Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 9, с. 776 – 783 © 2026 г. 10 ноября

Быстрый расчет рассеянного поля параксиальных пучков на периодических структурах с использованием метода резонансного подпространства

С. А. Дьяков[1)], *И. М. Фрадкин, Н. С. Салахова, Д. А. Дресвянкин, Н. А. Гиппиус*[1)]

Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия

Поступила в редакцию 22 сентября 2026 г.
После переработки 5 октября 2026 г.
Принята к публикации 7 октября 2026 г.

Традиционный подход к расчету поля параксиального оптического пучка при взаимодействии с периодической структурой классическим фурье-модальным методом требует разложения падающего поля на множество плоских волн с последующим независимым расчетом поля каждой плоской волны. Поскольку для точного описания ограниченного в пространстве пучка необходимо несколько сотен плоских волн, а для каждой плоской волны требуется использовать достаточное число фурье-гармоник, вычислительные затраты становятся чрезмерными, особенно в задачах оптимизации параметров. В данной работе мы предлагаем решение этой проблемы, основанное на недавно разработанном нами методе резонансного подпространства, основная идея которого заключается в явном учете того факта, что отклик структуры в узком диапазоне углов и частот определяется, как правило, небольшой группой резонансных мод. На примере рассеяния гауссова пучка на периодической кремниевой мембране мы демонстрируем, что новый подход позволяет сократить время расчета более, чем на 2 порядка по сравнению с классическим фурье-модальным методом. Предложенный метод открывает практический путь для быстрого моделирования оптических пучков в сложных резонансных метаповерхностях, важный для задач лазерной физики, сенсорики и интегральной фотоники.

DOI: 10.7868/S3034576626110111

1. Введение. Расчет пространственного распределения электромагнитного поля параксиальных оптических пучков, взаимодействующих с периодическими структурами, такими как метаповерхность или фотонно-кристаллический слой (рис. 1), является важной задачей при проектировании устройств управления светом. Несмотря на то, что поле падающего пучка, например, гауссова, описывается аналитически простым выражением, рассеянное поле не поддается прямому аналитическому описанию из-за сложного резонансного отклика неоднородной среды.

Классический вычислительный способ решения этой задачи заключается в спектральном разложении падающего пучка по плоским волнам. Каждая такая волна с фиксированным поперечным волновым вектором падает на структуру под своим углом, и для нее независимо решается задача дифракции, как правило, с помощью фурье-модального метода (ФММ, в англоязычной литературе также известный как Rigorous coupled wave analysis – RCWA) [1, 2], включая устойчивые и эффективные алгоритмы вычисления матрицы рассеяния [3–11]. Затем полученные рассеянные поля плоских волн суммируются с определенными весовыми коэффициентами (комплексными амплитудами), что дает искомое поле. Несмотря на свою универсальность, этот подход имеет принципиальный недостаток: для корректного представления параксиального пучка даже с небольшой угловой расходимостью требуется его разложение на несколько сотен, а то и тысяч плоских волн. В сочетании с необходимостью использовать большое число фурье-гармоник в ФММ для точного описания резонансных особенностей полное время расчета становится практически неприемлемым для задач параметрической оптимизации или сканирования спектра.

Основная причина большого времени расчета в таком подходе кроется в избыточности вычислений: для каждой плоской волны заново решается задача на собственные значения, хотя отклик структуры в узком диапазоне углов определяется, как правило, небольшой группой резонансных мод. Существующие методы резонансного приближения матрицы рассеяния [12–14] решают проблему лишь частично, поскольку требуют ручной сортировки резонансов,

[1)]e-mail: :s.dyakov@skoltech.ru; n.gippius@skoltech.ru

энергия которых изменяется в зависимости от волнового вектора и других параметров системы.

В настоящей работе мы предлагаем устранить данную несогласованность и использовать для описания периодических пластин недавно разработанный нами метод резонансного подпространства [15]. В отличие от стандартных резонансных приближений [11–14], отслеживающих полюс матрицы рассеяния в комплексной плоскости энергий при фиксированных внешних параметрах, наш метод рассматривает все параметры (энергию, волновой вектор, геометрические размеры) на равных основаниях. Мы показываем, что для широкого класса структур, которые могут быть разделены на две нерезонансные части, резонансы возникают исключительно за счет многократного прохода связанных фурье-гармоник между этими частями, аналогично модам Фабри–Перо.

Ключевая идея нашего подхода к решению задачи о пучке заключается в следующем. Вместо того чтобы рассчитывать рассеянное поле для каждой плоской волны, мы один раз в выбранной опорной точке в пространстве параметров (на заданной частоте и при нормальном угле падения) определяем набор резонансов, дающих основной вклад в матрицу рассеяния, и на основе этих резонансов создаем резонансное подпространство малой размерности. Затем, используя гладкую зависимость матриц переотражения и фазы от поперечного волнового вектора, мы экстраполируем резонансный отклик структуры на всю область пространства параметров, занимаемую спектром пучка. Это позволяет вычислить рассеянное поле каждой фурье-компоненты пучка не путем дорогостоящего решения дифракционной задачи, а через простые матричные проекции на заранее построенное резонансное подпространство.

Как будет показано ниже на конкретном примере расчета пропускания гауссова пучка через кремниевую решетку, предложенный метод обеспечивает сокращение времени вычислений более, чем в сто раз без существенной потери точности. Таким образом, разработанный подход может быть использован в задачах многопараметрической оптимизации, критически важной для современной индустрии вычислительной нанофотоники.

2. Описание методов.

2.1. Поле гауссова пучка. Гауссов пучок является решением параксиального уравнения Гельмгольца. В простейшем случае поперечные компоненты его электрического поля можно описать скалярной функцией

$$U(\mathbf{r}) = \frac{A_0 W_0}{W(z)} \times \tag{1}$$
$$\times \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{W^2(z)} + ikz + ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)} - i\xi(z)\right\},$$

где A_0 – амплитуда пучка, $W(z)$ – радиус пучка, $R(z)$ – кривизна пучка, $\xi(z)$ – набег фазы, W_0 – радиус перетяжки. Выражения для этих параметров можно найти в учебниках по оптике [16]. В формуле (1) $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, z_0 – половина глубины фокусировки (длина Рэлея), λ – длина волны в вакууме, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ – пространственные координаты.

Рассмотрим систему, в которой пучок сверху падает на периодическую структуру и проходит через нее (рис. 1). Распределение поля падающего пучка,

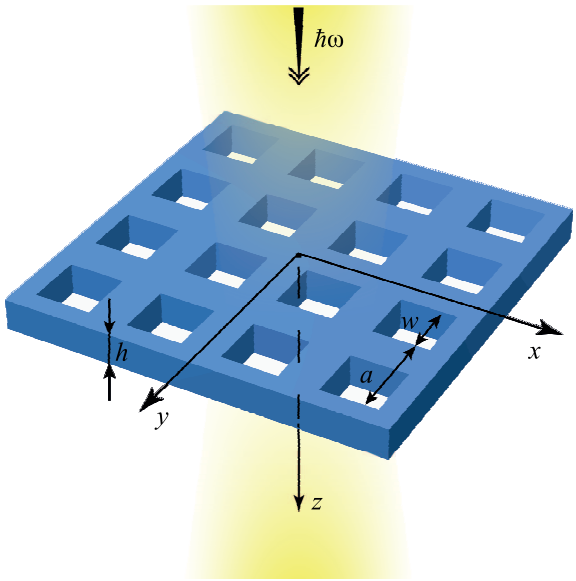

Рис. 1. (Цветной онлайн) Схема периодического слоя и нормально падающего на него гауссова пучка. Период структуры $a = 1$ мкм, ширина квадратных отверстий $w = 0.6$ мкм, толщина слоя $h = 0.1$ мкм

заданного формулой (1), удобно представить в виде разложения по плоским волнам

$$E_{\text{inc}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\iint A_{\text{inc}}(k_x, k_y) e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z} dk_x dk_y, \tag{2}$$

где комплексная амплитуда $A_{\text{inc}}(k_x, k_y)$ для фундаментального гауссова пучка имеет нормальное распределение

$$A_{\text{inc}}(k_x, k_y) = A_0 \pi W_0^2 e^{-\frac{(k_x^2+k_y^2)W_0^2}{4}}. \tag{3}$$

Полное поле, в свою очередь, собирается из действующих полей падающих плоских волн с такими же амплитудами:

$$E_{\text{total}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\iint A_{\text{inc}}(k_x, k_y)E(\mathbf{r}; k_x, k_y)dk_x dk_y. \quad (4)$$

Полное поле может быть также представлено в виде интеграла по плоским волнам аналогично формуле (2), но уже с другими амплитудами. Поэтому, например, для прошедшего поля можно записать

$$E_{\text{tr}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi^2}\iint A_{\text{tr}}(k_x, k_y)e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z}dk_x dk_y. \quad (5)$$

На больших расстояниях от периодической структуры, в случае отсутствия дифракции, амплитуды плоских волн, прошедших через структуру, выражаются через падающие амплитуды и амплитудный коэффициент пропускания:

$$A_{\text{tr}}(k_x, k_y) = A_{\text{inc}}(k_x, k_y)t(k_x, k_y). \quad (6)$$

Аналогичным образом можно записать выражение и для отраженного поля. В расчетах интегрирование заменяется на суммирование по дискретному набору плоских волн, а сам набор плоских волн выбирается исходя из угловой расходимости пучка и ожидаемой пространственной неоднородности искомого поля.

Таким образом, вдали от периодической структуры полное поле гауссова пучка представляет собой сумму полей плоских волн, распространяющихся в различных направлениях, задаваемых проекциями волнового вектора (k_x, k_y), с весовыми комплексными амплитудами, определяемыми угловым спектром исходного распределения и амплитудными коэффициентами пропускания и отражения. Для расчета коэффициентов отражения и пропускания плоских волн через периодическую систему наиболее выгодно использовать ФММ.

2.2. Классический фурье-модальный метод. ФММ является одним из базовых численных подходов электродинамики периодических структур: дифракционных решеток, фотонных кристаллов, метаповерхностей [1, 2]. В отличие от сугубо численных методов, таких как FDTD и FEM, ФММ строит решение уравнений Максвелла полуаналитически.

В рамках ФММ структура разбивается на z-однородные слои. Пространственное распределение электромагнитного поля в каждом слое раскладывается по плоским волнам (фурье-гармоникам), после чего подстановка в уравнения Максвелла приводит к алгебраической задаче на собственные значения

$$\mathbb{M}\mathrm{F} = k_z\mathrm{F}, \quad (7)$$

где k_z – постоянные распространения (собственные числа), а столбцы материальной матрицы F (собственные векторы) описывают профили мод слоя.

Оптическая информация о системе содержится в ее матрице рассеяния, алгоритм расчета которой строится по следующей схеме:

1. Разбиение структуры на z-однородные слои, и разложение их диэлектрических/магнитных профилей в ряды Фурье.

2. Решение задачи на собственные значения (7) в каждом слое, нахождение мод и постоянных распространения k_z.

3. Построение матриц рассеяния каждого слоя с учетом набега фазы на толщине, а также матриц рассеяния границ между соседними слоями из условий непрерывности тангенциальных компонент полей.

4. Сшивка матриц рассеяния в единую матрицу структуры с помощью операции произведения матриц рассеяния

$$\mathbb{S}^{\text{tot}} = \mathbb{S}^{N_s,N} \otimes \mathbb{S}^{N} \otimes \cdots \otimes \mathbb{S}^{1} \otimes \mathbb{S}^{1,0}. \quad (8)$$

Этот формализм, в отличие от прямого перемножения матриц переноса, численно устойчив даже при наличии экспоненциально затухающих мод. После вычисления матрицы рассеяния происходит извлечение таких величин, как коэффициенты отражения, пропускания или поглощения системы, а при необходимости восстановление распределения полей внутри структуры.

Представленная численная схема нахождения решения уравнений Максвелла в слое и во всей многослойной структуре требует проверки сходимости по числу Фурье-гармоник. Известно, что в периодических структурах с высоким контрастом диэлектрической проницаемости в слое элементы матрицы рассеяния могут сходиться медленно.

Недостатком представленного алгоритма вычисления поля рассеянного гауссова пучка является то, что он требует численного решения задачи на собственные значения (7) для каждого требуемого набора плоских волн (k_x, k_y). Это обстоятельство, в сочетании с необходимостью суммирования по плоским волнам, а также использования достаточного числа фурье-гармоник может приводить к значительным вычислительным затратам и существенному увеличению времени расчета.

2.3. Метод резонансного подпространства. Как упоминалось во введении, основная причина значительного времени расчета в описанном подходе кроется в избыточности вычислений: для каждой плоской волны заново решается полная задача построения матрицы рассеяния, хотя отклик структуры в узком диапазоне углов и частот определяется, как правило, небольшой группой резонансных мод.

В традиционных резонансных приближениях [12–14] мода описывается как полюс на комплексной плоскости энергии при фиксированных прочих параметрах, что требует трудоемкого отслеживания полюсов и их гибридизации по зоне Бриллюэна или при изменении геометрии. Метод резонансного подпространства [15] трактует энергию фотона и все остальные параметры $\mathbf{p}$ системы (волновой вектор, размеры, проницаемости) равноправно.

Физическая основа метода резонансного подпространства может быть проиллюстрирована на аналогии с резонатором Фабри–Перо: амплитуда волны при одном обходе между зеркалами умножается на коэффициент $g_{\mathrm{rt}} = r^{\uparrow\downarrow} r^{\downarrow\uparrow} e^{2ik_z H}$, где H – расстояние между зеркалами, а $r^{\downarrow\uparrow}$ и $r^{\uparrow\downarrow}$ – коэффициенты отражения нижнего и верхнего зеркал соответственно. Учет многократных отражений дает $\frac{1}{1-g_{\mathrm{rt}}}$, а резонанс отвечает условию $g_{\mathrm{rt}} = \exp\{i\phi_{\mathrm{rt}}\} \to 1$ (фаза обхода, ϕ_{rt}, кратна 2π). В периодической структуре, разделенной горизонтальной плоскостью на верхнюю и нижнюю нерезонансные части с матрицами рассеяния $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$, эта скалярная величина обобщается до *матрицы переотражения*

$$\mathbb{G} = \mathbb{S}_2^{\uparrow\downarrow} \mathbb{S}_1^{\downarrow\uparrow}, \tag{9}$$

которая определяет резонансную часть полной матрицы рассеяния $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 \otimes \mathbb{S}_2$, пропорциональную $\mathbb{D} = (\hat{I} - \mathbb{G})^{-1} = \sum_n \mathbb{G}^n$ – сумме геометрического ряда, описывающего многократные переотражения между частями структуры. Поскольку $\mathbb{G}$ строится только из гладких нерезонансных матриц $\mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$, она сама гладко зависит от $\mathbf{p}$. Из спектрального разложения матрицы $\mathbb{G} = \sum_i |V_i\rangle \rho_i \langle W_i|$ следует, что $\mathbb{D} = \sum_i |V_i\rangle (1-\rho_i)^{-1} \langle W_i|$, а резонансам системы отвечают собственные значения ρ_i, близкие к 1, тогда как подавляющее большинство мод (при числе фурье-гармоник $N \gg 1$) эванесцентны и нерезонансны.

Эти соображения приводят нас к ключевой идее метода – выделить малое *резонансное подпространство*, натянутое на n_{res} собственных векторов матрицы переотражения с собственными значениями, близкими к 1. Несмотря на то, что отдельные собственные векторы сильно меняются вблизи антипересечений мод, проектор на это подпространство слабо зависит от параметров. Это позволяет зафиксировать его в некоторой ("якорной") точке $\mathbf{p}_0$ и работать с малой *ограниченной матрицей переотражения* g, являющейся проекцией полной матрицы, рассчитанной в точке $\mathbf{p}$ на базис в "якорной" точке $\mathbf{p}_0$:

$$\mathrm{g}_{ij}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0} = \langle W_i^{\mathbf{p}_0} | \mathbb{G}^{\mathbf{p}} | V_j^{\mathbf{p}_0} \rangle, \qquad \mathbb{G}_{\mathrm{res}}^{\mathbf{p}} \approx V_{\mathrm{res}}^{\mathbf{p}_0}\, \mathrm{g}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0}\, W_{\mathrm{res}}^{\mathbf{p}_0,\dagger}. \tag{10}$$

Эта $n_{\mathrm{res}} \times n_{\mathrm{res}}$ матрица содержит всю информацию о резонансах и гладко экстраполируется (например, линейно) из якорной точки: по одной дополнительной строгой точке на каждый варьируемый параметр дает нужную производную. Оказывается, что из-за быстрого вращения ρ_i в комплексной плоскости удобнее все же линейно экстраполировать не матрицу переотражения g, а *матрицу фазы*

$$\hat{\phi}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0} = -i \ln \mathrm{g}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0}, \tag{11}$$

которая ведет себя более гладко.

Из условия резонанса $\hat{\phi}\, \Psi_{\mathrm{res}} = 0$, линеаризованного по ω вблизи якорной частоты ω_0, строится компактный (в общем случае неэрмитов) эффективный гамильтониан

$$\hat{H}(\mathbf{p}) = \omega_0 + \left(\partial_\omega \hat{\phi}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0} \big|_{\omega_0} \right)^{-1} \hat{\phi}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0}, \tag{12}$$

комплексные собственные значения которого $\omega_{\mathrm{res}}(\mathbf{p})$ дают дисперсию и ширины линий мод, а собственные векторы – их гибридизацию, во всей окрестности якорной точки без новых строгих расчетов.

Поскольку в рассматриваемой задаче о рассеянии монохроматического пучка частота фотонов фиксирована, параметрами $\mathbf{p}$ выступают компоненты поперечного волнового вектора $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$. Выбрав якорную точку при нормальном падении ($k_x = k_y = 0$), мы вычисляем матрицу фазы и ее первые производные по k_x и k_y. Это позволяет линейно экстраполировать $\hat{\phi}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0}$ на всю область углового спектра падающего пучка:

$$\hat{\phi}(\mathbf{k}_\perp) \approx \hat{\phi}(0,0) + k_x \left.\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial k_x}\right|_{(0,0)} + k_y \left.\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial k_y}\right|_{(0,0)}. \tag{13}$$

Аналогично восстанавливается и оптический отклик: интересующие каналы рассеяния ("Quantities of Interest" (QoI) – например, амплитудные коэффициенты пропускания для плоских волн, формирующих пучок) выражаются как

$$\mathbb{S}^{\mathrm{QoI}} \approx \mathbb{B}_{\mathrm{out}}\, \mathrm{d}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0}\, \mathbb{B}_{\mathrm{in}} + \mathbb{S}_{\mathrm{nr}}^{\mathrm{QoI}}, \tag{14}$$

где малые матрицы связи $\mathbb{B}_{\mathrm{in,out}}$ и гладкий нерезонансный фон $\mathbb{S}_{\mathrm{nr}}^{\mathrm{QoI}}$ также экстраполируются вблизи якорной точки, а $\mathrm{d}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0} = \left(\hat{1} - \exp(i\hat{\phi}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0})\right)^{-1}$ получается из экстраполированного значения матрицы фазы $\hat{\phi}^{\mathbf{p},\mathbf{p}_0}$ (подробнее см. [15]).

В итоге, для быстрого расчета оптических спектров всех плоских волн пучка в окрестности якорной точки достаточно всего трех строгих ФММ-расчетов (якорная точка плюс две дополнительные для вычисления производных по k_x и k_y); дальнейший расчет матриц рассеяния для тысяч компонент пучка сводится к экстраполяции и простым операциям с матрицами малых размеров и занимает ничтожное время по сравнению со стандартным расчетом.

3. Численный пример. Для демонстрации эффективности метода резонансного подпространства рассмотрим прохождение гауссова пучка через кремниевую мембрану с отверстиями квадратного сечения, упорядоченными в квадратную решетку, как показано на рис. 1. В расчетах будем использовать пучок, который собирается из плоских волн, поляризованных вдоль оси y. Поскольку для расчета поля пучка необходимо вычислять матрицу рассеяния для разных компонент волнового вектора (k_x, k_y), выберем именно эти величины в качестве параметров в методе резонансного подпространства.

На первом шаге сравним зависимости коэффициента пропускания от компонент волнового вектора $|t_{yy}(k_x, k_y)|^2$, рассчитанные классическим ФММ и методом резонансного подпространства (рис. 2b, c). Поместим якорную точку в начало координат ($k_x = 0, k_y = 0$). На результирующих картах коэффициента пропускания видны диапазоны высокого пропускания (красные области), которые соответствуют квазиволноводным модам решетки. Видно, что, в целом, наблюдается хорошее согласие между обеими картами, однако и различия между двумя графиками также видны невооруженным взглядом.

Далее, разложим пучок с углом расходимости $2\theta_0 = 16^\circ$ на 1217 плоских волн, как показано точками на рис. 2d. Соотнеся локализацию выбранных плоских волн в K-пространстве с картами коэффициентов пропускания, можно оценить судьбу каждой плоской волны, прошедшей через периодическую структуру. Рассчитанные двумя способами по формуле (6) комплексные амплитуды плоских волн, прошедших через периодический слой, представлены на рис. 2e, f. Видно, в частности, что плоские волны с координатами в области наибольшего пропускания имеют наиболее сильные зависимости фазы от (k_x, k_y), а амплитуда прошедших плоских волн зависит от проекций волнового вектора (k_x, k_y) также немонотонно. Классический ФММ и метод резонансного подпространства дают очень похожие распределения амплитуд плоских волн.

Теперь, используя формулу (5), просуммируем поля плоских волн, прошедших через периодический слой с амплитудами, представленными на рис. 2e, f, и построим горизонтальную проекцию поля пучка на расстоянии 10 мкм от нижней границы мембраны (рис. 2h, i). Видно, что полученные профили плотности энергии электрического поля $|E(x, y)|^2$ существенно отличаются от профиля падающего на мембрану гауссова пучка и имеют три локальных максимума. Согласие между полями, рассчитанными при помощи ФММ и методом резонансного подпространства, можно оценить как хорошее, несмотря на некоторое различие в плотности энергии полей в побочных локальных максимумах.

Заметим, что для расчетов методом резонансного подпространства потребовалось значительно (в 255 раз) меньше времени, чем при помощи ФММ. Для объяснения этого замечательного факта, а также для дальнейшей оценки эффективности метода резонансного подпространства, исследуем зависимость времени расчета от числа фурье-гармоник, угла расходимости пучка и числа плоских волн. Структура времени расчета представлена на рис. 3, где каждый столбец соответствует своему параметру (число фурье-гармоник, угол расходимости пучка, число плоских волн), верхний ряд показывает относительный вклад отдельных этапов метода резонансного подпространства в общее время расчета, а нижний — абсолютное время расчета (и, где приведено, точность).

На рисунке 3a видно, как с ростом N_g перераспределяются доли времени внутри самого метода резонансного подпространства: доля этапа расчета матриц рассеяния вблизи опорной точки (желтый) быстро увеличивается и при больших N_g становится доминирующей ($\sim 90\,\%$), поскольку именно решение задачи на собственные значения в опорной точке чувствительно к числу фурье-гармоник. Доля извлечения матриц рассеяния для отдельных плоских волн (фиолетовый) при этом соответственно падает, так как эта операция определяется числом плоских волн N_p (зафиксированным на этой панели), а не N_g. На рисунке 3d (при $\theta_0 = 3^\circ$, $N_p = 1217$) время расчета ФММ (синяя сплошная линия) растет с N_g заметно быстрее времени метода резонансного подпространства (синяя пунктирная линия), поскольку в ФММ задача на собственные значения решается заново для каждой из N_p плоских волн, тогда как в новом ме-

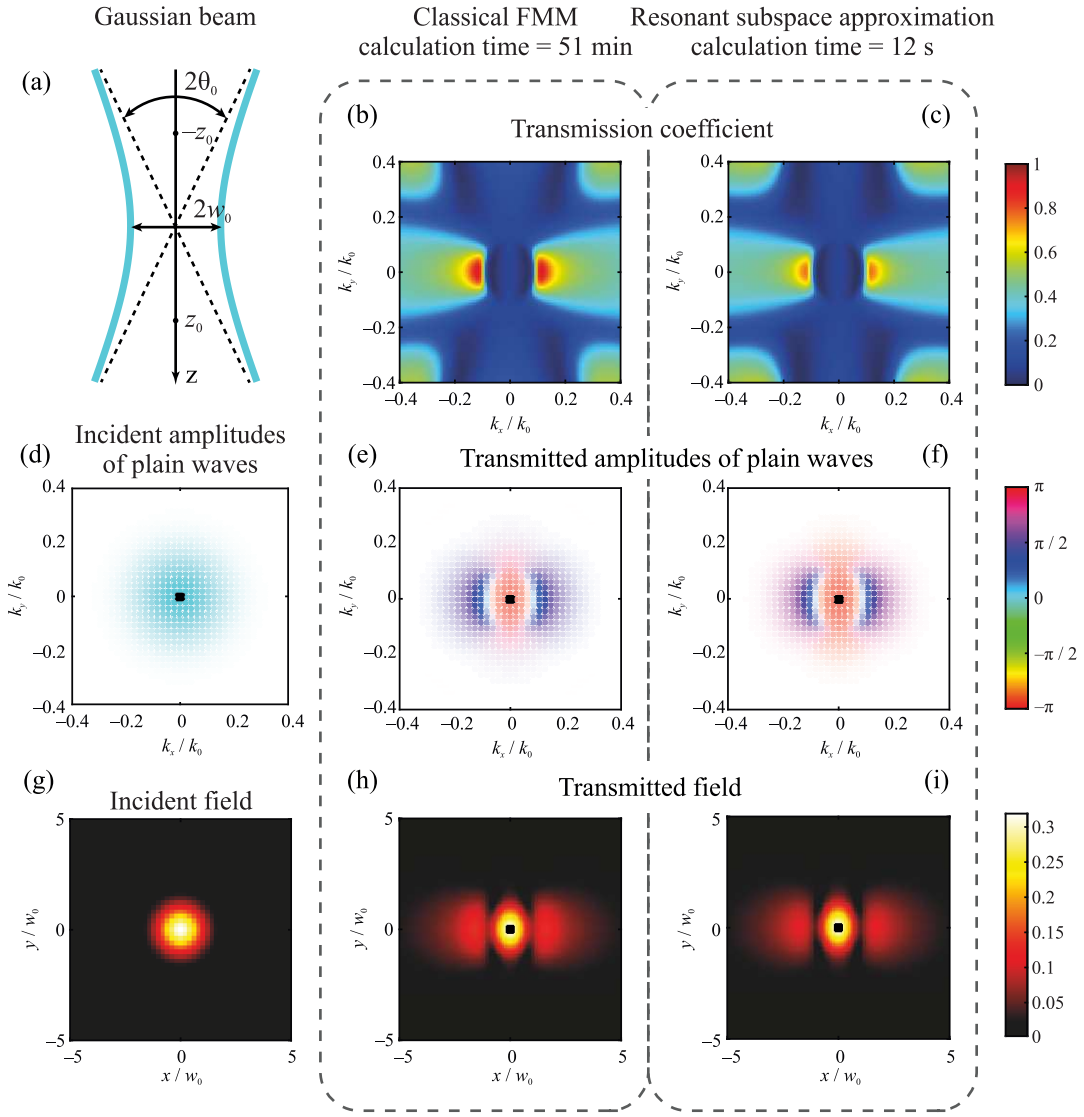

Рис. 2. (Цветной онлайн) (a) – Схема гауссова пучка. (d) – Комплексные амплитуды плоских волн, на которые разложен гауссов пучок с половиной угла расходимости $\theta_0 = 8°$. (g) – Плотность энергии электрического поля пучка в сечении $z = z_0$. (b) и (c) – Коэффициент пропускания $|t_{yy}|^2$ как функция компонент волнового вектора, рассчитанный при $a/\lambda = 0.62$ классическим ФММ и методом резонансного подпространства. (e) и (f) – Комплексные амплитуды распространяющихся плоских волн, прошедших через периодический слой. (h) и (i) – Плотность энергии электрического поля пучка, прошедшего через периодический слой, рассчитанная на расстоянии 10 мкм от нижней границы слоя классическим ФММ и методом резонансного подпространства. На панелях (d)–(f) модули комплексных амплитуд показаны яркостью точки (чем ярче, тем больше модуль), а аргументы (фазы) комплексных амплитуд – цветом; соответствие между цветом и фазой показаны на цветовой шкале справа

тоде дорогостоящий этап выполняется 3 раза вблизи якорной точки. В результате выигрыш метода резонансного подпространства по скорости увеличивается с ростом числа гармоник.

Проанализируем теперь зависимость времени от половины угла расходимости пучка θ_0, показанную на рис. 3b, e. При фиксированных $N_g = 121$, $N_p = 1217$ относительная структура затрат времени остается практически неизменной во всем диапазоне $\theta_0 = 1°$–$10°$, поскольку расходимость пучка не влияет на то, какие внутренние этапы в методе резонансного подпространства доминируют. Абсолютное время расчета также остается приблизительно постоянным для обоих методов, однако норма расхождения полей (бирюзовая кривая, правая ось) монотонно растет с θ_0: поскольку резонансное подпространство строится в единственной опорной точке ($k_x = k_y = 0$), точность экстраполяции снижается по

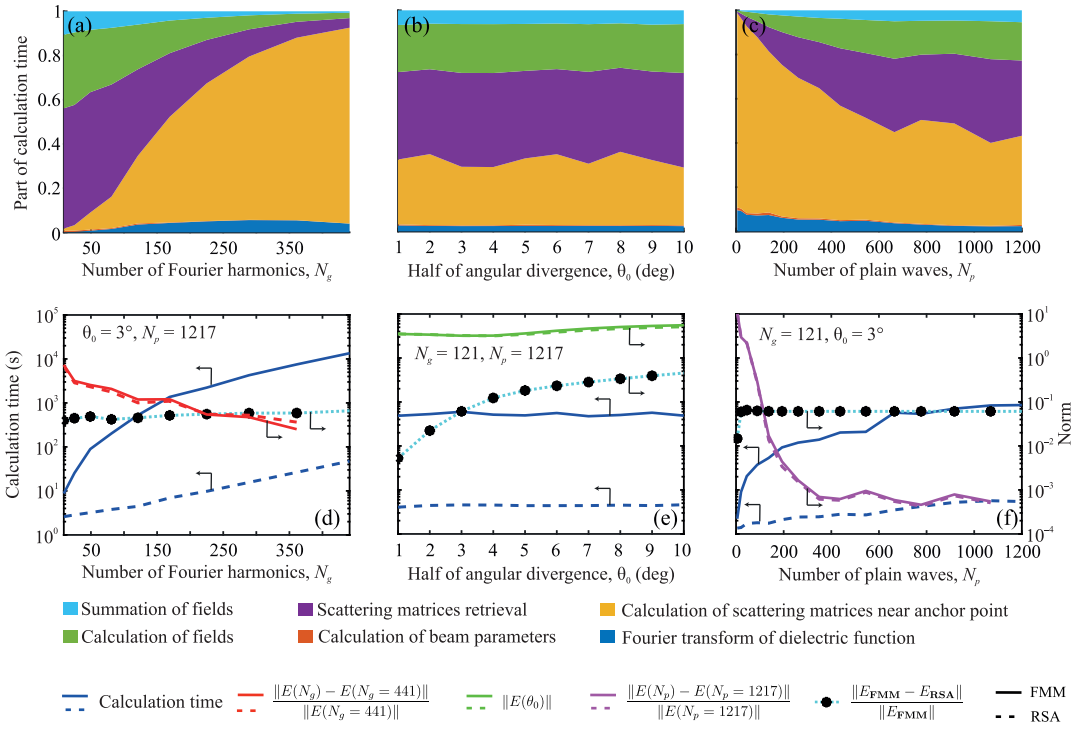

Рис. 3. (Цветной онлайн) (a)–(c) – Распределение общего времени расчета поля гауссова пучка, прошедшего через периодический слой, методом резонансного подпространства по вкладам от различных операций (показаны цветом на легенде снизу) в зависимости от числа фурье-гармоник N_g, от половины угла расходимости пучка θ_0 и от числа плоских волн N_p. (d) – Зависимость времени расчета и точности вычисления поля гауссова пучка классическим ФММ и методом резонансного подпространства от указанных параметров

мере увеличения доли сильно наклонных компонент пучка.

Наконец, рассмотрим зависимость времени расчета от числа плоских волн N_p (рис. 3c, f). При $N_g = 121$, $\theta_0 = 3°$ доля этапа извлечения матриц рассеяния растет с N_p, так как каждая дополнительная плоская волна требует еще одной проекции на уже построенное подпространство, а доля разового расчета в опорной точке (желтый) соответственно снижается. На рисунке 3f время метода резонансного подпространства растет значительно медленнее ФММ, поскольку основной вклад вносит однократный расчет в опорной точке; выигрыш по скорости, таким образом, растет с числом плоских волн, что согласуется с трендом на рис. 3c. Норма расхождения полей (бирюзовая линия) практически постоянна, а невязка полей по отношению к наиболее точному результату, полученному с числом плоских волн $N_p = 1217$, быстро снижается при увеличении N_p и выходит на плато при $N_p \gtrsim 200$–300. При малом числе волн погрешность обусловлена в первую очередь грубым представлением самого пучка, а после сходимости разложения по плоским волнам остаточное расхождение определяется собственной точностью ФММ.

Таким образом, рис. 3 раскрывает механизм ускорения: наиболее затратный этап построения резонансного подпространства выполняется однократно, а обработка каждой новой плоской волны сводится к дешевым матричным проекциям.

4. Выводы. В работе рассмотрена задача быстрого расчета рассеянного поля параксиальных пучков на периодических резонансных структурах. Показано, что классический подход, требующий разложения пучка на сотни плоских волн с независимым решением дифракционной задачи для каждой из них классическим методом ФММ, приводит к чрезмерным вычислительным затратам, ограничивающим применение таких расчетов в задачах оптимизации и сканирования параметров. В качестве решения предложено использовать метод резонансного подпространства. Вместо многократного решения полной задачи для каждой плоской волны мы строим малоразмерное резонансное подпространство в якорной точке и экстраполируем отклик структуры на всю область, занимаемую пространственным спектром пучка. Это позволяет вычислять вклад каждой спектральной компоненты без повторного решения уравнений Максвелла. На примере расчета по-

ля гауссова пучка, прошедшего через периодическую кремниевую мембрану, продемонстрировано более, чем стократное ускорение расчетов при сохранении приемлемой точности. Показано, что при использовании большого числа фурье-гармоник и значительного количества плоских волн, преимущество метода резонансного подпространства становится особенно выраженным. Отметим, что метод резонансного подпространства может быть применен и к произвольным пучкам при использовании соответствующего разложения на плоские волны. Кроме того, использование нескольких якорных точек также позволит расширить область применимости описанного метода, например, для расчета пучков с большей угловой расходимостью. Показанные результаты свидетельствуют о том, что метод резонансного подпространства является эффективным инструментом для обратного проектирования метаповерхностей и моделирования пучков в резонансных нанофотонных системах.

Финансирование работы. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-12-00351-П).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. S. G. Tikhodeev, A. L. Yablonskii, E. A. Muljarov, N. A. Gippius, and T. Ishihara, "Quasiguided modes and optical properties of photonic crystal slabs", Phys. Rev. B **66**(4), 045102 (2002).
2. M. Moharam, E. B. Grann, D. A. Pommet, and T. Gaylord, "Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings", J. Opt. Soc. Am. A **12**(5), 1068 (1995).
3. T. Weiss, G. Granet, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, and H. Giessen, "Matched coordinates and adaptive spatial resolution in the fourier modal method", Opt. Express **17**(10), 8051 (2009).
4. А. А. Щербаков, А. В.Тищенко, "Быстрый численный метод для моделирования одномерных дифракционных решеток", Квантовая электроника **40**(6), 538 (2010) [A. A. Shcherbakov and A. V. Tishchenko, "Fast numerical method for modelling one-dimensional diffraction gratings", Quantum Electronics **40**(6), 538 (2010)].
5. S. Spiridonov and A. A. Shcherbakov, "Reformulated fourier modal method with improved near field computations", Journal of Computational Science **67**, 101936 (2023).
6. I. M. Fradkin, S. A. Dyakov, and N. A. Gippius, "Fourier modal method for the description of nanoparticle lattices in the dipole approximation", Phys. Rev. B **99**(7), 075310 (2019).
7. I. M. Fradkin, S. A. Dyakov, and N. A. Gippius, "Nanoparticle lattices with bases: Fourier modal method and dipole approximation", Phys. Rev. B **102**(4), 045432 (2020).
8. N. S. Salakhova, I. M. Fradkin, S. A. Dyakov, and N. A. Gippius, "Fourier modal method for moiré lattices", Phys. Rev. B **104**(8), 085424 (2021).
9. I. Smagin, T. Weiss, and S. Dyakov, "Fourier modal method for gratings with chiral, nonreciprocal and bianisotropic materials", Phys. Rev. B **113**(23), 235408 (2026).
10. С. Дьяков, Н. Салахова, И. Фрадкин, Н. Гиппиус, "Интерполяция матрицы рассеяния для моделирования резонансных фотонно-кристаллических структур фурье-модальным методом", Письма в ЖЭТФ **122**(10), 636 (2025) [S. Dyakov, N. Salakhova, I. Fradkin, and N. Gippius, "Scattering matrix interpolation for modeling resonant photonic crystal structures using the fourier modal method", JETP Lett. **122**(10), 636 (2025)].
11. D. A. Bykov and L. ,L. Doskolovich, "Numerical methods for calculating poles of the scattering matrix with applications in grating theory", J. Light. Technol. **31**(5), 793 (2012).
12. N. Gippius, S. Tikhodeev, and T. Ishihara, "Optical properties of photonic crystal slabs with an asymmetrical unit cell", Physical Review B–Condensed Matter and Materials Physics **72**(4), 045138 (2005).
13. D. Gromyko, S. Dyakov, S. Tikhodeev, and N. Gippius, "Resonant mode coupling approximation for calculation of optical spectra of stacked photonic crystal slabs. part I", Photonics Nanostructures: Fundam. Appl. **53**, 101109 (2023).
14. D. A. Gromyko, S. A. Dyakov, S. G. Tikhodeev, and N. A. Gippius, "Resonant mode coupling approximation for calculation of optical spectra of stacked photonic crystal slabs. Part II", Photonics Nanostructures: Fundam. Appl. **53**, 101110 (2023).
15. N. Gippius, I. Fradkin, N. Salakhova, and S. Dyakov, "Resonant subspace approximation for photonic crystal slabs", arXiv preprint arXiv:2609.09810 (2026).
16. B. E. Saleh, M. C. Teich, and B. E. Saleh, *Fundamentals of photonics* (Wiley N.Y., 1991), v. 22.