Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 9, с. 746 – 756 © 2026 г. 10 ноября

“Танцующие” двумерные структуры в нематиках выше порога флексоэлектрической неустойчивости

Е. С. Пикина[1)]

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия

Поступила в редакцию 10 сентября 2026 г.
После переработки 5 октября 2026 г.
Принята к публикации 5 октября 2026 г.

Различные типы электрогидродинамических неустойчивостей в жидких кристаллах являются постоянной темой в исследованиях жидких кристаллов. При этом нелинейная стадия флексоэлектрической неустойчивости в нематиках остается наименее изученным аспектом этого явления. Данная работа освещает яркое достижение в области нелинейной физики, представляя убедительный пример поведения нелинейной динамической системы. Решая систему нелинейных уравнений для нематика в переменном внешнем электрическом поле, на основе первых принципов получено уникальное “танцующее” поведение истинно двумерных структур выше порога флексоэлектрической неустойчивости. Анализ ограничен жидкими кристаллами с отрицательной анизотропией диэлектрической проницаемости и электропроводности. Полученное решение представляет собой устойчивый предельный цикл вблизи точки бифуркации Хопфа (чуть выше нее), применимый в том диапазоне параметров, где характеристическая экспонента решений является комплексной. Разработана обобщенная двумерная феноменологическая теория явления в духе теории Гинзбурга–Ландау.

DOI: 10.7868/S3034576626110087

Более пятидесяти лет физика электрогидродинамических неустойчивостей в жидких кристаллах (ЖК), находящихся под воздействием внешнего электрического поля, остается предметом исследовательского интереса [1–20]. В целом электрогидродинамика активно исследуется для широкого класса материалов [21–27]. Подчеркнем, что поскольку нематические жидкие кристаллы (НЖК) относятся к “мягким” системам, нелинейные эффекты составляют одно из центральных направлений исследования нематиков [11, 17–19, 28–33]. Как следствие, формирование пространственно-временных структур искажений нематического директора под действием внешнего электрического поля остается активным предметом исследования последние несколько десятков лет [2–7, 12, 15, 17, 18, 24, 34–49]. Однако, полное нелинейное описание явления до сих пор отсутствует.

Представленная работа сосредоточена на флексоэлектрических неустойчивостях в НЖК, характеризующихся отрицательными анизотропиями диэлектрической проницаемости и электрической проводимости, т.е., (−−) НЖК в классификации де Жена [9]. В наших предыдущих работах [17, 19] мы сформулировали полную систему нелинейных динамических уравнений для НЖК в переменном внешнем электромагнитном поле. В частности, в [17], для случая достаточно низкой электрической проводимости σ выведена система нелинейных уравнений для всех мягких макроскопических переменных, связанных с общими законами сохранения и нарушениями непрерывной симметрии, а именно, для компонент нематического директора $\mathbf{n}$, компонент гидродинамической скорости v_i, поля электрического смещения $\mathbf{D}$, давления P.

В [18][2)] нами проведен линейный анализ устойчивости полученной общей системы и выявлены как уже известные бифуркации исходно однородного поля нематического директора, приводящие к статическим структурам искажений в виде одномерных прямых или наклонных полос, так и впервые обнаруженная теоретически бифуркация Хопфа, приводящая к осциллирующим во времени стационарным двумерным структурам, до этого не имевшим теоретического обоснования для рассматриваемой системы. Наша недавняя работа [19] была, насколько нам известно, первым нелинейным исследованием структур искажений, формирующихся в НЖК под действием внешнего переменного электрического поля

[1)]e-mail: elenapikina@itp.ac.ru

[2)]Заметим, что к сожалению, в уравнении (17) в этой статье [18] допущена опечатка: ошибочный знак перед членом iq_x.

немного выше порога флексоэлектрической неустойчивости, обсуждаемой в [18]. Рассматривался режим с малым числом Рейнольдса, адаптированный к предельным случаям, в которых температура (или энтропия) могут быть исключены из анализа. В исследовании [19] изучались одномерные статические и динамические структуры искажений, а также их устойчивость.

В настоящей работе представлены двумерные решения нелинейных электрогидродинамических уравнений для НЖК, выведенных в [17, 19]. Рассматривается стандартная геометрия с нематиком, помещенным в плоскую ячейку толщины d вдоль направления z под действием переменного электрического поля, перпендикулярного $x-y$ плоскости ячейки. Предполагается, что в отсутствие внешнего электрического поля невозмущенный нематический директор $\mathbf{n}$ всюду ориентирован вдоль оси оси x. Исследуется конечный интервал значений амплитуд внешнего электрического поля выше порога флексоэлектрической неустойчивости для случая, когда комплексный инкремент (т.е. характеристическая экспонента Ляпунова или скорость роста) критической моды имеет ненулевую мнимую часть. Работа посвящена анализу того, какие решения остаются устойчивыми к возмущениям конечной амплитуды, а также к шуму. Предметом интереса является определить, у каких решений самый широкий бассейн притяжения для разных областей фазовой диаграммы, получающейся в рамках линейного анализа. Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо исследовать двумерные решения нелинейных уравнений, описывающих нематик во внешнем электрическом поле при различных начальных условиях с учетом и без учета шума.

В работе [19] мы привели подробное описание перехода от трехмерной к двумерной постановке задачи, основанного на том, что в случае $q_c d \gg 1$ производные по направлению z много меньше производных по направлениям x и y. Здесь $\mathbf{q}_c$ - это конечный критический волновой вектор, при котором впервые развивается флексоэлектрическая неустойчивость. Это важно, поскольку линейный анализ показывает, что характеристическая экспонента λ содержит вклад, пропорциональный q_z^2, аналогичный вкладам, пропорциональным q_{cx}^2, q_{cy}^2 [18]. Условие $q_c d \gg 1$ позволяет игнорировать границы, т.е. работать в пределе бесконечной толщины нематической пленки. Линейный анализ показывает, что в этом случае не возникает никаких неустойчивостей при конечных q_z, что означает отсутствие соответствующих степеней свободы. Это факт обосновывает предположение об отсутствии зависящих от z неустойчивых мод вблизи порога неустойчивости, позволяя ограничить численное решение двумя измерениями.

Процедура приведения уравнений для поля электрического смещения $\mathbf{D}$ и давления P к локальному виду также описана в [19]. Этого удобно сделать путем замены нелокального уравнения для вектора электрического смещения $\mathbf{D}$ двумя локальными динамическими уравнениями для плотности свободных зарядов ϱ_e и электрического потенциала Φ, а также введения фиктивных динамических уравнений для Φ и P, см. ниже. Заметим, что поле электрического смещения $\mathbf{D}$ выражается как $D_i = \epsilon_0\,\epsilon_{ik}E_k + P_{fl,i}$, где $\epsilon_{ik} = \epsilon_\perp \delta^\perp_{ik} + \epsilon_\parallel n_i n_k$ – тензор диэлектрической восприимчивости, $\delta^\perp_{ik} \equiv \delta_{ik} - n_i n_k$, а флексоэлектрический вклад в поляризацию дается выражением $\mathbf{P}_{fl} = \zeta\,\mathbf{n}(\nabla\mathbf{n})$.

Исчерпывающий анализ одномерных решений этой нелинейной системы для нематиков, находящихся под воздействием внешнего электрического поля с амплитудой E_0, незначительно превышающей значение на пороге флексоэлектрической неустойчивости E_{0c}, был проведен в [19]. В настоящей работе обсуждаются двумерные численные решения следующей системы нелинейных динамических уравнений:

$$\partial_t n_i = -\mathbf{v}\nabla n_i + n_k \delta^\perp_{ij}\partial_k v_j + \Xi^\perp_i/\gamma, \tag{1}$$

$$\rho\partial_t v_i = -\nabla\left(K\nabla n_j \partial_i n_j\right) - \partial_k(\Xi^\perp_i n_k) - \partial_i P + \partial_k\left(D_k E_i\right) + \eta\nabla^2 v_i, \tag{2}$$

$$\partial_t \varrho_e = -\nabla\left(\hat{\sigma}\mathbf{E}\right), \tag{3}$$

$$\varrho_e = \nabla\big(\epsilon_0\hat{\epsilon}(\mathbf{E}_0 - \nabla\Phi) + \mathbf{P}_{fl}\big), \tag{4}$$

$$\nabla^2 P + \partial_k\partial_i\left(K\partial_k n_j \partial_i n_j\right) + \partial_k\partial_i(\Xi^\perp_i n_k) - \partial_k\partial_i\left(D_k E_i\right) = 0. \tag{5}$$

Здесь $\Xi^\perp_i = \delta^\perp_{ij}\Xi_j$, и

$$\Xi_i = K\nabla^2 n_i + \epsilon_0(\epsilon_\parallel - \epsilon_\perp)E_i\mathbf{n}\mathbf{E} + \zeta E_i(\nabla\mathbf{n}) - \zeta\partial_i(\mathbf{n}\mathbf{E})$$

– взятая с обратным знаком вариационная производная термодинамического потенциала по $\mathbf{n}$, γ – коэффициент вращательной вязкости. Заметим также, что в системе (1)–(5) матрица $\hat{\epsilon}$ – это матрица диэлектрической проницаемости НЖК ϵ_{ik}, $\Delta\epsilon = \epsilon_\parallel - \epsilon_\perp$ – диэлектрическая анизотропия, $\hat{\sigma}$ – матрица электрической проводимости нематика σ_{ik}, $\Delta\sigma = \sigma_\parallel - \sigma_\perp$ – анизотропия проводимости, и также используется приближение одного флексокоэффициента $\zeta = e_1$. В свою очередь, $\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E}$ – плотность тока свободных зарядов, а компонента n_x нематического директора выражена через отклонения n_y, n_z как $n_x = (1 - n_y^2 - n_z^2)^{1/2}$. Полное электрическое поле дается

выражением $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t) - \nabla\Phi$, где $\mathbf{E}_0$ – внешнее переменное электрическое поле, направленное вдоль оси z, и Φ – электрический потенциал, индуцированный возмущениями электрического поля; здесь, w - частота переменного поля.

На следующем шаге, дополнительные слагаемые $\delta_{ik}^{\perp} A_k(\mathbf{An})$, пропорциональные $\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ – малый (по абсолютной величине) вектор, ориентированный вдоль оси x, вводятся в правую часть уравнений (1). Это делается для того, чтобы сохранить преобладающую ориентацию директора $\mathbf{n}$ вдоль оси x и подавить эффекты паразитных нулевых мод в двумерном пределе, см. [19]. Аналогичным образом к уравнениям (2) добавляются члены $-G_v\, v_i$, чтобы подавить нулевую моду компонент скорости v_i. Все эти дополнительные члены, пропорциональные коэффициенту A, должны быть малы по сравнению с основными вкладами, пропорциональными ∂_x^2 и ∂_y^2 соответственно.

Заметим также, что в (2) используется только один изотропный коэффициент сдвиговой вязкости вместо полного тензора вязкости Лесли. Полный тензора вязкости повлиял бы на количественные значения порога неустойчивости. Тем не менее, поскольку неустойчивость определяется главным образом взаимодействием между нематическим директором и электрическим полем, ожидается, что набор стационарных решений качественно не изменится в используемом приближении.

После устранения нелокальности уравнений для вектора электрического смещения $\mathbf{D}$ и давления P, см. [19], приходим к следующим локальным уравнениям для этих полей:

$$\mathcal{C}\partial_t\Phi = -G_1\Phi + \varrho_e - \nabla\big(\epsilon_0\hat{\epsilon}(\mathbf{E}_0 - \nabla\Phi) + \mathbf{P}_{fl}\big)\ , \quad (6)$$

$$\mathcal{C}_P\partial_t P = -G_P P + \nabla^2 P + \partial_k\partial_i\left(K\partial_k n_j \partial_i n_j\right) + \partial_k\partial_i(\Xi_i^{\perp} n_k) - \partial_k\partial_i\left(D_k E_i\right)\ , \quad (7)$$

причем следующие условия должны быть выполнены: $\mathcal{C}\omega \ll \epsilon_0\,\epsilon\, q_c^2$, $G_1 \ll \epsilon_0\,\epsilon\, q_c^2$, $\mathcal{C}_P\omega \ll q_c^2$, и $G_P \ll q_c^2$. Для двумерных численных вычислений моделирования дополнительно введенные параметры выбираются следующим образом: $A^2 = 2.5\cdot 10^{10}\,\mathrm{B}^2\,\mathrm{m}^{-2}$, $G_1 = 1.54\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}^{-2}$. Все дополнительные параметры удовлетворяют необходимым неравенствам, обсужденным выше.

Ниже кратко обсуждаются двумерные численные решения системы нелинейных уравнений (1)–(3), (6), (7) в конечном интервале изменения амплитуд поля E_0. Уравнения решаются численно с помощью стандартных подпрограмм, реализованных в Wolfram Mathematica. В качестве двумерной расчетной ячейки выбрана ячейка $\{(-2\pi/q_{cx}, 2\pi/q_{cx}), (-2\pi/q_{cy}, 2\pi/q_{cy})\}$, где q_{cx}, q_{cy} – компоненты критического волнового вектора, полученного для исследуемого набора материальных параметров в рамках линейного приближения.

Критическая мода имеет большие времена релаксации вблизи точки неустойчивости. Таким образом, предметом исследования является медленное динамическое поведение НЖК (нематического жидкого кристалла) на временных масштабах, значительно превышающих период $T_w = 2\pi/w$ внешнего электрического поля. Соответственно, стационарный режим решений устанавливается на временном масштабе, значительно превышающем T_w. Период медленной динамики примерно определяется значением мнимой части характеристической экспоненты λ_c и выражается в единицах T_w как $T_{\mathrm{slow}} \approx 2\pi/\mathrm{Im}(\lambda_c)$. В свою очередь, λ_c может быть получена в рамках линейного приближения [18]. Отметим, что в настоящей работе преимущественно рассматривается область значений материальных параметров и амплитуд внешнего поля, соответствующих случаю осциллирующей динамики критической моды на пороге неустойчивости, т.е. с комплексной характеристической экспонентой λ_c.

Из численного решения системы нелинейных динамических уравнений (1)–(3), (6), (7) следует, что если набор материальных параметров в линейном приближении соответствует осцилляторному режиму, то решение в виде нетривиальной двумерной стоячей волны является устойчивым.

Математически это решение сводится к линейной комбинации двух ортогональных одномерных стоячих волн, соответствующих структурам так называемых наклонных роллов с волновыми векторами $\mathbf{q}_{c1} = (q_{cx}, q_{cy})$ и $\mathbf{q}_{c2} = (q_{cx}, -q_{cy})$ и с фазовым сдвигом волн $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$, см. ниже. Это существенно двумерное решение проиллюстрировано на рис. 1, 2. На рисунке 1 представлены распределения возмущений поля компоненты n_z нематического директора и график плотности возмущений поля директора $\delta\mathbf{n} = (n_y, n_z)$ в плоскости x, y для пяти принципиальных моментов времени t_i внутри временного интервала $[0, T_{\mathrm{slow}}/2]$. Можно заметить, что на полуинтервале времени $T_{\mathrm{slow}}/2$ решение проходит следующие стадии.

Одномерное решение в виде наклонных текстур с $\mathbf{q}_{c1} = (q_{cx}, q_{cy})$ реализуется в момент времени $t = t_1$. Существенно двумерное решение возникает при $t = t_2$. Одномерное решение в виде наклонных текстур с $\mathbf{q}_{c2} = (q_{cx}, -q_{cy})$ формируется при $t = t_3$. Су-

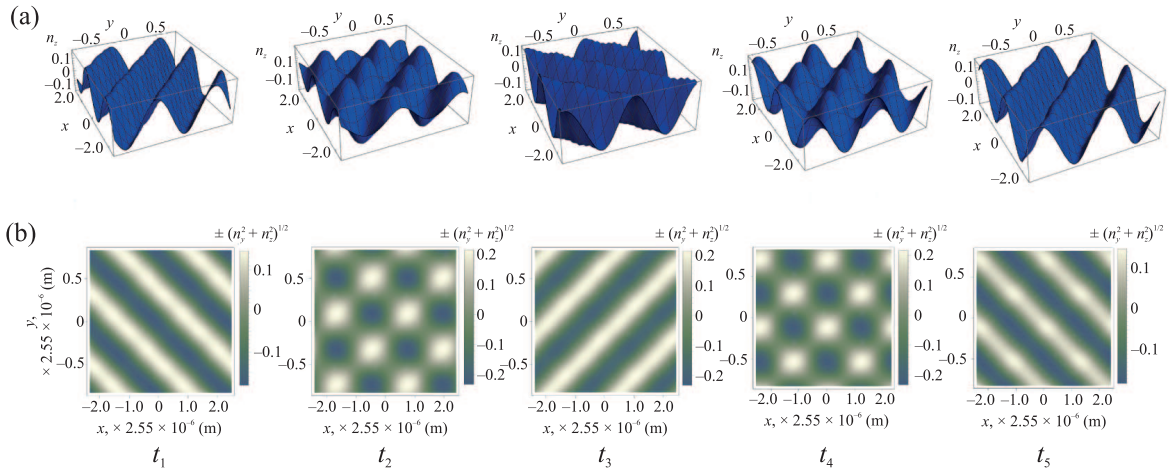

Рис. 1. (Цветной онлайн) (a) – Зависимость поля возмущений компоненты n_z и (b) – распределение плотности поля искажений нематического директора $|\delta\mathbf{n}| = (n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$ как функции пространственных координат (x, y) в пяти ключевых моментах времени в пределах временного интервала $[0, T_{\text{slow}}/2]$ для решения в виде нетривиальной двумерной стоячей волны, которая является устойчивым решением в диапазоне параметров материала, где инкремент неустойчивости критической моды имеет мнимую часть. Значения параметров: $E_{0c} = 34.8 \cdot 10^5\,\text{В}\,\text{м}^{-1}$ для набора материальных параметров: ω (частота) $= 2\pi \cdot 300\,\text{с}^{-1}$; $\sigma_\perp = 20 \cdot 10^{-10}\,\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$, $\Delta\sigma = -0.1\sigma_\perp$, $K_1 = K_2 = K_3 = K = 5.5 \cdot 10^{-12}\,\text{Н}$, $\zeta = 6.75 \cdot 10^{-11}\,\text{Кл} \cdot \text{м}^{-1}$, $\epsilon_\perp = 18$, $\Delta\epsilon = -4\pi \cdot 10^{-1}$, $\gamma = 0.06\,\text{Па} \cdot \text{с}$, $\eta = 0.045\,\text{Па} \cdot \text{с}$, $\mathcal{C} = 257.027 \cdot 10^4\,\text{с} \cdot \text{м}^{-2}$, $\mathcal{C}_p = 102.808 \cdot 10^4\,\text{с} \cdot \text{м}^{-2}$, $G_p = 6.17 \cdot 10^{10}\,\text{м}^{-2}$, $G_v = 2.467 \cdot 10^{10}\,\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$, $q_{cx} = 10.205 \cdot 10^5\,\text{м}^{-1}$, $q_{cy} = 28.26 \cdot 10^5\,\text{м}^{-1}$

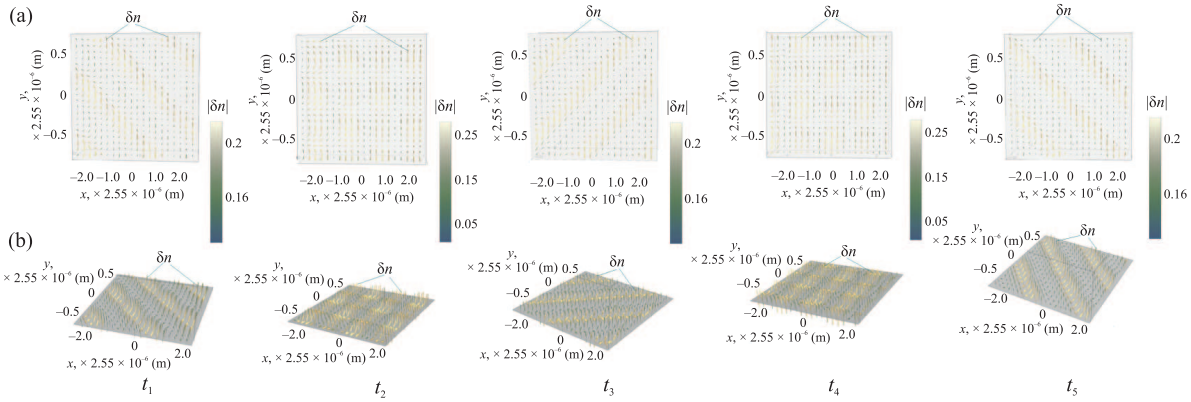

Рис. 2. (Цветной онлайн) Векторная визуализация поля искажений нематического директора $\delta\mathbf{n}$: (a) – вид сверху и (b) – вид сбоку в пяти ключевых моментах времени в пределах временного интервала $[0, T_{\text{slow}}/2]$ из рис. 1

щественно двумерное решение, сдвинутое на половину своего периода, реализуется при $t = t_4$. Наконец, одномерное решение в виде наклонных текстур с $\mathbf{q}_{c1}$, возникающее при $t = t_5$, соответствует стоячей волне, сдвинутой на половину периода относительно момента времени $t = t_1$. В течение следующего временного интервала $T_{\text{slow}}/2$ решение возвращается к состоянию фактически одномерного решения в виде наклонных структур с $\mathbf{q}_{c1}$, соответствующему моменту времени t_1. Это означает, что система возвращается в свое исходное состояние через интервал времени $\Delta t = T_{\text{slow}}$. Соответствующая векторная визуализация поля искажений нематического директора $\delta\mathbf{n}$ из рис. 1 представлена на рис. 2.

Такое поведение точно описывается в рамках соответствующей двумерной (2D-) феноменологии, сформулированной ниже, которая дает решение на языке теории бифуркаций [50–53]. С точки зрения теории бифуркаций [50–53], это весьма нетривиальное динамическое поведение, которое мы называем режимом “танцующих” двумерных структур, указывает на то, что решение рассматриваемой системы нелинейных уравнений на больших временах представляет собой устойчивый предельный цикл. Это

соответствует замкнутой траектории в фазовом пространстве, возникающей в нелинейной системе вблизи бифуркации Хопфа, т.е. бифуркации Пуанкаре–Андронова–Хопфа. Подчеркнем, что в общем случае мы получаем аналогичный характер решений для случая различных констант упругости Франка.

Была подтверждена критическая зависимость амплитуды первой гармоники решений от отклонения внешнего электрического поля от соответствующего порогового значения E_{0c}. Этот факт согласуется с двумерной феноменологией и соответствует мягкой бифуркации, см. ур. (23). Соответствующая зависимость квадрата амплитуды первой гармоники компоненты n_z от $(E_0 - E_{0c})$ представлена на рис. 3 в приближении единой константы Франка для того же набора параметров материала, который использовался на рис. 1.

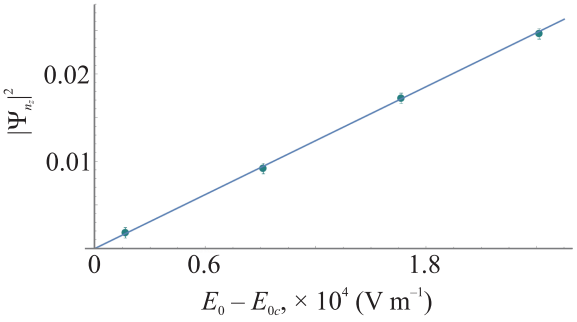

Рис. 3. (Цветной онлайн) Зависимости квадрата амплитуды первой гармоники $|\Psi_{n_z}|^2$ для решения n_z от $(E_0 - E_{0c})$ для набора материальных параметров из рис. 1. Прямая линия – это линейная функция $\propto (E_0 - E_{0c})$, аппроксимирующая полученные из численного счета синие точки

Отметим также, что при дальнейшем увеличении амплитуды внешнего поля мода с комплексной характеристической экспонентой (инкрементом неустойчивости), соответствующая осцилляционному поведению, перестает быть доминирующей. В результате описанное выше истинно двумерное решение теряет устойчивость и становится неустойчивым. Таким образом, происходит жесткая бифуркация, переводящая систему в состояние статических прямых полос возмущений нематического директора. Соответственно, устойчивым становится решение с характеристической экспонентой и $\mathbf{q}_c = (q_{cx} = 0, q_{cy})$, что отвечает одномерным структурам со слоями, параллельными оси x. Однако, поскольку переход между этими конкурирующими решениями является переходом первого рода, интересно изучить гистерезис. Очевидно, что существует возможность длительной метастабильности решения. Таким образом, мы находим, что в данном случае решение в виде одномерной стоячей волны с обоими ненулевыми значениями q_{cx} и q_{cy} является долгоживущим метастабильным решением.

На следующем шаге для аналитического понимания и интерпретации численного решения полезно развить полное двумерное феноменологическое исследование. Действительно, из-за медленного характера динамики критической моды вблизи точки неустойчивости ее можно эффективно отделить от других степеней свободы. Таким образом, для слабонелинейного режима можно сформулировать двухмерные феноменологические уравнения в духе Гинзбурга–Ландау, в рамках которых возникающие полевые структуры могут быть описаны всего несколькими параметрами, см. [19]. В рассматриваемом случае медленной динамики нематиков решения для критической моды возмущений, связанной с основной гармоникой, включают Фурье-гармоники с двумя эквивалентными наклонными критическими волновыми векторами $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$, имеющими одинаковые x-компоненты и противоположные y-компоненты. Например, общий вид вклада в n_z, связанного с основной гармоникой, может быть представлен как

$$\mathrm{Re}\Big\{[\widetilde{\psi}_{1+}(t) + \widetilde{\psi}_{1-}(t)]\exp(i\mathbf{q}_1\mathbf{r}) + [\widetilde{\psi}_{2+}(t) + \widetilde{\psi}_{2-}(t)]\exp(i\mathbf{q}_2\mathbf{r})\Big\}, \quad (8)$$

где t выражено в единицах T_w, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_{c1} = (q_{cx}, q_{cy})$ и $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{c2} = (q_{cx}, -q_{cy})$ – волновые вектора основной гармоники; а комплексные функции $\widetilde{\psi}_{j+}$ и $\widetilde{\psi}_{j-}$ содержат положительные и отрицательные частоты соответственно.

Ниже развита обобщенная двухмерная феноменологическая теория в духе Гинзбурга–Ландау. Феноменологические уравнения должны быть инвариантны относительно перестановки волновых векторов $_1$ и $_2$. Таким образом, с учетом всех правил отбора, для функций $\widetilde{\psi}_{j\pm}$ можно выписать следующие уравнения [19]:

$$\partial_t\widetilde{\psi}_{1+} = \lambda\widetilde{\psi}_{1+} - b_1|\widetilde{\psi}_{1+}|^2\widetilde{\psi}_{1+} - b_2|\widetilde{\psi}_{1-}|^2\widetilde{\psi}_{1+} - b_3|\psi_{2+}|^2\widetilde{\psi}_{1+} - b_4|\widetilde{\psi}_{2-}|^2\widetilde{\psi}_{1+} - b_5\,\widetilde{\psi}_{2+}\widetilde{\psi}^{\star}_{2-}\widetilde{\psi}_{1-}, \quad (9)$$

$$\partial_t\widetilde{\psi}_{1-} = \lambda^{\star}\widetilde{\psi}_{1-} - b_1^{\star}|\widetilde{\psi}_{1-}|^2\widetilde{\psi}_{1-} - b_2^{\star}|\widetilde{\psi}_{1+}|^2\widetilde{\psi}_{1-} - b_3^{\star}|\widetilde{\psi}_{2-}|^2\widetilde{\psi}_{1-} - b_4^{\star}|\widetilde{\psi}_{2+}|^2\widetilde{\psi}_{1-} - b_5^{\star}\,\widetilde{\psi}_{2-}\widetilde{\psi}^{\star}_{2+}\widetilde{\psi}_{1+}, \quad (10)$$

$$\partial_t\widetilde{\psi}_{2+} = \lambda\widetilde{\psi}_{2+} - b_1|\widetilde{\psi}_{2+}|^2\widetilde{\psi}_{2+} - b_2|\widetilde{\psi}_{2-}|^2\widetilde{\psi}_{2+} - b_3|\widetilde{\psi}_{1+}|^2\widetilde{\psi}_{2+} - b_4|\widetilde{\psi}_{1-}|^2\widetilde{\psi}_{2+} - b_5\,\widetilde{\psi}_{1+}\widetilde{\psi}^{\star}_{1-}\widetilde{\psi}_{2-}, \quad (11)$$

$$\partial_t\widetilde{\psi}_{2-} = \lambda^\star\widetilde{\psi}_{2-} - b_1^\star|\widetilde{\psi}_{2-}|^2\widetilde{\psi}_{2-} - b_2^\star|\widetilde{\psi}_{2+}|^2\widetilde{\psi}_{2-} - b_3^\star|\widetilde{\psi}_{1-}|^2\widetilde{\psi}_{2-} - b_4^\star|\widetilde{\psi}_{1+}|^2\widetilde{\psi}_{2-} - b_5^\star\,\widetilde{\psi}_{1-}\widetilde{\psi}_{1+}^\star\widetilde{\psi}_{2+}. \quad (12)$$

Стационарное состояние соответствует осциллирующему во времени поведению главной гармоники. В этом случае из уравнений (9)–(12) можно найти, что уравнения для абсолютных значений $\widetilde{\psi}_{j\pm}$ отделены от уравнений для фаз. В этом случае выражение (8) можно удобно записать в виде

$$\mathrm{Re}\big\{[\psi_{1+}\exp(i\varphi_{1+}(t)) + \psi_{1-}\exp(-i\varphi_{1-}(t))]\exp(i\mathbf{q}_1\mathbf{r}) + [\psi_{2+}\exp(i\varphi_{2+}(t)) + \psi_{2-}\exp(-i\varphi_{2-}(t))]\exp(i\mathbf{q}_2\mathbf{r})\big\}, \quad (13)$$

где амплитуды основных гармоник ψ_{j+} и ψ_{j-} соответствуют положительным и отрицательным частотам соответственно, $j = 1, 2$ и $\psi_{j\pm} > 0$. В свою очередь, $\varphi_{1\pm}(t) = \lambda'' t + \phi_{1\pm}$ и $\varphi_{2\pm}(t) = \lambda'' t + \phi_{2\pm}$, $\lambda'' = |Im(\lambda)|$, $\phi_{j\pm}$ – соответствующие фазы. Заметим также, что в работе [19] рассмотрена феноменология только для фазового сдвига, равного нулю.

Далее, используя ур. (13), можно переписать ур. (9)–(12) для амплитуд $\psi_{j\pm}$ в виде:

$$\partial_t\psi_{1\pm} = \mathcal{L}'_{1\pm}\psi_{1\pm} - b'_5\psi_{2+}\psi_{2-}\psi_{1\mp}\exp(\pm i(\phi_+ + \phi_-)), \quad (14)$$

$$\partial_t\psi_{2\pm} = \mathcal{L}'_{2\pm}\psi_{2\pm} - b'_5\psi_{1+}\psi_{1-}\psi_{2\mp}\exp(\mp i(\phi_+ + \phi_-)), \quad (15)$$

где для упрощения описания введены следующие функции $\psi_{j\pm}$, $\psi_{j\pm} > 0$

$$\mathcal{L}'_{1\pm} = \lambda' - b'_1\psi_{1\pm}^2 - b'_2\psi_{1\mp}^2 - b'_3\psi_{2\pm}^2 - b'_4\psi_{2\mp}^2, \quad (16)$$

$$\mathcal{L}'_{2\pm} = \lambda' - b'_1\psi_{2\pm}^2 - b'_2\psi_{2\mp}^2 - b'_3\psi_{1\pm}^2 - b'_4\psi_{1\mp}^2, \quad (17)$$

где λ', b'_l – реальные части соответствующих величин, которые предполагаются положительными для индексов $l = 1, ..., 4$. На знак коэффициента b'_5, который есть реальная часть константы b_5, нет ограничений, и он требует определения.

Фазовые сдвиги зависящих от времени префакторов двух главных гармоник $_1$ и $_2$ вводятся как $\phi_+ = \phi_{2+} - \phi_{1+}$, $\phi_- = \phi_{2-} - \phi_{1-}$ в ур. (14)–(15). Стационарное состояние соответствует осциллирующему во времени поведению главных гармоник. Поскольку ур. (14)–(15) должны быть инвариантными относительно перестановки волновых векторов $_1$ и $_2$, возможные значения фазовых сдвигов: $\phi_\pm$ и $\phi_+ = \phi_- = 0$ и $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$. Случай $\phi_+ = -\phi_- = \pm\pi/2$ сводится к $\phi_+ = \phi_- = 0$.

Рассмотрим ситуацию $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$. В данном случае из уравнений (14)–(15)можно найти следующие условия реализации стационарного состояния

$$\mathcal{L}'_{1\pm}\psi_{1\pm} + b'_5\,\psi_{2+}\psi_{2-}\,\psi_{1\mp} = 0, \quad (18)$$

$$\mathcal{L}'_{2\pm}\psi_{2\pm} + b'_5\,\psi_{1+}\psi_{1-}\,\psi_{2\mp} = 0. \quad (19)$$

Очевидно, что система уравнений (18)–(19) обладает высокосимметричными решениями, тождественными решениям, полученным в [19], которые соответствуют эффективной одномерной бегущей волне или одномерной стоячей волне соответственно:

$$\psi_{1+} = \sqrt{\lambda'/b'_1}, \quad \psi_{1-} = \psi_{2+} = \psi_{2-} = 0\,, \quad (20)$$

для одномерной бегущей волны, и

$$\psi_{1+} = \psi_{1-} = \sqrt{\lambda'/(b'_1 + b'_2)}, \quad \psi_{2+} = \psi_{2-} = 0, \quad (21)$$

для одномерной стоячей волны. Аналогичные одномерные (1D) решения получаются очевидной перестановкой индексов. Кроме того, существуют следующие стационарные решения уравнений (18)–(19):

$$\psi_{1+} = \psi_{2+} = \sqrt{\lambda'/(b'_3 + b'_1)}, \quad \psi_{1-} = \psi_{2-} = 0, \quad (22)$$

которое является двумерным и соответствует двум одномерным бегущим волнам, распространяющимся во взаимно перпендикулярных направлениях. Очевидно, что существуют аналогичные решения с очевидной перестановкой (взаимозаменой) индексов.

Наконец, возможно следующее стационарное решение уравнений (18)–(19):

$$\psi = \psi_{1\pm} = \psi_{2\pm} = \sqrt{\frac{\lambda'}{\big((b'_1 + b'_2) + (b'_3 + b'_4 - b'_5)\big)}}, \quad (23)$$

соответствующее нетривиальной двумерной стоячей волне, которая представляет собой сумму двух ортогональных одномерных стоячих волн с фазовым сдвигом на $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$.

В свою очередь, анализ устойчивости уравнений (14)–(15) для случая $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$ показывает, что декременты, т.е. темпы затухания α, определяющие релаксацию $\propto \exp(-\alpha t)$ малых возмущений $\psi_{1\pm}$ и $\psi_{2\pm}$ вблизи решения в виде одномерной бегущей волны (20), совпадают с соответствующими выражениями из работы [19]:

$$\alpha_1 = 2\lambda', \alpha_j = \lambda'\,(b'_j - b'_1)/b'_1, \quad \text{где } j = 2, 3, 4. \quad (24)$$

Таким образом, решение в виде эффективной одномерной бегущей волны устойчиво, если выполнены условия $b'_2 > b'_1$, $b'_3 > b'_1$ и $b'_4 > b'_1$. Очевидно, что одновременное выполнение трех таких условий маловероятно. Аналогично, анализ устойчивости уравнений (14)–(15) для случая $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$ показывает, что декременты β, определяющие релаксацию

$\propto \exp(-\beta t)$ малых возмущений $\psi_{1\pm}$ и $\psi_{2\pm}$ вблизи решения в виде одномерной стоячей волны, см. (21), также совпадают с соответствующими выражениями из [19] и равны

$$\beta_1 = 2\lambda',\ \beta_2 = 2\lambda'\,(b'_1 - b'_2)/(b'_1 + b'_2),$$
$$\beta_{3,4} = \lambda'\left(b'_3 + b'_4 \mp b'_5 - (b'_1 + b'_2)\right)/(b'_1 + b'_2). \quad (25)$$

Это означает, что одномерная стоячая волна устойчива, если $b'_1 > b'_2$ и $(b'_3 + b'_4 - b'_5) > (b'_1 + b'_2)$. Соответственно, для обеспечения устойчивости должны одновременно выполняться два условия, а не три, как в случае одномерной бегущей волны. Очевидно, что выполнение двух условий более вероятно. Этот факт объясняет неустойчивость решений в виде одномерных бегущих волн.

Дальнейший анализ устойчивости уравнений (14)–(15) для случая $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$ показывает, что декременты $\varkappa$, определяющие релаксацию $\propto \exp(-\varkappa t)$ малых возмущений $\psi_{1\pm}$ и $\psi_{2\pm}$ вблизи решения (22), равны:

$$\varkappa_1 = 2\lambda', \quad \varkappa_2 = 2\lambda'\,(b'_1 - b'_3)/(b'_3 + b'_1),$$
$$\varkappa_{3,4} = \lambda'\Big(\frac{b'_2 + b'_4 \mp b'_5 - (b'_1 + b'_3)}{(b'_3 + b'_1)}\Big). \quad (26)$$

Таким образом, решение (22), соответствующее сумме двух одномерных бегущих волн, распространяющихся во взаимно перпендикулярных направлениях, устойчиво, если $b'_1 > b'_3$ и $b'_2 + b'_4 - b'_5 > (b'_1 + b'_3)$.

Напомним, что решения (23) для амплитуд $\psi_{1\pm}$ и $\psi_{2\pm}$ соответствуют 2D-стоячей волне, которая представляет собой сумму двух ортогональных 1D-стоячих волн. В свою очередь, из анализа устойчивости уравнений (14)–(15) для случая $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$ находим, что декременты $\widetilde{\varkappa}$, определяющие релаксацию $\propto \exp(-\widetilde{\varkappa} t)$ малых возмущений $\psi_{1\pm}$ и $\psi_{2\pm}$ вблизи решения для двумерной стоячей волны (23), имеют вид

$$\widetilde{\varkappa}_1 = 2\,\lambda', \quad (27)$$

$$\widetilde{\varkappa}_2 = 2\,\lambda'\Big(\frac{b'_1 + b'_2 + b'_5 - (b'_3 + b'_4)}{(b'_1 + b'_2 + b'_3 + b'_4 - b'_5)}\Big), \quad (28)$$

$$\widetilde{\varkappa}_3 = 2\,\lambda'\Big(\frac{b'_1 + b'_3 + b'_5 - (b'_2 + b'_4)}{(b'_1 + b'_2 + b'_3 + b'_4 - b'_5)}\Big), \quad (29)$$

$$\widetilde{\varkappa}_4 = 2\,\lambda'\Big(\frac{b'_1 + b'_4 + b'_5 - (b'_2 + b'_3)}{(b'_1 + b'_2 + b'_3 + b'_4 - b'_5)}\Big). \quad (30)$$

Можно убедиться, что решение (23) устойчиво если

$$b'_1 + b'_2 + b'_5 - (b'_3 + b'_4) > 0, \quad (31)$$
$$b'_1 + b'_3 + b'_5 - (b'_2 + b'_4) > 0, \quad (32)$$
$$b'_1 + b'_4 + b'_5 - (b'_2 + b'_3) > 0. \quad (33)$$

Сравнительный анализ условий устойчивости для всех решений показывает, что условия (31)–(33) с наибольшей вероятностью выполняются при положительном b'_5. Таким образом, мы находим, что двумерное решение (23) с фазовым сдвигом $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$ более вероятно в этом случае.

Подчеркнем, что для нулевого сдвига фаз ($\phi = 0$), все уравнения и результирующие выражения получаются из их аналогов для $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$ путем изменения знака параметра b'_5 на противоположный. Подчеркнем также, что все полученные выше декременты имеют порядок λ'. Поскольку $\lambda' \propto E_0 - E_{0c}$, это означает, что все декременты и инкременты неустойчивости пропорциональны отклонению $E_0 - E_{0c}$.

Заметим, что также необходимо учитывать возможные возмущения фаз. Рассмотрим случай стационарных решений (23), когда $|\widetilde{\psi}_{1+}| = |\widetilde{\psi}_{1-}| = |\widetilde{\psi}_{2+}| = |\widetilde{\psi}_{2-}| = \psi$, $\phi_+^{(0)} = \phi_-^{(0)} = \pi/2$. Введем возмущения фазы $\phi_+ = \pi/2 + \delta\phi_+$, $\phi_- = \pi/2 + \delta\phi_-$, где

$$\phi_{1+}(t) = \phi_{1+} + \delta\phi_{1+}, \quad \phi_{1-}(t) = \phi_{1-} + \delta\phi_{1-}, \quad (34)$$
$$\phi_{2+}(t) = \phi_{2+} + \delta\phi_{2+}, \quad \phi_{2-}(t) = \phi_{2-} + \delta\phi_{2-}, \quad (35)$$

$\phi_+^{(0)} = \phi_{2+} - \phi_{1+}$, $\phi_-^{(0)} = \phi_{2-} - \phi_{1-}$, $\delta\phi_+ = \delta\phi_{2+} - \delta\phi_{1+}$ и $\delta\phi_- = \delta\phi_{2-} - \delta\phi_{1-}$. Подставляя выражения (13), (34)–(35) в ур. (9)–(12), можно получить следующие динамические уравнения для $\delta\phi_+$ и $\delta\phi_-$

$$\partial_t \delta\phi_+ = -\,2\,|\psi|^2\, b'_5\, \sin(\delta\phi_+ + \delta\phi_-), \quad (36)$$
$$\partial_t \delta\phi_- = \,2\,|\psi|^2\, b'_5\, \sin(\delta\phi_+ + \delta\phi_-). \quad (37)$$

Из уравнений (36)–(37) следует, что

$$\partial_t(\delta\phi_+ + \delta\phi_-) = 0. \quad (38)$$

Таким образом, можно использовать решение

$$\delta\phi_+ + \delta\phi_- = 0\,. \quad (39)$$

Решение (39) означает, что в слабонелинейном режиме при амплитудах электрического поля, слегка превышающих их пороговые значения, динамические уравнения для фаз отщепляются от уравнений для амплитуд. Следовательно, полученные ранее условия устойчивости являются верными. Подчеркнем, что для уравнений, определяющих фазовые искажения, в случае нулевого фазового сдвига все уравнения и результирующие выражения также

получаются из соответствующих формул для ненулевого фазового сдвига $\phi_+ = -\phi_- = \pm\pi/2$ путем изменения знака параметра b_5' на противоположный.

Таким образом, из анализа устойчивости мы заключаем, что в слабонелинейном режиме при $b_5' > 0$ и при выполнении условий (31)–(33) двумерное решение (23) со сдвигом фазы $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$ является устойчивым. В случае при $b_5' < 0$ устойчиво двумерное решение $\phi_+ = \phi_- = 0$.

Учитывая, что численные расчеты демонстрируют устойчивость нетривиального двумерного решения со сдвигом фаз $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$, составляющих его двух ортогональных одномерных стоячих волн для случая комплексной характеристической экспоненты, можно сделать вывод, что выполнение условия $b_5' > 0$ наиболее вероятно в данном случае. Анализ устойчивости феноменологических уравнений (14)–(15) дает тот же результат. В этом случае стационарное решение феноменологических уравнений (18)–(19) для амплитуд $\psi_{j\pm}$, определяемое уравнением (23), является устойчивым. Данный режим соответствует описанной выше нетривиальной двумерной волне в виде "танцующих" двумерных структур, когда выражение (13) отвечает двум ортогональным одномерным стоячим волнам со сдвигом фаз $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$.

Чтобы описать результат двумерного решения и связать его с развитой феноменологией, целесообразно выделить зависящие от времени префакторы (амплитуды) двух составляющих его главных гармоник, которые модулируют пространственные профили этих главных гармоник в уравнении (13), и определить абсолютные значения этих префакторов как

$$\Psi_1(t) = |\psi_{1+}\exp(i\varphi_{1+}(t)) + \psi_{1-}\exp(-i\varphi_{1-}(t))|,$$
$$\Psi_2(t) = |\psi_{2+}\exp(i\varphi_{2+}(t)) + \psi_{2-}\exp(-i\varphi_{2-}(t))|. \quad (40)$$

Соответствующие временные зависимости Ψ_{n_z1} и Ψ_{n_z2} для n_z, полученного из численного решения нелинейных динамических уравнений (1)–(5), на интервале времени из рис. 1 показаны на рис. 4. Эти зависимости иллюстрируют двумерное поведение решения с фазовым сдвигом $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$ между составляющими его ортогональными одномерными стоячими волнами, описанными выше. Для каждого заданного отклонения электрического поля $E_0 - E_{0c}$ выполняется соотношение $\Psi^2_{n_z} = \Psi^2_{n_z1}(t) + \Psi^2_{n_z2}(t)$, где величина Ψ_{n_z} равна удвоенной амплитуде ψ, определяемой выражением (23), т.е. равна 2ψ. Такое поведение согласуется со свойствами предельного цикла. Величину $\Psi^2_{n_z}$ можно назвать квадратом амплитуды главной гармоники.

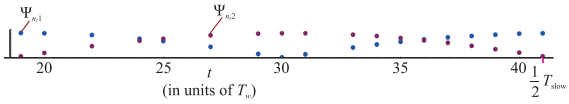

Рис. 4. (Цветной онлайн) Зависимости от времени абсолютных значений временных префакторов главных гармоник Ψ_{n_z1} и Ψ_{n_z2} для компоненты n_z на временном интервале из рис. 1

Чтобы связать феноменологическое выражение (13) с численным двумерным решением, полученным выше, рассмотрим эволюцию решения на интервале времени $[0, T_{\rm slow}/2]$ (рис. 1) в те же пять моментов времени t_i. В момент времени $t = t_1$ доминирует одномерная стоячая волна с волновым вектором $\mathbf{q}_1$ и зависящей от времени амплитудой Ψ_{n_z1}, равной 2ψ, в то время как зависящая от времени амплитуда Ψ_{n_z2} одномерной стоячей волны с волновым вектором $\mathbf{q_2}$ равна 0. Следовательно, решение приближенно представляет собой одномерную стоячую волну. В момент времени $t = t_2$ обе ортогональные одномерные стоячие волны с волновыми векторами $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ имеют равные зависящие от времени амплитуды, величина которых составляет $\sqrt{2}\psi$. Таким образом, решение является двумерным. В момент времени $t = t_3$ зависящая от времени амплитуда одномерной стоячей волны с волновым вектором $\mathbf{q}_1$ обращается в нуль. Соответственно, одномерная стоячая волна с волновым вектором $\mathbf{q}_2$ и зависящей от времени амплитудой Ψ_{n_z2}, равной 2ψ, становится доминирующей. В свою очередь, в момент времени $t = t_4$ обе стоячие волны снова имеют равные амплитуды величиной $\sqrt{2}\psi$, образуя двумерное решение. Наконец, в момент времени $t = t_5$ одномерная стоячая волна с волновым вектором $\mathbf{q_1}$ и зависящей от времени амплитудой Ψ_{n_z1} , равной 2ψ, вновь становится доминирующей. При этом, зависящая от времени амплитуда стоячей волны с волновым вектором $\mathbf{q}_2$ обращается в нуль. Это означает, что восстанавливается исходная одномерная конфигурация с решением в виде одномерной стоячей волны с волновым вектором $\mathbf{q}_1$, но со сдвигом по фазе на π относительно момента времени $t = t_1$. В течение следующего интервала времени, равного $T_{\rm slow}/2$, решение возвращается к состоянию в момент $t = t_1$. Таким образом, мы делаем вывод, что численные результаты согласуются с разработанной двумерной феноменологией в духе Гинзбурга–Ландау вблизи порога неустойчивости.

Подчеркнем, что критическое поведение λ' вблизи порогового значения амплитуды внешнего поля E_{0c} подчиняется закону $\lambda' \propto E_0 - E_{0c}$. Следовательно, амплитуды $\psi_{i\pm}$ (см. (23)) пропорциональны $\sqrt{E_0 - E_{0c}}$, что и обеспечивает критическое поведе-

ние зависимости квадрата амплитуды первой гармоники $|\Psi_{n_z}|^2$, представленной на рис. 3. В свою очередь, величина λ'' определяется мнимой частью λ. Однако, как было получено нами в [18], значения $\mathrm{Im}(\lambda)$ и, соответственно, λ'' слабо зависят от электрического поля в окрестности порога, т.е. они слабо зависят от отклонения E_0 от его порогового значения E_{0c}. Это означает, что частота медленной динамики решения не демонстрирует критического поведения. Отметим, что лишь поправки к частоте, связанные с мнимыми частями b_i, пропорциональны $E - E_c$, см. формулы (9)–(12).

Таким образом, настоящая работа демонстрирует, что в слабонелинейном режиме, когда материальные параметры и значения амплитуды внешнего поля соответствуют области осцилляторного режима в линейном приближении, истинно двумерное решение с амплитудами главных гармоник (23) и фазовым сдвигом $\phi_+ = \phi_- = \pm\pi/2$ между составляющими его ортогональными одномерными стоячими волнами является устойчивым. Это решение обладает самым широким бассейном притяжения. Имея на руках этот численный результат, можно определить необходимые условия для феноменологических констант из представленной двумерной феноменологии, позволяющие получить такое решение. Решения в виде одномерных стоячих волн реализуются только при начальных условиях, близких к одномерной стоячей волне. Этот факт указывает на узкую область притяжения и метастабильность такого решения.

Настоящее исследование представляет собой яркий пример нелинейного динамического поведения системы в нематиках. Путем решения системы точных нелинейных уравнений, полученных в работах [17, 19], продемонстрировано возникновение "танцующего" поведения двумерных паттернов выше порога флексоэлектрической неустойчивости. В анализе рассматриваются ЖК с отрицательной диэлектрической и проводимостной анизотропией. Чуть выше бифуркации Хопфа, соответствующей комплексной характеристической экспоненте, решение представляет собой устойчивый предельный цикл нелинейной системы. Проблема режимов и характера решений в случае амплитуд внешнего поля, значительно превышающих пороговое значение при бифуркации Хопфа, является предметом текущих исследований.

Описанный в работе тип флексоэлектрической неустойчивости может найти полезные применения в интегральной фотонике, в частности, при разработке систем оптической связи нового поколения (см. работы [54, 55]). Если планарные волноводы заполнить ЖК [56, 57], обладающими описанными свойствами, и разместить источники переменного поля в определенных точках, интегрированных в оптические мультиплексоры ввода-вывода [58, 59] вместе с поляризаторами, то такое устройство будет передавать выбранный тип сигнала в заданные интервалы времени, что является временным аналогом логики пространственной фильтрации на основе поляризации [60]. В частности, оно будет пропускать свет одного из четырех типов поляризации в течение четырех соответствующих временных интервалов. Обсуждаемая процедура потенциально также может использоваться для кодирования сигналов.

Я искренне благодарна В. В. Лебедеву и Е. И. Кацу за бесчисленные очень содержательные и полезные обсуждения проблем нелинейной физики и нематодинамики.

Финансирование работы. Данная работа была поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Государственное Задание FFWR-2024-0014).

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у нее нет конфликта интересов.

1. R. B. Meyer, "Piezoelectric Effects in Liquid Crystals", Phys. Rev. Lett. **22**, 918 (1969).
2. Yu. P. Bobylev and S. A. Pikin, "Threshold piezoelectric instability in a liquid crystal", ZhETF **72**, 369 (1977) [Yu. P. Bobylev and S. A. Pikin, "Threshold piezoelectric instability in a liquid crystal", JETP **45**, 195 (1977)].
3. M. I. Barnik, L. M. Blinov, A. N. Trufanov and B. A. Umanski, "Flexo-electric domains in liquid crystals", J. de Phys. **39**, 417 (1978).
4. W. Helfrich, "Conduction-Induced Alignment of Nematic Liquid Crystals", J. Chem. Phys. **51**, 4092 (1969).
5. J. D. Margerum, H. S. Lim, P. O. Braatz, and A. M. Lackner, "Effect of Dopants on the Conductivity Anisotropy and AC Dynamic Scattering of Liquid Crystals", Mol. Cryst. Liq. Cryst. **38**, 219 (1977).
6. Yu. P. Bobylev, V. G. Chigrinov, and S. A. Pikin, "Threshold flexoelectric effect in nematic liquid crystal", J. de Phys. Coll. **40**(C3), C3-331 (1979).
7. С. А. Пикин, *Структурные превращения в жидких кристаллах* (Наука, М., 1981) [S. A. Pikin, *Structural Transformations in Liquid Crystals* (Gordon and Breach, N.Y., 1991)].
8. S. Chandrasekhar, *Liquid Crystals* (Cambridge University Press, N.Y., 1992).
9. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, (Clarendon Press, Oxford, 1993).
10. L. M. Blinov and V. G. Chigrinov, *Electrooptic Effects in Liquid Crystals* (Springer, N.Y., 1994).

11. S. Rasenat, E. Braun, and V. Steinberg, "Eckhaus instability and defect nucleation in two-dimensional anisotropic systems", Phys. Rev. A **43**, 5728 (1991).
12. A.Buka and L.Kramer (editors), *Pattern formation in Liquid crystals* (Springer, N.Y., 1996).
13. A. Krekhov, W. Pesch, N. Eber, T. Toth-Katona, and A. Buka, "Nonstandard electroconvection and flexoelectricity in nematic liquid crystals", Phys. Rev. E, **77**, 021705 (2008).
14. W. Pesch, A. Krekhov, N. Eber, and A.Buka, "Nonlinear analysis of flexodomain in nematic liquid crystals", Phys. Rev. E **98**, 032702 (2018).
15. S. A. Pikin and B. A. Umanskii, "Dislocation Multiplication in the Flexoelectric Distortion Grid with an Increase in Electric Field Amplitude", Crystallography Reports **63**, 641 (2018).
16. B.-X. Li, V. Borshch, R.-L. Xiao, S. Paladugu, T. Turiv, S. V. Shiyanovskii, and O. D. Lavrentovich, "Electrically driven three-dimensional solitary waves as director bullets in nematic liquid crystals", Nat. Commun. **9**, 2912 (2018).
17. Е. С. Пикина, А. Р. Муратов, Е. И. Кац, В. В. Лебедев, "Нелинейная электрогидродинамика жидких кристаллов", ЖЭТФ **164**, 129 (2023) [E. S. Pikina, A. R. Muratov, E. I. Kats, and V. V. Lebedev, "Nonlinear Electro-Hydrodynamics of Liquid Crystals", JETP **137**, 114 (2023); https://doi.org/10.1134/S1063776123070075.
18. E. S. Pikina, A. R. Muratov, E. I. Kats, and V. V. Lebedev, "Dynamic flexoelectric instabilities in nematic liquid crystals", Phys. Rev. E **110**, 024701 (2024).
19. E. S. Pikina, A. R. Muratov, E. I. Kats, and V. V. Lebedev, "Pattern formation in nonlinear dynamics of nematic liquid crystals above the flexoelectric instability threshold", Phys. Fluids **38**, 087101 (2026); doi: 10.1063/5.0343775.
20. L. Park and J. V. Selinger, "Flexoelectricity versus electrostatics in polar nematic liquid crystals", Phys. Rev. E **111**, L053402 (2025).
21. Q. Peng, H. Wang, Y. Shao, Y. Tian, J. Wu, X. Zhu, Y. Ding, R. Chen, and Q. Liao, "Flow transition and heat transfer enhancement in electrothermal convection of dielectric liquids in a finned cavity", Phys. Fluids **37**, 034115 (2025).
22. A. Mani and K. M. Wang, "Electroconvection Near Electrochemical Interfaces: Experiments, Modeling, and Computation", Annu. Rev. Fluid Mech. **52**, 509 (2020).
23. O. D. Lavrentovich, "Design of nematic liquid crystals to control microscale dynamics", Liquid Crystals Reviews **8**, 59 (2021).
24. I. Rehberg, S. Rasenat, and V. Steinberg, "Traveling Waves and Defect- Initiated Turbulence in Electroconvecting Nematics", Phys. Rev. Lett. **62**, 757 (1989).
25. Ph. Traore and A. T. Perez, "Two-dimensional numerical analysis of electroconvection in a dielectric liquid subjected to strong unipolar injection", Phys. Fluids **24**, 037102 (2012).
26. J. R. L. Cousins, N. J. Mottram, and S. K. Wilson, "Hele-Shaw flow of a nematic liquid crystal", Phys. Rev. E **110**, 034702 (2024).
27. M. Shiomi, E.-J. Choi, and J.-H. Huh, "Prewavy instability-originated dielectric chevrons of electroconvection in nematic liquid crystals", Phys. Rev. E **102**, 042704 (2020).
28. B.-X. Li, R.-L. Xiao, S. Paladugu, S. V. Shiyanovskii, and O. D. Lavrentovich, "Three-dimensional solitary waves with electrically tunable direction of propagation in nematics", Nat. Com. **10**, 3749 (2019).
29. B.-X. Li, R.-L. Xiao, S. V. Shiyanovskii, and O. D. Lavrentovich, "Soliton-induced liquid crystal enabled electrophoresis", Phys. Rev. Research **2**, 013178 (2020).
30. Y. Shen and I. Dierking, "Dynamic dissipative solitons in nematics with positive anisotropies", Soft Matter **16**, 5325 (2020).
31. Y. Shen and I. Dierking, "Electrically driven formation and dynamics of swallow-tail solitons in smectic A liquid crystals", Mater. Adv. **2**, 4752 (2021).
32. Y. Shen and I. Dierking, "Electrically Driven Formation and Dynamics of Skyrmionic Solitons in Chiral Nematics", Phys. Rev. Appl. **15**, 054023 (2021).
33. G. Goren, I. Procaccia, S. Rasenat, and V. Steinberg, "Interactions and dynamics of topological defects: Theory and experiments near the onset of weak turbulence", Phys. Rev. Lett. **63**, 1238 (1989).
34. I. Rehberg, S. Rasenat, J. Fineberg, M. de la Torre Juarez, and V. Steinberg, "Temporal modulation of traveling waves", Phys. Rev. Lett. **61**, 2249 (1988).
35. E. Braun, S. Rasenat, and V. Steinberg, "Mechanism of Transition to a Weak Turbulence in Extended Anisotropic Systems", Europhys. Lett. **15**, 597 (1991).
36. R. Williams, "Domains in Liquid Crystals", J. Chem. Phys. **39**, 384 (1963).
37. G. Heilmeier, L. A. Zanoni, and L. Barton, "Dynamic scattering: A new electrooptic effect in certain classes of nematic liquid crystals", Proc. IEEEE **56**, 1162 (1968).
38. W. Zimmermann, "Pattern Formation in Electrohydrodynamic Convection", MRS Bulletin **1**, 46 (1991).
39. Sh. Kai, K.-I. Hayashi, and Y. Hidaka, "Pattern Forming Instability in Homeotropically Aligned Liquid Crystals", J. Phys. Chem. **100**, 19007 (1996).
40. M. Kleman and O. D. Lavrentovich, *Soft Matter Physics: An Introduction* (Springer, N.Y. 2003).
41. P. Oswald and P. Pieranski, *Nematic and Cholesteric Liquid Crystals: Concepts and Physical Properties Illustrated by Experiments, Liquid Crystals Book Series* (Taylor and Francis, London, 2005).

42. Sh.-Q. Zhou and G. Ahlers, "Spatiotemporal chaos in electroconvection of a homeotropically aligned nematic liquid crystal", Phys. Rev. E **74**, 046212 (2006).
43. M. Cross and H. Greenside, *Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).
44. K. Takahashi and Y. Kimura, "Dynamics of colloidal particles in electrohydrodynamic convection of nematic liquid crystal", Phys. Rev. E **90**, 012502 (2014).
45. A. Krekhov, B. Dressel, W. Pesch, V. Delev, and E. Batyrshin, "Spatiotemporal complexity of electroconvection patterns in nematic liquid crystals", Phys. Rev. E **92**, 06521 (2015).
46. N. Eber, P. Salamon, and A. Buka, "Electrically induced patterns in nematics and how to avoid them", Liquid Crystals Reviews **4**, 101 (2016).
47. E. C. Gartland, Jr., "Electric-Field-Induced Instabilities in Nematic Liquid Crystals", SIAM J. Appl. Math. **81** (2021).
48. K.-W.Lee and T.Poschel, "Electroconvection of Pure Nematic Liquid Crystals without Free Charge Carriers", Soft Matter **13**, 8816 (2017).
49. P. Leask, "Topological transition from a hopfion to a toron via flexoelectric self-polarization in chiral liquid crystals", Phys. Rev. Research **7**, 043001 (2025).
50. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка* (Наука М., 1966) [A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maier, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems* (Nauka, Moscow, 1966)].
51. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер, *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости* (Наука, М., 1967) [A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maier, *Bifurcation Theory of Dynamical Systems on the Plane* (Nauka, Moscow, 1967)].
52. B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, qand Y.-H. Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, ed. by I. M. James, London Math. SOC. Lecture Notes, v. 41 (Cambridge University Press, Cambridge, 1981).
53. В. И. Арнольд, В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, Л. П. Шильников, *Теория бифуркаций. Т. 5* в *Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления (раздел "Динамические системы –5")* (ВИНИТИ, М., 1986) [V. I. Arnold, V. S. Afraimovich, Yu. S. Il'yashenko, L. P. Shil'nikov, *Bifurcation theory* (in Russian) in D. V. Anosov and V. I. Arnold (editors), *Dynamical systems* (VINITI, Moscow, 1986), v. 5].
54. S. Ertman, K. Orzechowski, K. Rutkowska, O. Kołodyńska, J. Różycka, A. Ignaciuk, N. Wasilewska, T. Osuch, and T. R. Woliński, "Periodic liquid crystalline waveguiding microstructures", Sci. Rep. **13**, 13896 (2023).
55. I. Muševič, "Liquid-crystal micro-photonics", Liq. Cryst. Rev. **4**, 1 (2016).
56. J. Whinnery, H. Chenming, and Y. Kwon, "Liquid-crystal waveguides for integrated optics", IEEE J. Quantum Electron. **13**, 262 (1977).
57. T. We, P. Chen, M.-J. Tang, G.-X. Wu, Z.-X. Chen, Z.-X. Shen, S.-J. Ge, F. Xu, Wei Hu, and Y.-Q. Lu, "Liquid-crystal-mediated active waveguides toward programmable integrated optics", Adv. Opt. Mater. **8**, 1902033 (2020).
58. *Handbook of Fiber Optic Data Communication: Chapter 5. Optical Wavelength-Division Multiplexing for Data Communication Networks*, ed. by C. DeCusatis (Elsevier Inc. Chapters, Amsterdam, 2013).
59. R. Asquini, J. D'Angelo, and A. d'Alessandro, "A Switchable Optical Add-Drop Multiplexer using Ion-Exchange Waveguides and a POLICRYPS Grating Overlayer", Mol. Cryst. and Liq. Cryst. **450**, 203/[403] (2006).
60. A. W. Lohmann and J. Weigelt, "Spatial filtering logic based on polarization", Appl. Opt. **26**, 131 (1987).