатами компьютерного моделирования и экспериментом. Показано, что аномалия уравнения состояния в системе жестких дисков вызвана переходом от накопления недозрелых протяженных дефектов в твердой фазе к перезрелым в жидкой и, как следствие этого изменением характера релаксации сдвиговых напряжений. Аналогично в графене температура плавления связана с изменением механизма распространения протяженных дефектов, от попарного добавления диссоциированных дефектов Стоуна–Вейлса в твердой фазе к кооперативному созданию нерегулярной сети протяженных дефектов в жидкой.

Финансирование работы. Авторы благодарят за финансовую поддержку Российский научный фонд (грант #24-12-00037).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. В. Н. Рыжов, Е. Е. Тареева, Ю. Д. Фомин, Е. Н. Циок, "Переход Березинского–Костерлица–Таулеса и двумерное плавление", УФН **187**, 921 (2017) [V. N. Ryzhov, E. E. Tareyeva, Y. D. Fomin, and E. N. Tsiok, Phys.-Uspekhi **60**(9), 857 (2017)].
2. В. Н. Рыжов, Е. А. Гайдук, Е. Е. Тареева, Ю. Д. Фомин, Е. Н. Циок, "Сценарии плавления двумерных систем – возможности компьютерного моделирования", ЖЭТФ **164**(1), 143 (2023) [V. N. Ryzhov, E. A. Gaiduk, E. E. Tareeva, Y. D. Fomin, and E. N. Tsiok, "Melting scenarios of two-dimensional systems: Possibilities of computer simulation", JETP **137**, 125 (2023)].
3. В. Л. Березинский, "Разрушение дальнего порядка в одномерных и двумерных системах с непрерывной группой симметрии I. Классические системы", ЖЭТФ **59**(3), 907 (1971) [V. L. Berezinskii, "Destruction of long-range order in one-dimensional and two-dimensional systems having a continuous symmetry group i. classical systems", JETP **32**, 493 (1971)].
4. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, "Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems", Journal of Physics C: Solid State Physics **6**(7), 1181 (1973).
5. B. I. Halperin and D. R. Nelson, "Theory of two-dimensional melting", Phys. Rev. Lett. **41**, 121 (1978).
6. D. R. Nelson and B. I. Halperin, "Dislocation-mediated melting in two dimensions", Phys. Rev. B **19**, 2457 (1979).
7. A. P. Young, "Melting and the vector coulomb gas in two dimensions", Phys. Rev. B **19**, 1855 (1979).
8. S. T. Chui, "Grain-boundary theory of melting in two dimensions", Phys. Rev. Lett. **48**, 933 (1982).
9. S. T. Chui, "Grain-boundary theory of melting in two dimensions", Phys. Rev. B **28**, 178 (1983).
10. B. Li, Y. Nishikawa, P. Höllmer, L. Carillo, A. C. Maggs, and W. Krauth, "Hard-disk pressure computations – a historic perspective", J. Chem. Phys. **157**(23), 234111 (2022).
11. M. Kondrin and Y. Lebed, "Inherent noise present in molecular dynamics simulations and what can be learnt from it for 2d Lennard–Jones system", Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics **16**, 407 (2025).
12. M. Kondrin, Y. Lebed, and V. Brazhkin, "Intrinsic planar defects in diamond and the upper limit on its melting temperature", Diam. Relat. Mater. **110**, 108114 (2020).
13. M. Kondrin, Y. Lebed, and V. Brazhkin, "I ntrinsic planar defects in germanium and their contribution to the excess specific heat at high temperatures", Physica Status Solidi (b) **259**(2), 2100463 (2022).
14. М. В. Кондрин, Ю. Б. Лебедь, В. В. Бражкин, "Планарные дефекты в кремнии как способ описания явного ангармонизма его высокотемпературных термодинамических свойств", ЖЭТФ **164**(3), 396 (2023) [M. Kondrin, Y. Lebed, and V. Brazhkin, "Planar defects as a way to account for explicit anharmonicity in high temperature thermodynamic properties of silicon", JETP **137**, 342 (2023)].
15. M. V. Kondrin, Y. B. Lebed, and V. V. Brazhkin, "Extended defects in a hard disk system and melting criteria", Phys. Chem. Chem. Phys. **28**, 9154 (2026).
16. G. Csányi, C. J. Pickard, B. D. Simons, and R. J. Needs, "Graphite intercalation compounds under pressure: A first-principles density functional theory study", Phys. Rev. B **75**, 085432 (2007).
17. J. M. M.P. Ariza, R. Serrano, and M. Ortiz, "Stacking faults and partial dislocations in graphene", Philos. Mag. **92**(16), 2004 (2012).
18. M. V. Kondrin, Y. B. Lebed, and V. V. Brazhkin, "Extended defects in graphene and their contribution to the excess specific heat at high temperatures", Phys. Rev. Lett. **126**, 165501 (2021).
19. X. Li, Q. Wang, and P. Jena, "ψ-graphene: A new metallic allotrope of planar carbon with potential applications as anode materials for lithium-ion batteries", J. Phys. Chem. Lett. **8**, 3234 (2017).
20. М. А. Шейндлин, В. Н. Сенченко, "Экспериментальное исследование термодинамических свойств

графита в окрестности точки плавления", Докл. АН СССР **298**(6), 1383 (1988) [M. A. Sheindlin and V. N. Senchenko, "Experimental investigation of thermodynamic properties of graphite in vicinity of melting temperature", Sov. Phys. Dokl. **33**, 142 (1988)].

21. A. Savvatimskiy, S. Onufriev, and A. Kondratyev, "Capabilities of pulse current heating to study the properties of graphite at elevated pressures and at high temperatures (up to 5000 K)", Carbon **98**, 534 (2016).
22. А. И. Савватимский, С. В. Онуфриев, "Исследование физических свойств углерода при высоких температурах (по материалам экспериментальных работ)", УФН **190**, 1085 (2020) [A. I. Savvatimskii and S. V. Onufriev, "Investigation of the physical properties of carbon under high temperatures (experimental studies)", Phys.-Uspekhi **63**, 1015 (2020)].
23. M. Kondrin, Y. Lebed, and V. Brazhkin, "Irregular network of extended defects in graphene and a new criterion of the crystal lattice melting", Diam. Relat. Mater. **146**, 111150 (2024).
24. Ángel Mulero (editor), *Theory and Simulation of Hard-Sphere Fluids and Related Systems* (Springer Berlin, Heidelberg, 2008).
25. Б. А. Клумов, "Универсальные структурные свойства трехмерных и двумерных расплавов", УФН **193**, 305 (2023) [B. A. Klumov, "Universal structural properties of three-dimensional and two-dimensional melts", Phys.-Uspekhi **66**(3), 288 (2023)].
26. Б. А. Клумов, "Кластеризация дефектов и кристаллитов в двумерной жидкости Юкавы", Письма в ЖЭТФ **120**(9), 675 (2024) [B. A. Klumov, "Clustering of defects and crystallites in a two-dimensional Yukawa fluid", JETP Lett. **120**, 650 (2024)].
27. A. L. Thorneywork, J. L. Abbott, D. G. A. L. Aarts, and R. P. A. Dullens, "Two-dimensional melting of colloidal hard spheres", Phys. Rev. Lett. **118**, 158001 (2017).
28. E. Ertekin, D. C. Chrzan, and M. S. Daw, "Topological description of the Stone–Wales defect formation energy in carbon nanotubes and graphene", Phys. Rev. B **79**, 155421 (2009).
29. A. V. Ivanov, A. M. Kondratyev, and A. D. Rakhel, "Melting curve of graphite and thermophysical properties of graphite and liquid carbon in the vicinity of this curve", Phys. Rev. B **113**, 014117 (2026).
30. A. M. Kondratyev and A. D. Rakhel, "Melting line of graphite", Phys. Rev. Lett. **122**, 175702 (2019).