Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 9, с. 784 – 789 © 2026 г. 10 ноября

Коллапс волновой функции квантовой частицы при измерении ее координаты как задача пространственной неустойчивости волны

С. А. Козлов[1)]

Университет ИТМО, 197101 С.-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 16 сентября 2026 г.
После переработки 27 сентября 2026 г.
Принята к публикации 1 октября 2026 г.

В работе обсуждается формальная аналогия в описании процесса коллапса волновой функции квантовой частицы при измерении ее координаты и хорошо известного в нелинейной оптике явления стохастической мелкомасштабной самофокусировки излучения, возникающего из-за пространственной неустойчивости оптической волны в нелинейной среде. На основании этой аналогии редукция волновой функции квантовой частицы при измерении ее координаты рассмотрена как процесс во времени, имеющий в полном соответствии с аксиоматикой квантовой механики вероятностный характер. Показано, что в предложенной модели взаимодействия квантовой частицы с измерительной системой выполняется соотношение неопределенностей “энергия–время”.

DOI: 10.7868/S3034576626110129

Введение. В настоящее время квантовые технологии широко внедряются в различные сферы человеческой деятельности. Построены тысячи километров волоконно-оптических квантовых коммуникаций, создаются квантовые вычислители на кубитах разной природы и даже кудитах с большим числом состояний, для решения многочисленных технических задач разрабатываются высокочувствительные квантовые сенсоры [1–5].

При создании и применении новых квантовых технологий вновь поднимается и ряд фундаментальных вопросов квантовой физики, прежде всего квантовой механики большого числа частиц. Среди них особое внимание по-прежнему привлекает описание квантовых измерений [6, 7].

Уже сто лет прошло с того времени, когда были сформулированы основные постулаты нерелятивистской квантовой механики, в которых нет оснований сомневаться и сегодня. Наиболее распространенная их формулировка такова: состояние квантовой частицы полностью характеризуется волновой функцией; изменение во времени волновой функции описывается уравнением Шредингера; а при измерении физической величины частицы с вероятностью, определяемой видом волновой функции, можно наблюдать то или иное значение этой величины, которое является одним из собственных значений ее оператора [8, 9]. При измерении физической величины частицы происходит редукция ее волновой функции к виду, который является собственной функцией оператора этой величины, соответствующей ее измеренному собственному значению.

В рамках данного формализма издавна и неоднократно предпринимались методические попытки описать измерение значения физической величины квантовой частицы как процесс ее взаимодействия с конкретным измерительным устройством [10, 11]. Но в соответствии с приведенной выше аксиоматикой квантовой механики результаты измерения от конкретного вида измерительного устройства не зависят, временная динамика волновой функции частицы в процессе измерения не обсуждается. Закономерен вопрос, а можно ли все-таки подобрать математический аппарат, описывающий измерение физической величины, такой, что результат в полном соответствии с существующей аксиоматикой является вероятностным, не зависит от вида измерительного устройства и при этом редукция волновой функции описывается во времени уравнением, сходным с уравнением Шредингера?

В настоящей работе обращено внимание на формальную аналогию в описании вероятностного процесса коллапса волновой функции квантовой частицы при измерении ее координаты и хорошо известного в нелинейной оптике явления мелкомасштабной самофокусировки оптического излучения, возникающего из-за пространственной неустойчивости волны в нелинейной среде. На основании этой аналогии предложена математическая модель измерительного процесса, в рамках которой описывается дина-

[1)]e-mail: sakozlov@itmo.ru

мика коллапса волновой функции квантовой частицы. Рассмотрен частный случай исходного состояния частицы с гладкой волновой функцией, существующей в одной цельной области пространства (а не в двух или более раздельных областях). Для него рассчитаны параметры энергии взаимодействия квантовой частицы и измерительной системы, при которых реализуется вероятностный коллапс волновой функции. Показано, что произведение времени редукции волновой функции и энергии взаимодействия частицы с измерительной системой в рассмотренной модели совпадает с известным соотношением неопределенностей.

Оптическая аналогия измерению координат квантовых частиц. Одним из фундаментальных уравнений нелинейной физики является нелинейное уравнение Шредингера [12]. Методы решения этого нелинейного уравнения и сами его решения хорошо изучены и сегодня могут быть найдены в многочисленной научной и учебной литературе (см., например, монографию [12] и учебные пособия [13–15]).

Самой обширной областью применения этого уравнения и наглядной верификации теоретических выводов из него в экспериментах, по-видимому, является нелинейная оптика, в которой нелинейное уравнение Шредингера описывает, в частности, самофокусировку оптического излучения [16]. В прозрачных диэлектрических средах их нелинейная восприимчивость, как правило, положительная, и при мощности волны, большей критической мощности самофокусировки, самовоздействие световой волны в нелинейной среде реализуется в ее модуляционной или филаментационной неустойчивости [12–16]. Уместно обратить внимание на оптическое квантование, которое происходит при разбиении пучка излучения в ходе самовоздействия на филаменты. В каждый формируемый оптический филамент уходит одна критическая мощность самофокусировки. Место возникновения филаментов на пучке носит вероятностный характер. Плотность вероятности возникновения филамента в некоторой области волновой поверхности пропорциональна интенсивности излучения в этой области. В рамках применения нелинейного уравнения Шредингера, как математической модели взаимодействия оптического излучения с веществом, каждый филамент может сжиматься сколь угодно сильно, происходит коллапс волнового поля [12–16]. Если филаментов много, то говорят о мелкомасштабной самофокусировке, а когда мощность светового пучка несколько больше, но близка критической, и формируется только один канал фокусировки, – о крупномасштабной самофокусировке.

Модель взаимодействия квантовых частиц с измерительной системой. Явное формальное сходство вероятностного коллапса оптической волны из-за ее пространственной неустойчивости в нелинейной среде с коллапсом волновой функции квантовой частицы (или некоторой совокупности квантовых частиц) при измерении ее (их) координат оправдывает попытку рассмотреть возможность описания динамики волновой функции частицы в процессе этого измерения уравнением Шредингера [8]:

$$i\hbar\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U_{ms}\Psi \qquad (1)$$

с энергией взаимодействия квантовой частицы (или некоторой совокупности их) с измерительной системой, вида

$$U_{ms}(\mathbf{r},t) = -g|\Psi(\mathbf{r},t)|^2. \qquad (2)$$

В уравнении (1) $\Psi(\mathbf{r},t)$ – это волновая функция частицы массы m в потенциальном поле измерительной системы $U_{ms}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{r}$ – координаты пространства (для совокупности частиц – координаты конфигурационного пространства), t – время. В соотношении (2) g – константа, характеризующая воздействие измерительной системы на состояние частицы (или совокупности частиц).

С точки зрения математического формализма, уравнение (1) с потенциальной энергией вида (2) идентично нелинейному уравнению Шредингера в оптике интенсивных лазерных пучков с точностью до замен в нем волновой функции на комплексную амплитуду поля лазерного излучения, а времени – на координату оси пучка, но, в общем случае, отличается от него размерностью лапласиана. Это важно, поскольку из нелинейной оптики известно, что характер развития самофокусировки существенно зависит от этой размерности [14–16] и, например, для одномерного (щелевого) пучка его коллапс не реализуется вовсе.

Запись уравнения Шредингера в нелинейном по функции Ψ виде (1)–(2), конечно, сразу требует ответа, по крайней мере, на два базовых для квантовой механики большого числа частиц вопроса.

Во-первых, как оправдать нелинейность уравнения Шредингера, соответственно, и отказ от принципа суперпозиции? Ответ понятен: согласно аксиоматике квантовой механики процесс измерения физической величины квантовой частицы не является линейным процессом. В таком процессе принцип суперпозиции соблюдаться и не должен. Кроме того, в квантовой физике уже хорошо известны нелинейные по Ψ уравнения эволюции волновой функции.

Так, уравнение именно вида (1)–(2) было предложено Гроссом и Питаевским в качестве математической модели динамики бозе-эйнштейновского конденсата в приближении парного взаимодействия частиц газа [12, 13, 17]. А в приближении трехчастичного взаимодействия уравнение Гросса–Питаевского дополняется нелинейными слагаемыми уже пятого порядка по Ψ [13].

Во-вторых, в процессе взаимодействия с "большой" измерительной системой волновая функция частицы, координата которой измеряется, по-прежнему, существует? Но и на этот вопрос возможно ответить утвердительно, опять сославшись на пример обоснования уравнения Гросса–Питаевского [13, 17], которое может описывать динамику одной отдельной частицы.

Подчеркнем, что пример уравнения Гросса–Питаевского выше дан не как обоснование уравнения (1)–(2) для описания процесса измерения, а только для того, чтобы напомнить об уже известном наличии в квантовой физике нелинейных по волновой функции уравнений. При этом надо понимать, что исходное уравнение Шредингера для многочастичной волновой функции всего бозе-эйнштейновского конденсата является линейным, т.е. фундаментальный принцип суперпозиции при его описании выполняется. Нелинейность в уравнении появляется в результате приближенного описания взаимодействия (дельтаобразного) между тождественными бозе-частицами. Этим приближением обусловлена и возможность описания нелинейным уравнением волновой функции отдельной частицы, которая взаимодействует с тождественными ей другими бозе-частицами. Таким образом, мы имеем пример того, как в квантовой физике системы большого числа частиц с волновой функцией в многомерном конфигурационном пространстве от описания ее динамики линейным уравнением Шредингера возможно перейти (приближенно) к нелинейному уравнению в конфигурационном пространстве меньшей размерности. При описании взаимодействия квантовой частицы с измерительным прибором, которые вместе, конечно, представляют собой также систему очень большого числа частиц, эта возможность, видимо, тоже не исключается.

Впрочем, задачей настоящего письма является обсуждение не столько особенностей физики квантового измерения, сколько формальная попытка подобрать такой математический аппарат, который, не противореча известной аксиоматике квантовой механики, позволял бы рассматривать вероятностный коллапс волновой функции квантовой частицы при измерении ее координаты как процесс ее редукции во времени.

Редукция волновой функции квантовой частицы при измерении ее координаты. Для простоты ниже будем рассматривать редукцию волновой функции одной частицы.

Для удобства теоретического анализа нормируем уравнения (1)–(2), введя безразмерные величины

$$\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}},t)=\frac{\Psi(\tilde{\mathbf{r}},t)}{\Psi_0},\quad \tilde{\mathbf{r}}=\frac{\mathbf{r}}{a}, \tag{3}$$

где Ψ_0 – максимальное значение волновой функции в области ее существования в начале измерительного процесса (при $t=t_0$), a – характерный размер этой области. В этих переменных уравнения (1)–(2) можно привести к виду

$$i\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial t}=-\frac{1}{T_d}\tilde{\Delta}\tilde{\Psi}-\frac{1}{T_m}|\tilde{\Psi}|^2\tilde{\Psi}, \tag{4}$$

где $T_d=\frac{2ma^2}{\hbar}$ – характеризует время проявления эффекта расплывания волновой функции (величина, аналогичная дифракционной длине, возникающей при нормировке оптической интерпретации нелинейного уравнения Шредингера [18]), $T_m=\frac{\hbar}{g|\Psi_0|^2}$ – характеризует время заметного изменения волновой функции из-за воздействия измерительной системы (аналогично нелинейной длине при нормировке нелинейного уравнения Шредингера в оптике [18]), $\tilde{\Delta}=\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tilde{z}^2}$ – трехмерный лапласиан в нормированных декартовых координатах.

При рассмотрении эволюции волновой функции квантовой частицы в соответствии с нелинейным уравнением (4) используем формализм, применяемый при изучении распадной неустойчивости в нелинейной среде оптической волны [14, 16, 19]. Таким образом, об особенностях редукции волновой функции будем судить по развитию ее малых возмущений.

Рассмотрим динамику волновой функции, в которой возникли амплитудно-фазовые возмущения, вида

$$\tilde{\Psi}_p(\tilde{\mathbf{r}},t)=\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}},t)[1+\alpha(\tilde{\mathbf{r}},t)+i\beta(\tilde{\mathbf{r}},t)], \tag{5}$$

где $\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}},t)$ – невозмущенное решение (4), а $\alpha(\tilde{\mathbf{r}},t)$ и $\beta(\tilde{\mathbf{r}},t)$ – случайные малые амплитудное и фазовое возмущения этого решения. Тогда для таких исходно малых возмущений получаем систему их эволюции в процессе измерения вида

$$\begin{cases}\dfrac{d\alpha}{dt}=-\dfrac{1}{T_g}\tilde{\Delta}\beta,\\[2mm] \dfrac{d\beta}{dt}=\dfrac{1}{T_d}\tilde{\Delta}\alpha+\dfrac{2}{T_m}\alpha|\tilde{\Psi}|^2.\end{cases} \tag{6}$$

При выводе системы (6) случайные возмущения рассматривали мелкомасштабными по отношению к размерам исходной области локализации волновой функции, т.е. полагали при $t = t_0$ выполняющимися неравенства

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}\alpha\tilde{\Psi} &\gg \tilde{\nabla}\alpha\tilde{\nabla}\tilde{\Psi}, \\ \tilde{\Delta}\beta\tilde{\Psi} &\gg \tilde{\nabla}\beta\tilde{\nabla}\tilde{\Psi}. \end{aligned} \tag{7}$$

Систему двух связанных уравнений эволюции амплитудных и фазовых возмущений (6) несложно свести к одному уравнению, например, только для амплитудных возмущений. Так, продифференцировав первое уравнение системы по времени t и подставив в него выражение $\frac{d\beta}{dt}$ из второго уравнения, получаем

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{1}{T_d^2}\tilde{\Delta}^2\alpha - \frac{2}{T_dT_m}\tilde{\Delta}(\alpha|\tilde{\Psi}|^2). \tag{8}$$

Поскольку мы рассматриваем мелкомасштабные возмущения (полагаем справедливым (9)), то в их окрестности квадрат модуля невозмущенной волновой функции $|\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}}, t)|^2$ можно считать слабо зависящим от координаты $\tilde{\mathbf{r}}$. Кроме того, рассматривая проявление воздействия измерительной системы на невозмущенную волновую функцию более значимым, чем ее расплывание (т.е. полагая отношение $\frac{T_m}{T_d}$ малым), можно считать функцию $|\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}}, t)|^2$ слабо зависящей и от времени t. Тогда в (8) квадрат модуля невозмущенной волновой функции можно представить в виде

$$\begin{aligned} |\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}}, t)|^2 = |\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{R}} + \Delta\mathbf{r}, t_0 + \Delta t)|^2 \approx \\ \approx |\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{R}}, t_0)|^2 + \nabla\frac{\partial}{\partial t}|\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}}, t)|^2\Big|_{\substack{\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{R}} \\ t = t_0}}\Delta\mathbf{r}\Delta t + \ldots \end{aligned} \tag{9}$$

где $\tilde{\mathbf{R}}$ – нормированная координата пространства в окрестности мелкомасштабного возмущения, $\Delta\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{R}}$, $\Delta t = t - t_0$. Далее в настоящем письме ограничимся в (9) только первым членом разложения в ряд.

При анализе решения уравнения (8) (с учетом представления (9)) используем спектральный подход, с помощью которого и было впервые рассмотрено развитие в нелинейной среде малых возмущений оптической волны [19]. Для возмущения вида $\alpha = \mathrm{Re}\,\alpha_0 e^{-i(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{r}} + \omega t)}$, где α_0 – амплитуда его спектральной компоненты с пространственной $\mathbf{k}$ и временной ω частотами, из (8) следует соотношение

$$\omega^2 = \frac{1}{T_d^2}k^4 - \frac{2}{T_dT_m}k^2|\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{R}}, t_0)|^2. \tag{10}$$

Здесь $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$.

При $\omega^2 < 0$ возмущение нарастает, соответственно, как следует из (10), условием неустойчивости волновой функции является неравенство

$$k^2 < 2\frac{T_d}{T_m}|\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{R}}, t_0)|^2. \tag{11}$$

При этом инкремент неустойчивых возмущений

$$|\omega| = \sqrt{\frac{2}{T_dT_m}k^2|\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{R}}, t_0)|^2 - \frac{1}{T_d^2}k^4} \tag{12}$$

имеет наибольшую величину $|\omega_{\max}| = \frac{1}{T_m}|\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{R}}, t_0)|^2$ при значении волнового числа $k_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{T_d}{T_m}|\tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{R}}, t_0)|^2}$. В абсолютных величинах максимальный инкремент возмущения принимает вид

$$|\omega_{\max}| = \frac{1}{\hbar}g|\Psi(\mathbf{R}, t_0)|^2. \tag{13}$$

Из соотношения (13) видно, что при взаимодействии с измерительной системой, воздействие которой на квантовую частицу характеризуется эффективной потенциальной энергией (2), наибольшее нарастание случайного малого возмущения волновой функции пропорционально величине квадрата модуля волновой функции частицы на момент начала измерения ее координаты $|\Psi(\mathbf{R}, t_0)|^2$ и определяется также параметром измерительной системы g. Таким образом, выражение (13) показывает, что плотность вероятности схлопывания волновой функции в той или иной области пространства определяется значением $|\Psi(\mathbf{R}, t_0)|^2$, что, несмотря на необычность приведенного рассмотрения, находится в полном соответствии с придаваемым ей в квантовой механике физическим смыслом.

Логично теперь, подобно тому как в нелинейной оптике вводится понятие длины мелкомасштабной самофокусировки – величины, обратной максимальному инкременту возмущения, – ввести и понятие времени измерения координаты частицы как величины $\tau_m = \frac{1}{|\omega_{\max}|}$. Тогда из (13) следует формула, которую естественно назвать соотношением неопределенностей "время измерения–необходимая для измерения энергия":

$$\tau_m U_{ms} = \hbar. \tag{14}$$

Таким образом, изложенный формализм имеет своим следствием хорошо известное соотношение Гейзенберга [8].

Заключение. В настоящей работе мы обсудили формальную аналогию в описании процесса коллапса волновой функции квантовой частицы при

измерении ее координаты и хорошо известного в нелинейной оптике явления стохастической мелкомасштабной самофокусировки излучения. На основании такой аналогии вероятностная редукция волновой функции квантовой частицы при измерении ее координаты рассмотрена как задача о пространственной неустойчивости волны. Приведен вид и найдены параметры энергии взаимодействия квантовой частицы с измерительной системой, при которых реализуется коллапс волновой функции. Показано, что в предложенной модели взаимодействия квантовой частицы с измерительной системой произведение времени редукции волнового пакета и энергии воздействия на частицу измерительной системы полностью совпадает с хорошо известным соотношением неопределенностей.

В работе мы попытались найти аналогию в описании редукции волновой функции при измерении положения квантовой частицы в теоретическом аппарате нелинейной оптики только для случая, когда волновая функция частицы до начала измерения рассматривалась физически гладкой и локализованной лишь в одной области. Разумеется, интересно было бы найти оптический аналог в более сложных случаях, например, коллапса волновой функции квантовой частицы при измерении ее координаты, если ее волновая функция исходно локализована в двух (и более) областях, или редукции волновой функции квантовой частицы при измерении физической величины, принимающей дискретный набор значений. С точки зрения автора настоящего письма, возможность найти такие аналоги существует. Например, для физической величины квантовой частицы, имеющей дискретный набор значений, аналогом редукции волновой функции в одно из собственных состояний наблюдаемой, по всей видимости, можно было бы рассматривать явление оптической мультистабильности, при котором одному распределению поля на входе в нелинейное оптическое устройство соответствует целый набор распределений поля на его выходе [20, 21].

Наверное, полезным в развитии теории измерений было бы и исследование возможностей сведения линейных уравнений динамики квантовой системы большого числа частиц в конфигурационном пространстве очень высокой размерности к нелинейным уравнениям, но с понижением размерности этого пространства.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Университета ИТМО. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор данной работы заявляет, что у него нет конфликта интересов.

1. C. Couteau, S. Barz, T. Durt, T. Gerrits, J. Huwer, R. Prevedel, J. Rarity, A. Shields, and G. Weihs, "Applications of single photons to quantum communication and computing", Nat. Rev. Phys. **5**, 326 (2023); https://doi.org/10.1038/s42254-023-00583-2. hal-04515796.
2. Y. Zhang, Y. Bian, Z. Li, S. Yu, and H. Guo, "Continuous-variable quantum key distribution system: Past, present, and future", Appl. Phys. Rev. **11**, 011318 (2024); https://doi.org/10.1063/5.0179566.
3. С. М. Кынев, В. В. Чистяков, М. В. Иночкин, С. В. Варжель, Д. В. Калязина, А. А. Дмитриев, А. В. Куликов, А. А. Сантьев, В. И. Беляков, А. К. Халтуринский, А. А. Анисимов, В. В. Кузнецов, С. А. Козлов, "Перспективы построения систем квантовой коммуникации на боковых частотах на отечественной компонентной базе", Известия вузов. Радиофизика **67**(1), 43 (2024) [S. M. Kynev, V. V. Chistyakov, M. V. Inochkin, S. V. Varzhel, D. V. Kalyazina, A. A. Dmitriev, A. V. Kulikov, A. A. Santev, V. I. Belyakov, A. K. Khalturinsky, A. A. Anisimov, V. V. Kuznetsov, and S. A. Kozlov, "Prospects for developing subcarrier wave quantum communication systems on the domestic component base", Radiophys. Quantum Electron. **67**(1), 38 (2024)].
4. S. Abend, B. Allard, A. S. Arnold et al. (Collaboration), "Technology roadmap for cold-atoms based quantum inertial sensor in space", AVS Quantum Sci. **5**, 019201 (2023); https://doi.org/10.1116/ 5.0098119.
5. И. П. Заливако, Н. В. Семенин, Н. О. Жаднов, К. П. Галстян, П. А. Каменских, В. Н. Смирнов, А. Е. Корольков, П. Л. Сидоров, А. С. Борисенко, Ю. П. Аносов, И. А. Семериков, К. Ю. Хабарова, Н. Н. Колачевский, "Квантовые вычисления на ионах в ловушках: принципы, достижения и перспективы", Успехи физических наук, **195**(6), 585 (2025) [I. V. Zalivako, N. V. Semenin, N. O. Zhadnov, K. P. Galstyan, P. A. Kamenskikh, V. N. Smirnov, A. E. Korolkov, P. L. Sidorov, A. S. Borisenko, Yu. P. Anosov, I. A. Semerikov, K. Yu. Khabarova, and N. N. Kolachevsky, "Quantum computing with trapped ions: principles, achievements, and prospects", Phys.-Uspechi **68**, 552 (2025)]; https://doi.org/10.3367/UFNr. 2024.12.039884.
6. Н. Жизан, Квантовая случайность: Нелокальность, телепортация и другие квантовые чудеса (Альпина нонфикшн, М., 2019), 202 с. [N. Gisin, *Quantum Chance: Nonlocality, Teleportation and Other Quantum Marvels* (Springer, 2014)].

7. А. С. Холево, *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории* (МЦНМО; НМУ, М., 2020), 364 с. [A. S. Holevo, *Statistical Structure of Quantum Theory, Lect. Notes Phys.* (Springer, Berlin, 2001), v. 67].
8. М. Джеммер, *Эволюция понятий квантовой механики* (Наука, М., 1985), 384 с. [M. Jammer, *The conceptual development of quantum mechanics*, (McGraw-Hill, N. Y., St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sidney, 1966)].
9. М. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация* (Мир, М., 2006), 824 с. [M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000)].
10. Д. И. Блохинцев, *Принципиальные вопросы квантовой механики* (Наука, М., 1987), 152 с. [D. I. Blokhintsev, *Principialnye voprosy kvantovoj mekhaniki* (Nauka, Moscow, 1987), 152 p.] [in Russian].
11. Ю. И. Воронцов, *Теория и методы макроскопических измерений* (Наука, М., 1989), 280 с. [Yu. I. Vorontsov, Teoriya i metody makroskopicheskih izmerenij (Nauka, Moscow, 1989), 280 p.] [in Russian].
12. А. М. Камчатнов, *Теория нелинейных волн* (Изд. дом ВШЭ, М., 2024), 792 с. [A. M. Kamchatnov, *Teoriya nelinejnyh voln* (Izd. dom VShE, Moscow, 2024), 792 p.] [in Russian].
13. А. А. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику* (Наукова думка, Киев, 1989), 304 с. [A. A. Kosevich and A. S. Kovalev, *Vvedenie v nelinejnuyu fizicheskuyu mekhaniku* (Naukova dumka, Kiev, 1989), 304 p.] [in Russian].
14. А. А. Балакин, И. Ю. Костюков, Г. М. Фрайман, *Основы теории нелинейных колебаний и волн* (Издательский Дом "Интеллект", Долгопрудный, 2020), 272 с. [A. A. Balakin, I. Yu. Kostyukov, and G. M. Fraiman, *Osnovy teorii nelinejnyh kolebanij i voln* (Izdatelskij Dom "Intellekt", Dolgoprudnyj, 2020), 272 p.].
15. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. П. Сухоруков, *Теория волн* (Наука, М., 1979), 384 с. [M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, and A. P. Sukhoruchkov, *Wave Theory* (Nauka, Moscow, 1979), 384 p.] [in Russian].
16. С. Н. Власов, В. И. Таланов, Самофокусировка волн (ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1997), 220 с. [S. N. Vlasov and V. I. Talanov, *Samofokusirovka voln* (IPF RAN, Nizhnij Novgorod, 1997), 220 p.] [in Russian].
17. Л. П. Питаевский, "Конденсация Бозе–Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию", УФН **168**, 641 (1998) [L. P. Pitaevskii, "Bose–Einstein condensation in magnetic traps. Introduction in a theory", Phys.-Uspekhi **168**(6), 569 (1998)].
18. S. A. Kozlov, A. A. Drozdov, S. Choudhary, M. A. Kniazev, and R. W. Boyd, "Suppression of self-focusing for few-cycle pulses", J. Opt. Soc. Am. **36**(10), G68 (2019).
19. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, "О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях", Письма в ЖЭТФ **3**(12), 471 (1966) [V. I. Bespalov and V. I. Talanov, "Filamentary Structure of Light Beams in Nonlinear Liquids", JETP Lett. **3**, 307 (1966)].
20. Х. Гиббс, *Оптическая бистабильность: Управление светом с помощью света* (Мир, М., 1988), 520 с. [H. Gibbs, *Optical Bistability: Controlling Light with Light* (Academic Press, N.Y., 1985), 471 p.].
21. Н. Н. Розанов, *Оптическая бистабильность и гистерезис в распределенных нелинейных системах* (Наука, М., 1997), 336 с. [N. N. Rosanov, *Optical bistability and hysteresis in distributive nonlinear systems* (Nauka Fizmatlit, Moscow, 1997), 336 p.] [in Russian].