Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 10, с. 793 – 802 © 2026 г. 25 ноября

Вычисление асимптотических нормировочных коэффициентов ядер массы $A \leq 10$ на основе Метода Ортогонализованных Функций Кластерных Каналов

Д. М. Родкин[+*×1)], *Ю. М. Чувильский*[+*]

[+]*Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова, 127055 Москва, Россия*

[*]*Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына МГУ имени М. В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия*

[×]*Российский университет дружбы народов (РУДН), 117198 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 августа 2026 г.
После переработки 14 октября 2026 г.
Принята к публикации 15 октября 2026 г.

Данная работа является основополагающей в запланированном цикле работ, посвященных широкомасштабным вычислениям асимптотических нормировочных коэффициентов нуклонных и кластерных каналов виртуального распада ядер *p*- и начала *sd*-оболочки. В рамках этого цикла предполагается существенно расширить возможности надежного теоретического описания сечений астрофизических ядерных реакций. В расчетах используется Метод Ортогонализованных Функций Кластерных Каналов, в основе которого лежат Модель Оболочек без Инертного Кора и процедура проектирования ее волновых функций на функции каналов слияния или распада. Разработана базирующаяся на результатах *ab initio* или *ab exitu* расчетов схема получения асимптотических нормировочных коэффициентов, обладающая предельной в рамках таких подходов точностью. В схеме используются измеренные значения энергии ядерных уровней и экстраполяция результатов расчетов асимптотических нормировочных коэффициентов на случай бесконечного базиса. Демонстрируются результаты использования Метода Ортогонализованных Функций Кластерных Каналов для описания асимптотических нормировочных коэффициентов широкого списка нуклонных каналов нескольких ядер массы $A \leq 10$.

DOI: 10.7868/S3034576626110145

Введение. Асимптотический нормировочный коэффициент (АНК) является фундаментальной характеристикой связанных ядерных состояний. Он определяет амплитуду функции канала фрагментации связанного состояния на больших расстояниях и, как следствие, является мерой ширины виртуального распада подпороговых резонансов. АНК определяют амплитуды прямого радиационного захвата нуклонов и кластеров, а также реакций передачи при низких энергиях. Описанию свойств и методов использования АНК для решения самых разнообразных задач физики ядерных реакций посвящено множество обзоров (см., например [1, 2]), в большом количестве экспериментальных и теоретических работ представлены результаты их измерений или расчетов. Математический аппарат АНК играет важнейшую роль в теории низкоэнергетических ядерных процессов: упругого рассеяния, радиационного захвата ядерных частиц, реакций передачи нуклонов и кластеров. В частности, АНК являются мощным инструментом исследования свойств реакций, характерных для ядерной астрофизики, так как в большинстве случаев определяют сечения захвата нуклонов и кластеров в процессах звездного нуклеосинтеза.

Прямое измерение значений АНК представляет собой довольно трудную задачу. Косвенно их можно извлекать из реакций радиационного захвата и процессов упругого рассеяния нейтронов, но число удобных мишеней для этих процессов ограничено. Кроме того, небольшая плотность нейтронных потоков современных установок затрудняет получение значений АНК с достаточно высокой статистической точностью. Извлечение величин АНК протонных и кластерных каналов из сечений аналогичных процессов с заряженными частицами сталкивается с существенными трудностями из-за высокого кулоновского барьера. Поэтому чаще значения АНК извлекаются из реакций передачи. Основной метод анализа

[1)]e-mail: rodkindm92@gmail.com

результатов таких измерений – использование Борновского приближения искаженных волн – Distorted Wave Born Approximation (БПИВ, DWBA). Он, однако, является, скорее, феноменологическим, поскольку зависит от параметров оптических потенциалов входного и выходного каналов, учета или игнорирования связи различных каналов, а также от характеристик второй из вершин, характерной для DWBA одноступенчатой диаграммы процесса переноса нуклона или кластера. Существует несколько методов извлечения АНК из реакций передачи, например метод эффективного радиуса [3] или метод спектроскопического фактора – spectroscopic factor (СФ–SF) [4]. Поэтому полученные значения могут сильно отличаться.

К настоящему времени разработано большое количество теоретических подходов, приспособленных для расчета АНК. Их краткое описание можно найти в указанных выше обзорах. Для нуклонных каналов ядер p-оболочки всеобъемлющие результаты были получены в работах Н. Тимофеюк [5, 6] на основе как традиционной оболочечной модели с инертным кором, так и с использованием неоднородного уравнения Пинкстона–Сэтчлера [7] для эффективного учета бесконечного набора отсутствующих в оболочечном базисе функций. В этих работах есть ряд заметных недостатков. Так, использование традиционной оболочечной модели с инертным кором вызывает трудности при описании возбужденных состояний, особенно для ядер конца p-оболочки, подобных ^{15}O. Этот подход не учитывает также действия оператора обменного ядра, что в ряде случаев приводит к существенной недооценке или переоценке значений как СФ, так и значений АНК. Следует добавить, что результаты, полученные в этих двух подходах, сильно различаются между собой.

Для исследования нуклонных АНК в относительно небольших диапазонах масс ядер использовались, в частности, и разнообразные подходы, базирующиеся на реалистических NN-потенциалах – Метод Монте-Карло Функций Грина (МКФГ) [8], Вариационный Метод Монте-Карло (ВММК) [9], Метод Связанных Кластеров (МСК) [10], Метод Самосогласованной Функции Грина (МСФГ) [11]. Значительный набор ядер вплоть до массы A = 9 был изучен в работе [12]. Эти схемы традиционно квалифицируются как "*ab initio*". *Ab initio* подход, в рамках такого определения, – это схема вычисления ядерных характеристик, в которой используются реалистические NN- и 3N-потенциалы, и эксплуатирующая базис, в котором каждый нуклон может занимать произвольную орбиту.

Все эти подходы вполне адекватны для описания асимптотических свойств каналов фрагментации ядер p-оболочки, но важно констатировать, что АНК в них получается опосредованными методами – при всем разнообразии вычислительных приемов почти во всех подходах СФ вычисляются в какой-либо строгой или вовлекающей в расчеты элементы феноменологии "*ab initio*" схеме, а для получения волновых функций (ВФ) относительного движения фрагментов используются феноменологические потенциалы, содержащие параметры, подгоняемые под энергию и размер системы. Кроме того, области применимости перечисленных подходов оказались достаточно узкими. Однако главным недостатком всех этих подходов является игнорирование эффектов, порождаемых оператором обменного ядра.

Исключение составляет Модель Оболочек Без Инертного Кора с Континуумом (NCSMC, МОБИКК) [13] – строгая *ab initio* схема, корректно учитывающая, к тому же, связь между ВФ относительного движения двух составных частиц с функцией обычной двухтельной задачи через A-нуклонное обменное ядро. Но точность расчета полных энергий связи (ПЭС) в Модели Оболочек Инертного Кора МОБИК – NCSM [14] расчетов и, как следствие, в NCSMC расчетах не превышает нескольких сотен кэВ, так что для анализа реакций радиационного захвата и значений АНК слабосвязанных уровней используется точная подстройка энергий связи околопороговых резонансов к известным экспериментальным значениям. Этот подход называется NCSMC-pheno [15]. Данная схема, однако, чрезвычайно сложна, поэтому диапазон доступных для ее применения масс ядер и их фрагментов, а также возбужденных уровней ядра и каналов их распада представляется довольно узким.

Ранее авторами был разработан Метод Ортогональных Функций Кластерных Каналов (МОФКК) [16], предназначенный для полностью *ab initio* или использующих элементы феноменологии (в том числе даже обычную оболочечную модель) исследований кластерных явлений в ядрах [17], а также для расчетов сечений ядерных реакций в R-матричной теории, использующих результаты *ab initio*, *ab exitu* и более простых подходов [18–20]. Эта схема позволяет напрямую проводить расчеты АНК связанных состояний, а также амплитуд приведенных парциальных ширин (АППШ) распада резонансов в различные кластерные каналы, используя A-нуклонные решения модели оболочек без инертного кора. Такой подход уже успешно использовался для изучения упругого рассеяния нейтронов на ^{9}Be [18], ши-

рокого списка реакций, протекающих через стадию образования компаунд-ядра ^{8}Be [19, 20], а также для расчета сечений радиационного захвата протона на ядрах ^{7}Be [21] и ^{8}B [22], в которых, помимо прочего, были получены и значения АНК для протонных каналов фрагментации нижних состояний $^8\mathrm{B}(2_1^+)$ и $^9\mathrm{C}(3/2_1^-)$. В перечисленных работах использовался потенциал Daejeon16 [23]. Этот потенциал был построен на базе традиционного N3LO *ab initio* взаимодействия КЭТП, но для его построения и корректировки использовались "локальные" фазово-эквивалентные преобразования, опирающиеся на данные об энергиях небольшого числа уровней энергии различных ядер p-оболочки. Это существенно повысило точность разнообразных вычислений, использующих данный потенциал. Его авторы предпочитали классифицировать его как *ab exitu*, но этот термин не прижился – на него тоже ссылаются как на *ab initio*.

В МОФКК, естественно, могут с успехом применяться и другие популярные в настоящее время межнуклонные взаимодействия типа N3LO, N4LO и т.д.

Расчеты в рамках NCSM были выполнены с помощью кода Bigstick [24]. Как и в NCSMC-pheno, мы используем в них экспериментально определенные энергии околопороговых уровней компаунд-ядра.

Набранный нами опыт (а первые предварительные вычисления АНК каналов распада ядра ^{7}Li в нейтронные, протонные и тритонные каналы были проделаны в работе, представленной статьей [25]), как и качественные соображения показывают, что МОФКК открывает очень широкие перспективы использования *ab initio* и близких к ним упрощенных схем для высокоточных расчетов асимптотических нормировочных коэффициентов виртуального распада связанных состояний. Это определяется, во-первых, тем обстоятельством, что характеризующая асимптотику закрытого канала функция Уиттекера является быстро убывающей и поэтому достаточно хорошо воспроизводится на относительно небольшом базисе осцилляторных ВФ относительного движения частиц в канале. По этой причине отпадает необходимость вычисления ВФ каналов на чрезвычайно больших расстояниях, на что нацелена NCSMC. Во-вторых, задача вычисления АНК закрытого канала существенно проще, чем расчет АППШ аналогичного по структуре открытого канала, а такие задачи уже успешно решались нами ранее. В-третьих, разработанный подход позволяет без серьезных дополнительных усилий рассчитывать АНК не только нуклонных, но и кластерных каналов.

В связи с вышесказанным, мы поставили перед собой задачу широкого теоретического исследования асимптотических нормировочных коэффициентов разнообразных каналов распада ядер p- и начала sd-оболочки, получения их значений с максимально достижимой точностью, сравнения их с известными экспериментальными данными и результатами расчетов в рамках других подходов, анализа несоответствия одних результатов с другими.

Данная работа является первой из запланированного цикла работ на представленную тему. В ней демонстрируются методические основы и детали схемы вычисления величин АНК и результаты вычисления в рамках этой схемы АНК множества закрытых каналов распада нижних состояний нескольких легких ядер p-оболочки.

Формализм расчета АНК связанных состояний в рамках МОФКК. Представим кратко алгоритм вычисления АНК в МОФКК, он включает в себя два этапа. На первом из них строится кластерный формфактор (КФФ) – проекция рассчитанной в рамках NCSM подхода ВФ изучаемого ядерного состояния на нормированную A-нуклонную функцию канала:

$$\Phi_A^{c_\kappa}(\rho) = \langle \Psi_A | \hat{N}^{-1/2} \hat{A} \{ \Psi_{A_1}^{\{k_1\}} \Psi_{A_2}^{\{k_2\}} \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho'^2} Y_l(\Omega) \}_{J_c, M_J T} \rangle, \quad (1)$$

где Ψ_A. Ψ_{A_1}, Ψ_{A_2} – ВФ исходного ядра и фрагментов, $\hat{A}$ – оператор антисимметризации, а $\hat{N}$ – оператор обменного (нормирующего) ядра, который имеет вид:

$$\hat{N}(\rho', \rho'') = \langle \hat{A} \{ \Psi_{A_1}^{\{k_1\}} \Psi_{A_2}^{\{k_2\}} \frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho'^2} Y_l(\Omega) \}_{J_c, J, M_J, T} | \times$$
$$| \hat{A} \{ \Psi_{A_1}^{\{k_1\}} \Psi_{A_2}^{\{k_2\}} \frac{\delta(\rho-\rho'')}{\rho''^2} Y_l(\Omega) \}_{J_c, J, M_J, T} \rangle. \quad (2)$$

Представление обобщенной функции относительного движения в виде разложения по осцилляторным функциям:

$$[\delta(\rho-\rho')/\rho'^2] Y_{lm}(\Omega) = \sum_n \varphi_{nlm}(\bar{\rho}) \varphi_{nlm}(\bar{\rho'}) \quad (3)$$

позволяет выразить КФФ в виде разложения по осцилляторному базису:

$$\Phi_A^{c_\kappa}(\rho) = \sum_k \varepsilon_{\kappa,k}^{-1/2} \sum_{n,n'} B_{nl}^k B_{n'l}^k C_{AA_1A_2}^{n'l} \varphi_{nl}(\rho), \quad (4)$$

где

$$f_l^k(\rho) = \sum_n B_{nl}^k \varphi_{nl}(\rho) \quad (5)$$

и $\varepsilon_{\kappa,k}$ – собственные вектора и собственные значения матрицы обменного ядра, а коэффициенты $C^{nl}_{AA_1A_2}$ имеют вид

$$C^{nl}_{AA_1A_2} = \langle \hat{A}\{\Psi^{\{k_1\}}_{A_1}\Psi^{\{k_2\}}_{A_2}\varphi_{nl}(\rho)\}|\Psi_A\rangle. \qquad (6)$$

Математический аппарат МОФКК наиболее детально представлен в работе [26].

СФ определяется как норма КФФ для обсуждаемого канала c_κ, он выражается как

$$SF^{c_\kappa}_l = \sum_k \varepsilon^{-1}_k \sum_{nn'} C^{nl}_{AA_1A_2} C^{n'l}_{AA_1A_2} B^k_{nl}\ B^k_{n'l}. \qquad (7)$$

КФФ является наиболее информативной характеристикой кластерного канала. Поэтому в МОФКК именно КФФ используются для вычисления АНК, а СФ – для выделения основных каналов на фоне множества других малозначимых.

Важно отметить, что в подавляющем большинстве работ, посвященных обсуждаемой проблеме, до сих пор используются устаревшие определения асимптотических характеристик нуклонных и кластерных каналов: КФФ, СФ и АНК, не учитывающие влияние на форму КФФ оператора обменного ядра (в этом случае его называют "интеграл перекрытия"):

$$\Phi^{c_\kappa}_A(\rho) = \langle\Psi_A|\hat{A}\{\Psi^{\{k_1\}}_{A_1}\Psi^{\{k_2\}}_{A_2}\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho'^2}Y_l(\Omega)\}_{J_c,M_JT}\rangle, \qquad (8)$$

что влияет, естественно, и на величины СФ и АНК. Исключение, как указано выше, составляют исследования, проведенные в рамках NCSMC [13], а также в микроскопической кластерной модели [27].

"Новое" определение КФФ было представлено в работе [28]. Многосторонняя аргументация необходимости использования "нового" КФФ для описания распадов и реакций представлена в обзорах [29, 30]. Главным аргументом против использования "старой" схемы является потеря нормировки функций кластерных и нуклонных каналов и, следовательно, нарушение унитарности. Использование интегрального оператора обменного ядра в "новом" определении КФФ (1) позволяет устранить этот недостаток. В итоге, в рамках традиционного определения результаты вычислений КФФ и СФ могут рассматриваться лишь как приближенные для некоторых нуклонных (но не кластерных) каналов. В силу вырождения оператора $\hat{N}$ на больших расстояниях в единичный, АНК формально могут вычисляться в "старой" схеме, но необходимые для этого расстояния в модели оболочки без инертного кора практически недостижимы. Сравнение величин СФ нуклонных каналов в обсуждаемых определениях можно найти в [26]. Внедрение в практику *ab initio* и других расчетов АНК определения КФФ (1) также является одним из преимуществ предлагаемой программы.

На втором этапе проводится процедура сравнения КФФ с асимптотической ВФ соответствующего виртуального канала распада – функцией Уиттекера $W_{-\eta,l+1/2}(2k\rho)/\rho$ для определения точки сшивки их логарифмических производных – ρ_m. В итоге АНК оказывается равным

$$A^{c_\kappa,l} = \rho_m\Phi^{c_\kappa}_A(\rho_m)/W_{-\eta,l+1/2}(2k\rho_m). \qquad (9)$$

АНК в динамике реакций радиационного захвата играет двоякую роль. Во- первых, амплитуда "прямого" радиационного захвата $R^{EC}_{c_\kappa,l,L}$ нуклона или кластера на связанное состояние в R-матричной теории, выраженная через кулоновские функции непрерывного спектра и функцию Уиттекера прямо пропорциональна величине АНК:

$$R^{EC}_{c_\kappa,l,L} = A^{c_\kappa,l}\int_{\rho_m}^{\infty} drr^L[F_l(\eta,kr)cos\delta^{hc} +$$

$$+G_l(\eta,kr)\sin\delta^{hc}]\cdot W_{-\eta,l+1/2}(2k_fr), \qquad (10)$$

где k – волновой вектор сталкивающихся частиц, а k_f – волновой вектор связанного состояния.

Во-вторых, слабосвязанное состояние может рассматриваться как подпороговый резонанс [31], парциальная ширина которого выражается через АНК, а также регулярную и нерегулярную кулоновские функции:

$$\Gamma^{\rm subth}_{c_\kappa,l} = \frac{\hbar^2}{\mu}k\rho_m\left(F^2_l(\eta,k\rho_m)^2 + G^2_l(\eta,k\rho_m)\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\frac{W^2_{-\eta,l+1/2}(2k_f\rho_m)}{\rho_m}|A^{c_\kappa,l}|^2. \qquad (11)$$

При рассмотрении задач звездного нуклеосинтеза одними из наиболее интересных являются реакции радиационного захвата нуклона или кластера. В широко распространенных случаях, когда механизм резонансного захвата на слабо связанное околопороговое состояние доминирует, сечение радиационного захвата при низких энергиях весьма просто [2] выражается через данную ширину:

$$\sigma_{\gamma,c_\kappa,l}(E) = \hat{l}\frac{\pi}{k^2}\frac{\Gamma_\gamma\Gamma^{\rm subth}_{c_\kappa,l}}{(E+E_f)^2+\Gamma^2_{\rm tot}/4}, \qquad (12)$$

причем почти во всех таких случаях справедливо соотношение $\Gamma_{\rm tot}\simeq\Gamma^{\rm subth}_{c_\kappa,l}$.

Оптимизация расчетов АНК на примере ядра ^{7}Li. Как указано выше, АНК является весьма удобным объектом вычисления в рамках МОФКК. Однако с ростом массы ядра и массы более легкого из фрагментов распада на результатах расчетов в рамках модели оболочек без инертного кора все больше сказывается ограниченность вычислительных ресурсов. Приходится ограничиваться все меньшей величиной параметров обрезания базиса как функций NCSM, так и функций относительного движения продуктов распада. Поэтому одной из целей данной работы является отработка компактных методов экстраполяции результатов расчета АНК на случай бесконечного базиса. Еще одна возникающая при этом проблема – падение точности расчета величин энергии ядерных уровней, требования к которой при вычислении АНК оказываются высокими даже для систем небольшого числа нуклонов. Она решается отработанными во многих предшествующих работах методами экстраполяции или, при возможности, за счет использования промеренных энергий уровней, т.е. схемы NCSM-pheno.

Продемонстрируем детали подхода в целом на примере ядра ^{7}Li. Расчеты ВФ ядер с массой $A = 7$ – ^{7}Li и ^{7}Be и их подсистем проводились в рамках NCSM в диапазонах параметров $\hbar\omega = 10.0$ – 17.5 МэВ и $N^*_{\max} = 0$ – 12. Максимальный размер используемого базиса равен $2.52 \cdot 10^8$ детерминантов Слейтера (ДС) для $N^*_{\max} = 12$. ПЭС ядер, естественно, тоже рассчитывались. Они воспроизводят экспериментальные энергии связи с точностью до нескольких сотен кэВ. Однако даже такая величина отклонения может заметно сказаться на скорости убывания функции Уиттекера и, следовательно, на величину АНК. Поэтому для хорошо промеренных уровней предпочтительным оказывается использовать экспериментальные значения энергии, т.е. применять процедуру NCSM-pheno. Эта процедура была реализована и в данной работе. Для предсказываемых расчетами, но не обнаруженных до сих пор состояний использовались теоретические значения ПЭС. Для их уточнения использовался метод экстраполяции A5 – [32].

Вычисления АНК также проводились в широких диапазонах по параметрам $\hbar\omega$ и $N^*_{\max}$. Результаты этих расчетов для АНК нижнего уровня $3/2^-_1$ ^{7}Li и канала распада $^6\mathrm{He_{gr}}$ + p c l = 1, S = 1/2 и энергии фрагментации $\mathrm{E}_f = -9.976$ МэВ представлены в табл. 1.

Как видно из этой таблицы, значения АНК быстро сходятся при увеличении параметра обрезания $N^*_{\max}$ и при $N^*_{\max} = 10{-}12$ достигают насыщения в широком диапазоне значений $\hbar\omega$. Точность полученных результатов оказывается с избытком достаточной для использования вычисленных АНК в расчетах сечений соответствующих реакций.

Однако, имея ввиду предстоящие исследования более тяжелых систем, детальный анализ полученных данных имеет смысл продолжить. Прежде всего отметим, что при малых значениях $\hbar\omega$ величина АНК монотонно падает, а при больших значениях $\hbar\omega$ – монотонно растет.

В этом отношении тенденция изменения оказывается очень похожа на тенденцию результатов расчетов среднеквадратичных радиусов ядер [33, 34]. Так же, как радиусы, величины АНК можно рассматривать как двумерную поверхность значений АНК, зависящую от переменных $N^*_{\max}$ и $\hbar\omega$. Широкая горизонтальная часть поверхности в области максимальных значений $N^*_{\max}$, достижимых для компьютерных расчетов, постепенно сужается, а потом вырождается в (приблизительно) горизонтальную линию для некоторого значения параметра $\hbar\omega_{crit}$. В литературе значения радиусов ядер на этой линии было предложено рассматривать как реальные вычисленные радиусы. Это так называемый crossover-рецепт. Согласно этому рецепту, значение АНК распада уровня $3/2^-_1$ ^{7}Li в канал $^6\mathrm{He_{gr}} + \mathrm{p\,c\,l} = 1$, $S = 1/2$ равняется 3.70–3.72 $\text{фм}^{-1/2}$ значений параметра $\hbar\omega_{\mathrm{crit}} = 12.0{-}12.5$ МэВ. Для этих оптимальных значений $\hbar\omega$ вполне достаточная точность достигается уже при $N^*_{\max} = 4$.

Но, как и для среднеквадратичных радиусов [33], можно вести более развитую экстраполяционную процедуру. Геометрический образ поверхности в целом представляет собой ленту, скрученную вокруг критического значения $\hbar\omega_{\mathrm{crit}}$ как оси. Идея состоит в том, чтобы определить тренды свойств поверхности ($\hbar\omega$, $N^*_{\max}$) при увеличении $N^*_{\max}$ с помощью процедуры экстраполяции.

Для среднеквадратичного радиуса мы назвали эту процедуру экстраполяцией скрученной ленты (Twisted Tape Extrapolation – TTE) и подобрали представляющуюся оптимальной экстраполяционную процедуру.

Для экстраполяции АНК мы действовали по той же схеме, где скручивание поверхности происходит вокруг прямой с значением параметра $\hbar\omega_{crit}$, полученного в crossover-схеме:

$$ANC(\mathcal{N}^*_{\max}, \hbar\omega) = ANC_\infty + P(\hbar\omega, \hbar\omega_{\mathrm{crit}}) \exp(-\alpha\sqrt{\mathcal{N}^*_{\max}}). \quad (13)$$

Таблица 1. АНК ($фм^{-1/2}$) распада основного состояния $3/2^-_1$ ^{7}Li в канал $^6\mathrm{He_{gr}} + \mathrm{p}\,\mathrm{c}\,\mathrm{l} = 1$, $S = 1/2$

$\hbar\omega/N^*_{\max}$	0	2	4	6	8	10	12
10.0	5.607	4.549	4.473	4.372	4.031	3.910	3.809
11.	4.893	4.119	4.033	3.987	3.813	3.766	3.730
12.0	4.356	3.815	3.769	3.759	3.693	3.697	3.702
12.5	4.135	3.705	3.688	3.695	3.670	3.696	3.717
15.0	3.336	3.278	3.369	3.441	3.526	3.603	3.655
17.5	2.839	3.028	3.191	3.291	3.419	3.504	3.565

Таблица 2. Энергия фрагментации E_f (МэВ), АНК ($фм^{-1/2}$) нуклонных каналов распада ядра ^{7}Li в сравнении с результатами, полученными в моделях GFMC [8] и VMC-STA [12] и эмпирическими данными

J^π	A-1	$l(S)$	E_f	ANC	$\sum_i \mathrm{ANC}_i^2$	$(\sum_i \mathrm{ANC}_i^2)^{\mathrm{th}}$	$(\sum_i \mathrm{ANC}_i^2)^{\mathrm{exp}}$
$3/2^-_1$	$^6\mathrm{He_{gr}}(0^+)$	1(1/2)	−9.976	3.654	13.340	12.4 [8]	5.76 [35] 13.6 [36]
$1/2^-_1$	$^6\mathrm{He_{gr}}(0^+)$	1(1/2)	−9.499	3.299	10.883	12.2[12]	4.16 [35]
$3/2^-_1$	$^6\mathrm{He}(2^+)$	1(3/2) 1(5/2)	−11.77	1.191 3.816	15.978	— —	6.35 [36]
$1/2^-_1$	$^6\mathrm{He}(2^+)$	1(3/2)	−11.29	4.526	20.485	—	—
$3/2^-_1$	$^6\mathrm{Li}_{gr}(1^+)$	1(1/2) 1(3/2)	−7.25	2.209 0.299	4.969	6.29 [12]	3.17 [37] 4.2 citetursun-2025
$1/2^-_1$	$^6\mathrm{Li_{gr}}(1^+)$	1(1/2) 1(3/2)	−6.773	2.199 0.072	4.841	6.75[12]	— - –
$3/2^-_1$	$^6\mathrm{Li}(3^+)$	1(5/2)	−9.436	2.849	8.116	12.3 [8]	4.24 [37]
$3/2^-_1$	$^6\mathrm{Li}(0^+)$	1(1/2)	−10.81	2.855	8.323	6.05 [8]	2.91 [37]
$1/2^-_1$	$^6\mathrm{Li}(0^+)$	1(1/2)	−10.34	2.223	4.942	—	—

Функция $P(\hbar\omega, \hbar\omega_{\mathrm{crit}})$ может принимать разные формы. Учитывая, что при малых значениях $\hbar\omega_{\mathrm{crit}}$ наблюдается резкий рост АНК, аналогичный росту как среднеквадратичных радиусов, так и ПЭС (в работе [32] такая тенденция названа инфракрасной расходимостью), мы фитируем данную функцию гиперболой. В итоге, для экстраполяции использовалось выражение:

$$P(\hbar\omega, \hbar\omega_{\mathrm{crit}}) = A + B(\hbar\omega - \hbar\omega_{\mathrm{crit}}) + \frac{C}{\hbar\omega}. \qquad (14)$$

В качестве исходных данных для экстраполяции АНК распада основного состояния $3/2^-_1$ ^{7}Li в канал $^6\mathrm{He_{gr}} + \mathrm{p}\,\mathrm{c}\,\mathrm{l} = 1$, $S = 1/2$ были использованы результаты расчетов из табл. 1 и получена величина АНК, равная $3.65\,фм^{-1/2}$.

Расчеты АНК в широких диапазонах по значениям параметров $\hbar\omega$ и $N^*_{\max}$ совокупно с процедурой экстраполяции позволяют получать не только значение асимптотического нормировочного коэффициента для выбранного канала, но и оценить его уровень сходимости и получить итоговое значение с поправкой на бесконечный осцилляторный базис, тем самым сводя теоретические погрешности результата исключительно к неточностям в используемом NN-потенциале.

АНК нуклонных каналов распада ядер ^{7}Li, ^{7}Be, ^{8}Li и ^{10}Be. Расчеты АНК нижних уровней $3/2^-_1$ и $1/2^-_1$ ^{7}Li были проведены для всех однонуклонных каналов распада. Результаты этих расчетов представлены в табл. 2. Несмотря на серьезные различия вычислительных схем (в частности, в указанных ниже работах использовано “старое” определение СФ), наблюдается неплохое качественное согласие с более ранними результатами расчетов в моделях GFMC [8] и VMC-STA [12]. Но как наши вычисления, так и более ранние, дают, как правило, существенно более высокие значения АНК по сравнению с результатами обработки измеренных сечений реакций однонуклонной передачи $d(^6\mathrm{He},^7\mathrm{Li})n$, $^7\mathrm{Li}(d,t)^6\mathrm{Li}$ и $^7\mathrm{Li}(d,^3\mathrm{He})^6\mathrm{He}$ с помощью DWBA анализа.

Аналогичные расчеты были проведены для уровней $3/2^-_1$ и $1/2^-_1$ ^{7}Be для всех однонуклонных каналов. Как и для случая ^{7}Li (см. табл. 2), сходимость величин АНК в широком диапазоне значений параметра $\hbar\omega$ достигается при $\mathrm{N}^*_{\max} = 10$. Экстраполированные значения АНК представлены в табл. 3. Экспериментальных данных по АНК ядра ^{7}Be значительно меньше, но, как и для ^{7}Li, наши расчеты показывают неплохое согласие результатов с результатами более ранних расчетов и превышение над ре-

Таблица 3. То же, что и в табл. 3, для ядра ^{7}Be

J^π	A-1	$l(S)$	E_f	ANC	$\sum_i \mathrm{ANC}_i^2$	$(\sum_i \mathrm{ANC}_i^2)^{\mathrm{th}}$	$(\sum_i \mathrm{ANC}_i^2)^{\mathrm{exp}}$
$3/2_1^-$	$^6\mathrm{Be}_{gr}(0^+)$	1(1/2)	−10.67	3.378	11.41	—	—
$1/2_1^-$	$^6\mathrm{Be}_{gr}(0^+)$	1(1/2)	−10.25	3.073	9.443	—	—
$3/2_1^-$	$^6\mathrm{Be}(2^+)$	1(3/2)	−12.34	1.108	13.407	—	
		1(5/2)	−12.34	3.490		—	—
$1/2_1^-$	$^6\mathrm{Be}(2^+)$	1(3/2)	−11.92	4.138	17.123	—	—
$3/2_1^-$	$^6\mathrm{Li}_{gr}(1^+)$	1(1/2)	−5.60	2.255	5.1744	7.7 [8]	3.13 [38]
		1(3/2)		0.299			
$1/2_1^-$	$^6\mathrm{Li}_{gr}(1^+)$	1(1/2)	−5.18	2.2263	4.961	7.02 [12]	—
		1(3/2)		0.0695			—
$3/2_1^-$	$^6\mathrm{Li}(3^+)$	1(5/2)	−7.79	2.9544	8.728	12.2 [8]	—
$3/2_1^-$	$^6\mathrm{Li}(0^+)$	1(1/2)	−9.17	2.9958	8.974	6.66 [8]	—
$1/2_1^-$	$^6\mathrm{Li}(0^+)$	1(1/2)	-8.74	2.3541	5.595	—	—

зультатами, полученными с помощью DWBA анализа дифференциальных сечений реакций передачи.

Те же расчеты были проведены для нижних состояний ядра ^{8}Li. Максимальный размер используемого базиса в расчетах ^{8}Li составляет $9.46 \cdot 10^8$ ДС, сходимость результатов расчетов АНК также достигается при $\mathrm{N}^*_{\max} = 10$.

В таблице 4 представлены значения АНК для нуклонных каналов его фрагментации. Эти значения хорошо согласуются с результатами, полученными в модели VMC-STA [12]. И, в отличие от АНК для ^{7}Li и ^{7}Be, АНК нуклонных каналов ^{8}Li неплохо согласуется с результатами DWBA анализа экспериментальных данных. Стоит, однако, отметить, что в данном случае анализировались реакции передачи ^{13}C(^{7}Li, ^{8}Li)^{12}C и ^{13}C(^{7}Li, ^{8}Li*)^{12}C [39], для анализа сечений которых использовались совсем другие, по отношению к представленным выше реакциям получения ^{7}Li и ^{7}Be, входные параметры.

Исследованы также несколько нижних уровней ядра ^{10}Be – 0_1^+ и 2_1^+. Максимальный размер используемого базиса получается равным $1.343 \cdot 10^9$ ДС. В таблице 5 приведены результаты расчетов АНК нуклонных каналов распада этого ядра. Совпадение результатов расчетов с $\mathrm{N}^*_{\max} = 10$ в широком диапазоне параметра $\hbar\omega$ оказалось даже лучше, чем во всех предыдущих примерах. Аналогичные данные были получены теоретически в оболочечной модели с инертным кором [6], использовалось "старое" определение кластерного формфактора.

Имея ввиду, что эффект обменного ядра примерно одинаково сказывается на величинах как АНК, так и СФ, в результаты этой работы можно внести поправки, произведя нормировку суммы квадратов АНК на отношение СФ, полученных в текущей работе и в статье [6] (табл. 5):

$$(\sum_i ANC_i^2)^{\mathrm{corr}} = \frac{SF}{SF_{[6]}} \cdot (\sum_i ANC_{i,[6]}^2). \qquad (15)$$

При этом получается, что подправленные таким образом АНК довольно хорошо согласуются с вычисленными нами, различия не превышают 20 %. Этот факт позволяет надеяться, что использование оболочечной модели с инертным кором для расчета АНК ядер середины *sd*-оболочки при корректном определении КФФ вполне допустимо.

Заключение. В настоящей работе представлен надежно обоснованный и достаточно универсальный метод вычисления асимптотических нормировочных коэффициентов каналов нуклонного и кластерного распада основных и возбужденных состояний ядер *p*- и начала *sd*-оболочки, а также результаты таких вычислений для ядер массы $A = 7{-}10$.

Высокая точность полученных данных, как мы полагаем, обеспечивается: применением в расчетах ВФ (а также энергий связи уровней, не известных из эксперимента) ядер Модели Оболочек без Инертного Кора и потенциала NN-взаимодействия Daejeon16, демонстрирующего, по всей видимости, наиболее высокое качество описания энергий состояний легких ядер и их ВФ; внедрением в формализм расчетов корректного определения КФФ; использованием процедуры экстраполяции значений АНК и схемы NCSM-pheno; обнаруженной в процессе исследований быстрой сходимостью значений АНК. Эти качества разработанного подхода позволяют надеяться на его успешное применение в широком диапазоне масс ядер и энергий возбуждения ядерных состояний.

Сравнение полученных данных с результатами предшествующих работ демонстрирует, что для однонуклонных каналов распада изученных ядер упрощенные схемы расчетов АНК, частично использую-

Таблица 4. То же, что и в табл. 3, для ядра ^{8}Li. Индекс th указывает на то, что значение энергии получено в результате расчета

J^π	A-1	l(S)	E_f	ANC	$\sum_i \mathrm{ANC}_i^2$	$(\sum_i \mathrm{ANC}_i^2)^{\mathrm{th}}$	$(\sum_i \mathrm{ANC}_i^2)^{\mathrm{exp}}$
2_1^+	^{7}He$(3/2_1^-)$	1(1)	-12.45	2.003	35.05	—	—
		1(2)		5.572		—	—
1_1^+	^{7}He$(3/2_1^-)$	1(1)	-11.47	5.116	28.72	—	—
		1(2)		1.599		—	—
2_1^+	^{7}He$(1/2_1^-)$	1(1)	-15.29_{th}	0.866	0.749	—	—
1_1^+	^{7}He$(1/2_1^-)$	1(0)	-13.91_{th}	1.315	2.239	—	—
		1(1)		0.714		—	—
2_1^+	^{7}He$(5/2_1^-)$	1(2)	-15.37	1.774	19.19	—	—
		1(3)		4.005		—	—
1_1^+	^{7}He$(5/2_1^-)$	1(2)	-14.39	4.546	20.66	—	—
2_1^+	^{7}Li$(3/2_1^-)$	1(1)	-2.03	0.449	0.558	0.429 [12]	0.432 [39]
		1(2)		0.597			
1_1^+	^{7}Li$(3/2_1^-)$	1(1)	-1.05	0.204	0.115	0.087 [12]	0.083 [39]
		1(2)		0.271			
2_1^+	^{7}Li$(1/2_1^-)$	1(1)	-2.51	0.601	0.360	—	—
1_1^+	^{7}Li$(1/2_1^-)$	1(0)	-1.53	0.438	0.373	—	—
		1(1)		0.426		—	—

Таблица 5. Энергия фрагментации E_f (МэВ), СФ, АНК (фм$^{-1/2}$) нуклонных каналов распада ядра ^{10}Be в сравнении с результатами, полученными в оболочечной модели с инертным кором [6]

J^π	A-1	$l(S)$	E_f	SF	ANC	$\sum_i \mathrm{ANC}_i^2$	SF [6]	$(\sum_i \mathrm{ANC}_i^2)$ [6]	$(\sum_i \mathrm{ANC}_i^2)^{\mathrm{corr}}$
0_1^+	^{9}Li$(3/2_1^-)$	1(1)	-19.63	0.746	11.65	135.6	0.821	179.6	163.1
2_1^+	^{9}Li$(3/2_1^-)$	1(1)	-16.27	0.691	8.63	78.1	—	—	—
		1(2)		0.078	1.88		—	—	—
0_1^+	^{9}Li$(1/2_1^-)$	1(1)	-22.33	0.146	7.02	49.3	0.139	54.4	57.1
2_1^+	^{9}Li$(1/2_1^-)$	1(1)	-18.96	0.275	6.93	48.0	—	—	—
0_1^+	^{9}Be$(3/2_1^-)$	1(1)	-6.81	0.854	2.12	4.50	1.515	9.12	5.14
2_1^+	^{9}Be$(3/2_1^-)$	1(1)	-3.44	0.032	0.17	0.52	—	—	—
		1(2)		0.391	0.70		—	—	—

щие результаты *ab initio* вычислений, дают удовлетворительное (с точностью до нескольких десятков процентов), согласие с нашими данными.

Надежно подтверждено систематическое превышение величин АНК, полученных в рамках микроскопических вычислений, над извлеченными с помощью анализа измеренных сечений реакций нуклонной передачи. Для каналов виртуального распада уровней ядра ^{7}Li подтверждено резкое рассогласование таких данных. Возможной причиной несоответствия двух типов данных могут являться недостатки методов теоретического анализа сечений реакций передачи, которые, в частности, не учитывают эффекты, порожденные оператором обменного ядра.

Мы рассматриваем данную работу как первую в цикле работ, посвященных высокоточным вычислениям асимптотических нормировочных коэффициентов нуклонных и кластерных каналов связанных состояний ядер p- и начала sd-оболочки. Планируется создание таблиц теоретических значений АНК, сравнимых по масштабу с таблицами, представленными в работах [6, 7], и расчет с их использованием астрофизических S-факторов реакций радиационного захвата протонов, нейтронов и альфа-частиц при низких энергиях. Последняя задача является наиболее амбициозной и в то же время трудной, так как на сечение подобных реакций влияют не только значения АНК связанных состояний, но и характеристики низколежащих резонансов, в частности вероятности электромагнитных переходов. Следует указать, что большой вклад таких механизмов в некоторых случаях ограничивает возможности получения сколь-нибудь надежных результатов в рамках даже *ab initio* подходов. Естественно, в планы входят расчеты сечений процессов, с одной стороны, наиболее интересных для задач звездной кинетики, и, с другой стороны, трудных для экспериментального изучения в земных условиях, например, идущих через образование короткоживущих ядер.

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М. В. Ломоносова.

Финансирование работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда # 25-22-00651, https://rscf.ru/project/25-22-00651/.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. M. Mukhamedzhanov and L. D. Blokhintsev, "Asymptotic normalization coefficients in nuclear reactions and nuclear astrophysics", Eur. Phys. J. A **58**, 29 (2022).
2. A. M. Mukhamedzhanov, "Resonances in low-energy nuclear processes and nuclear astrophysics and asymptotic normalization coefficients: a review", Eur. Phys. J. A **59**, 43 (2023).
3. R. Yarmukhamedov and D. Baye, "Connection between effective-range expansion and nuclear vertex constant or asymptotic normalization coefficient", Phys. Rev. C **84**, 024603 (2011)
4. F. Hammache and N. de Sereville, "Transfer Reactions As a Tool in Nuclear Astrophysics", Front. Phys. **8**, 60290 (2021).
5. N. K. Timofeyuk, "Overlap functions, spectroscopic factors, and asymptotic normalization coefficients generated by a shell-model source term", Phys. Rev. C **81**, 064306 (2010).
6. N. K. Timofeyuk, "Spectroscopic factors and asymptotic normalization coefficients for 0p-shell nuclei: Recent updates", Phys. Rev. C **88**, 044315 (2013).
7. N. K. Timofeyuk, "New Insight into the Observation of Spectroscopic Strength Reduction in Atomic Nuclei: Implication for the Physical Meaning of Spectroscopic Factors", Phys. Rev. Lett. **103**, 242501 (2009).
8. I. Brida, S. C. Pieper, and R. B. Wiringa, "Quantum Monte Carlo calculations of spectroscopic overlaps in A $\leq$ 7 nuclei", Phys. Rev. C **84**, 024319 (2011).
9. U. Atav and R. Ogul, "Variational Monte Carlo Calculations of Nuclear and Neutron Matter", Phys. Scr. **61**, 52 (2000).
10. D. J. Dean, "Coupled-Cluster Theory For Nuclear Structure", AIP Conf. Proc. **764**, 283 (2005).
11. W. Dickhoff and C. Barbieri, "Self-consistent Green's function method for nuclei and nuclear matter", Progr. in Part. Nucl. Phys. **52**(2), 377 (2004).
12. K. M. Nollett and R. B. Wiringa, "Asymptotic normalization coefficients from ab initio calculations", Phys. Rev. C **83**, 041001(R) (2011).
13. P. Navratil, R. Roth, and S. Quaglioni, "Ab initio many-body calculation of the ^{7}Be$(p,\gamma)^8$B radiative capture", Phys. Lett. B **704**, 379 (2011).
14. C. Stump, J. Braun, aand R. Roth, "Importance-truncated large-scale shell model", Phys. Rev. C **93**, 021301(R) (2016).
15. C. Hebborn, G. Hubin, K. Kravvaris, S. Quaglioni, P. Navratil, and P. Gysbers, "*Ab initio* prediction of the ^{4}He$(d,\gamma)^6$Li big bang radiative capture", Phys. Rev. Lett. **129** 042503 (2022).
16. D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvil'sky, "Description of alpha-clustering of ^{8}Be nucleus states in high-precision theoretical approach", Chin. Phys. C **44**, 124105 (2020).
17. D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvil'sky, "Analysis of clustering phenomena in ab initio approaches", Phys. Lett. B **788**, 238 (2019).
18. Д. М. Родкин, Ю. М. Чувильский, "Вычисление сечений резонансного рассеяния нейтронов на ядре ^{9}Be с использованием данных ab initio расчетов асимптотических нормировочных коэффициентов и распадных ширин", Письма в ЖЭТФ **119**(10), 723 (2024) [D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvil'sky, "Calculation of the cross sections for neutron scattering on the ^{9}Be nucleus using ab initio calculated asymptotic normalization coefficients and decay widths", JETP Lett. **119** (10), 739 (2024)].
19. Yu. M, Tchuvil'sky and D. M. Rodkin, "Study of the cross-sections for the resonant nuclear reactions induced by ^{6}Li + ^{2}H collisions based on ab initio computations of characteristics of highly excited states of ^{8}Be spectrum", Int. J. Mod. Phys. E **33**(11), 2441008 (2024).
20. D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvil'sky, "*Ab initio* computing of light nuclei structure and nuclear reaction experiment", Int. J. Mod. Phys. E **33**(12), 2441019 (2024).
21. D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvilsky, "Study of radiative proton capture by the ^{7}Be nucleus with the use of ab initio approaches", Chin. Phys. C **50**(11), 114102 (2026).
22. Д. М. Родкин, Ю. М. Чувильский, "Анализ астрофизического S-фактора радиационного захвата протона ядром ^{8}B на основе *ab initio* подхода", Письма в ЖЭТФ **122**(6), 323 (2025) [D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvilsky, "Ab Initio Analysis of the Astrophysical S Factor of the Radiative Capture of a Proton by a ^{8}B Nucleus", JETP Lett. **122**(6), 335 (2025)].
23. A. M. Shirokov, I. J. Shin, Y. Kim, M. Sosonkina, P. Maris, and J. P. Vary, "N3LO NN interaction adjusted to light nuclei in *ab exitu* approach", Phys. Lett. B **761**, 87 (2016).
24. C. W. Johnson, W. E. Ormand, K. S. McElvain, R. Zbikowski, and H. Shan, "BIGSTICK: A flexible configuration-interaction shell-model code (updated)", arXiv: 1801.08432 (2018).
25. D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvil'sky, "Asymptotic characteristics of decay channels of states of light nuclei in the ab initio approach", Phys. Rev. C **103**, 024304 (2021).

26. D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvil'sky, "Detailed theoretical study of the decay properties of states in the ^{7}He nucleus within an ab initio approach", Phys. Rev. C **104**, 044323, (2021).
27. P. Descouvemont, "Reanalysis of the ^{7}Be$(p,\gamma)^{8}$B S-factor in a microscopic model", Phys. Rev. C **70**, 065802 (2004).
28. T. Fliessbach and H. J. Mang, "On absolute values of α-decay rates", Nucl. Phys. A **263**, 75 (1976).
29. R. G. Lovas, R. J. Liotta, A. Insolia, K. Varga, and D. E. S. Delion, "α particle preformation in heavy nuclei and penetration probability", Phys. Rep. **294**, (1998) 265.
30. S. G. Kadmensky, S. D. Kurgalin, and Yu. M. Tchuvil'sky, "Cluster states in atomic nuclei and cluster-decay processes", Phys. Part. Nucl. **38**, 699 (2007).
31. A. M. Mukhamedzhanov and R. E. Tribble, "Connection between asymptotic normalization coefficients, subthreshold bound states, and resonances", Phys. Rev. C **59**, 3418 (1999).
32. I. J. Shin, Y. Kim, P. Maris, J. Vary, C. Forssen, J. Rotureau, and N. Michel, "*Ab initio* no-core solutions for ^{6}Li", J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **44**, 075103 (2017).
33. D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvilsky, "Two-dimensional extrapolation procedure for *ab initio* study of nuclear size parameters and the properties of halo nucleus ^{6}He", Phys. Rev. C **106**, 034305 (2022).
34. Д. М. Родкин, Ю. М. Чувильский, "Размеры нейтрон-протонного гало нуклонно-стабильных состояний ядра ^{6}Li", Письма в ЖЭТФ **118** (3), 147 (2023) [D. M. Rodkin and Yu. M. Tchuvilsky, "Sizes of the Neutron-Proton Halo in Nucleon-Stable States of the ^{6}Li Nucleus", JETP Lett. **118**(3), 153 (2023)].
35. K. I. Tursunmakhatov and E. Sh. Ikromkhonov, "Asymptotic normalization coefficient for ^{6}He+p $\rightarrow$ ^{7}Li from the proton transfer d(^{6}He,^{7}Li)n reaction", Int. J. Mod. Phys. E **32**(7), 2350035 (2023).
36. I. Ya. Son, S. V. Artemov, N. Burtebayev, M. Nassurlla, S. Sakuta, A. Karakhodzhaev, and O. Tojiboev, "АНК для ^{7}Li $\rightarrow$ ^{6}He+p из реакции ^{7}Li(d,^{3}He)^{6}He", доклад на конференции ЯДРО-2025 ["ANC for ^{7}Li $\rightarrow$ ^{6}He+p from the reaction ^{7}Li(d,^{3}He)^{6}He", talk at NUCLEUS-2025 conference]; https://indico.spbu.ru/event/1/contributions/311/.
37. I. R. Gulamov, A. M. Mukhamedzhanov, and G. K. Nie, "Method for Selecting Peripheral Reactions Dominated by the Pole Mechanism", Phys. At. Nucl. **58**, 1689 (1995).
38. N. Burtebayev, J. T. Burtebayeva, N. V. Glushchenko, Zh. K. Kerimkulov, A. Amar, M. Nassurlla, S. Sakuta, S. Artemov, S. Igamov, A. Karakhodzhaev, K. Rusek, and S. Kliczewski, "Effects of t- and α-transfer on the spectroscopic information from the ^{6}Li(^{3}He,d)^{7}Be reaction", Nucl. Phys. A **909**, 20 (2013).
39. L. Trache, A. Azhari, F. Carstoiu, H. Clark, C. Gagliardi, Y.-W. Lui, A. Mukhamedzhanov, X. Tang, N. Timofeyuk, and R. Tribble, "Asymptotic normalization coefficients for ^{8}B $\rightarrow$ ^{7}Be + p from a study of ^{8}Li $\rightarrow$ ^{7}Li + n", Phys. Rev. C **67**, 062801(R) (2003).