Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 10, с. 803 – 808 © 2026 г. 25 ноября

Доля массы темной материи в аксионных звездах

А. С. Дмитриев[+], *Д. Г. Левков*[+], *А. Г. Панин*[+*], *И. И. Ткачев*[+×1)]

[+] *Институт ядерных исследований РАН, 117312 Москва, Россия*

[*] *Московский физико-технический институт, 141700 Долгопрудный, Россия*

[×] *Физический факультет и Лаборатория космологии и физики элементарных частиц, Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 17 сентября 2026 г.
После переработки 17 сентября 2026 г.
Принята к публикации 19 октября 2026 г.

Аксионная темная материя возникает естественным образом в квантовой хромодинамике и фрагментируется в маломассивные высокоплотные миникластеры на ранних этапах эволюции Вселенной. При естественных параметрах миникластеров время конденсации Бозе–Эйнштейна меньше возраста Вселенной, что приводит к образованию бозе-звезд внутри этих структур. Недавно задача последующего роста бозе-звезд была решена аналитически (Dmitriev et al., Phys. Rev. Lett. **132**, 091001 (2024)). Мы используем это решение, чтобы определить современную долю массы темной материи в бозе-звездах и их функцию масс.

DOI: 10.7868/S3034576626110152

1. Введение. Если частицы темной материи – легкие бозоны, такие как аксионы квантовой хромодинамики (КХД) или их “размытые” аксионоподобные аналоги [1], то следует ожидать образования компактных макроскопических объектов – бозе-звезд [2, 3] (недавний обзор см. [4]) – в результате конденсации Бозе–Эйнштейна. Примечательно, что большие связи не требуются, и при типичных параметрах субструктур, где они зарождаются, время конденсации может быть меньше возраста Вселенной – просто как следствие универсального гравитационного взаимодействия [5]. Поэтому бозе-звезды могут быть распространены в основных моделях темной материи. Феноменологические следствия их существования, такие как микролинзирование [6–8] или радиоизлучение [3, 9–13], которое потенциально может приводить к явлениям, подобным FRB [14–17], и, следовательно, связанные с этим перспективы [18] косвенных поисков темной материи, сильно зависят от современной функции масс бозе-звезд.

Мы определяем массовую функцию аналогично тому, как определяется массовая функция звезд. А именно, она дает долю темной материи в бозе-звездах данной массы. Простой способ оценить ее – использовать феноменологическое соотношение ядро–гало [19], если функция масс гало известна. Это было сделано для размытой аксионной темной материи $m_a \sim 10^{-11}$ эВ в работе [20]. На более высоком уровне точности нам нужно знать, как масса конкретной звезды растет от ее зарождения до настоящего времени, в зависимости от окружения и начальных условий. Эта последняя задача была недавно решена аналитически [21].

В этом Письме мы вычисляем массовую функцию бозе-звезд для модели аксионной темной материи КХД. Бозе-звезды в этой модели все чаще называют аксионными звездами. Они зарождаются внутри наименьших гравитационно связанных вириализованных космологических структур – миникластеров аксионов [22–27]. Энергия связи незначительно мала, поэтому составляющие частицы глубоко нерелятивистские.

2. Зарождение и рост бозе-звезды. При малых массах частиц m числа заполнения аксионов темной материи велики, поэтому их сгусток можно описывать случайным классическим полем $\psi(t, \boldsymbol{x})$, эволюционирующим в собственном гравитационном потенциале $U(t, \boldsymbol{x})$,

$$i\partial_t\psi = -\Delta\psi/2m + mU\psi, \qquad (1)$$
$$\Delta U = 4\pi G\,(m|\psi|^2 - \bar{\rho}).$$

В уравнении Пуассона $\bar{\rho} \equiv M/L^3$ – средняя плотность массы, а M – полная масса миникластера. Для простоты мы аппроксимировали структуру периодическим ящиком размера L. Начальная точка этой

[1)] e-mail: tkachev@inr.ru

эволюции – вириальное равновесие, т.е. гауссово распределенное поле с фурье-образом $|\psi_{\boldsymbol{p}}|^2 \propto \mathrm{e}^{-\boldsymbol{p}^2/p_0^2}$ и случайными фазами $\arg\psi_{\boldsymbol{p}}$, где $\omega_0 \equiv p_0^2/2m$ – типичная энергия частицы.

Этот ансамбль термализуется в конденсат Бозе–Эйнштейна с зарождением бозе-звезды. В среднем в вириализованном гало это происходит за кинетическое время [5]

$$t_{gr} = b\,\frac{4\sqrt{2}}{27\pi\Lambda}\,\frac{R}{v}\,(mvR)^3\,, \tag{2}$$

где $\Lambda = \ln(mvR)$ – кулоновский логарифм, а M, R, v – вириализованные значения массы, радиуса и дисперсии скоростей гало соответственно, $v^2 = \langle \mathbf{v}^2\rangle \approx \approx GM/R$. При таком выборе параметров $b \approx 0.03$. Во избежание путаницы отметим, что в работе [5] приведено значение $b \approx 0.7$, но там были выбраны для параметризации миникластеров центральная плотность и типичная скорость p_0/m.

Последующая эволюция ансамбля оказывается автомодельной, что позволяет найти аналитические решения [21]. Результаты были подтверждены численными моделированиями в периодическом ящике и в изолированных миникластерах. Примечательно, что выведенное уравнение эволюции определяется общими скейлингами гравитационного интеграла столкновений, а решение для массы бозе-звезды использует только законы сохранения. Тогда зависимость массы бозе-звезды, $x_{bs}(\tau) \equiv M_{bs}/M$, от времени дается [21]

$$(1 + x_{bs}^3/\epsilon^2)^3(1 - x_{bs})^{-5} \approx t/t_{gr}. \tag{3}$$

где

$$\epsilon^2 \equiv E/\gamma M^3 = v^2/2\gamma M^2, \tag{4}$$

и фиксируется начальной массой миникластера M и энергией E, а $\gamma = c_\gamma m^2 G^2$ содержит модельную зависимость с $c_\gamma \approx 0.0542$ – численной константой, определенной в работе [28]. При использовании вириальной скорости для v ур. (3), (4) хорошо согласуются с результатами нашего численного моделирования роста бозе-звезды в вириализованном гало.

Качество этого решения иллюстрирует рис. 1 для конкретного значения $\epsilon \approx 0.186$ в моделировании периодического ящика, см. также [21]. Видно, что теория (3) (серая точечная кривая) хорошо воспроизводит результаты моделирования для M_{bs} (сплошная).

Параметр ϵ является первичным и определяет рост бозе-звезды в безразмерном времени t/t_{gr}. В то же время широко используемое соотношение ядро–гало [19] сводится к $M_{bs}/M = \epsilon$, см. [21]. Это соответствует уровню, на котором быстрый начальный линейный рост массы бозе-звезды сменяется более медленным увеличением, см. рис. 1. Многие звезды в моделировании ограниченной длительности, вероятно, будут близки к этому уровню. Но это лишь грубое приближение.

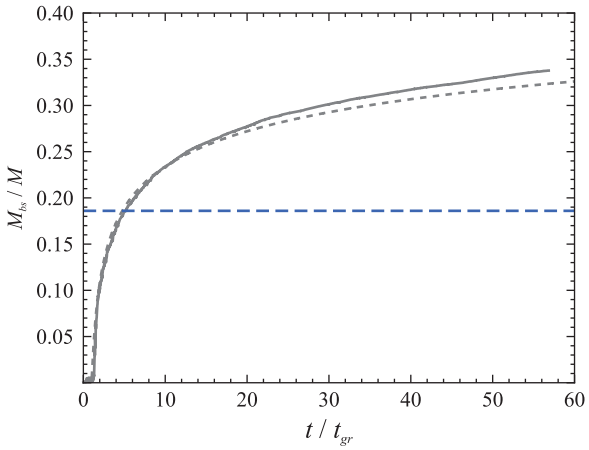

Рис. 1. (Цветной онлайн) Масса бозе-звезды $M_{bs}(t)$ для $\epsilon \approx 0.186$. Сплошная линия соответствует результату численного моделирования системы (1), а точечная – аналитическому решению ур. (3). Горизонтальная пунктирная линия показывает уровень ядро–гало

В дальнейшем удобно факторизовать ϵ в t_{gr}. Сначала, используя соотношение масса–радиус для вириализованного самогравитирующего облака, $v^2 \approx GM/R$, и определение ϵ, находим $mvR = 1/(\epsilon\sqrt{2c_\gamma})$. Это говорит о том, что при $\epsilon \gtrsim 1$ бозе-звезды зарождаются практически за время свободного падения, см. ур. (2), и дает кулоновский логарифм $\Lambda = -\ln(\epsilon\sqrt{2c_\gamma})$. В целом правую часть ур. (3) можно записать через ϵ как

$$\frac{t}{t_{gr}} = \frac{t}{t_u}\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^6 \Lambda, \tag{5}$$

где $t_u \approx 1.38 \cdot 10^{10}$ лет – возраст Вселенной, и

$$\epsilon_0^6 \equiv \frac{b}{27\sqrt{2}\,\pi c_\gamma^3\, t_u G^2 m^3 M^2}. \tag{6}$$

Следовательно, второй параметр, определяющий скорость роста бозе-звезд, связан с $t_0^{-1} \equiv G^2 m^3 M^2$.

3. Параметризация миникластеров. Мы измеряем массы аксионов и миникластеров в терминах реперных параметров $m_{10} \equiv m/(10\,\text{мкэВ})$ и $M_{13} \equiv \equiv M/(10^{-13} M_\odot)$ соответственно. Масса и радиус миникластера связаны как [22]

$$R = \frac{1.6 \cdot 10^7 M_{13}^{1/3}}{\Phi(1+\Phi)^{1/3}}\ \text{км}\,, \tag{7}$$

где Φ – конкретный переизбыток плотности миникластера над средней плотностью аксионов ρ_a, а именно, $\Phi \equiv (\rho_{MC} - \rho_a)/\rho_a$. До момента, когда миникластер становится гравитационно-связанным и отделяется от космологического расширения, Φ постоянна. Позже она определяет плотность миникластера через ρ_a в эпоху равенства материи и излучения [22]. Эта эпоха возникает потому, что типично $\Phi \sim 1$ и может быть много больше 1, т.е. миникластеры становятся гравитационно-связанными примерно в эпоху равенства материи и излучения. Вместе с определением $\mu \equiv m_{10} M_{13}^{2/3}$ это дает параметры миникластера, которые определяют скорости зарождения и роста аксионных звезд

$$\epsilon = 0.0389\, \mu^{-1}\, \Phi^{1/2} (1+\Phi)^{1/6}\,, \tag{8}$$

$$\epsilon_0 \equiv 0.0215\, \mu^{-1/2}. \tag{9}$$

Используя теперь ур. (3), мы находим долю массы миникластера, которая к настоящему времени сконденсировалась в аксионную звезду. Она показана сплошными линиями на рис. 2 как функция Φ

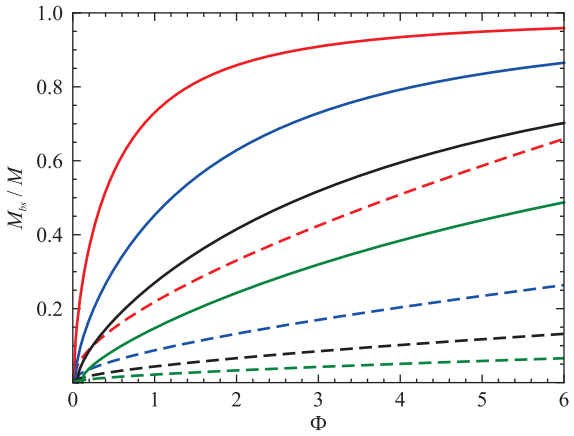

Рис. 2. (Цветной онлайн) Отношение массы аксионной звезды в настоящий момент $M_{bs}(t_u)$ к начальной массе миникластера показано сплошными линиями для нескольких значений μ (сверху вниз $\mu = 0.2, 0.5, 1, 2$) как функция Φ. Пунктирные линии того же цвета показывают результат, основанный на соотношении ядро–гало

для нескольких значений μ. Видно, что чем больше Φ, тем больше сконденсировавшаяся доля, а легкие миникластеры (малые μ) конденсируются почти полностью независимо от Φ. Пунктирные линии того же цвета показывают грубое приближение, основанное на соотношении ядро–гало. Различие существенно.

4. Функция масс аксионных звезд. Чтобы вычислить современную массовую функцию бозе-звезд на основе ур. (3), нам нужно распределение миникластеров по Φ и μ, или, при фиксированной массе аксиона, по Φ и M, которое мы назовем $P(\Phi, M)$. Оно определяется как

$$P(\Phi, M) \equiv \frac{1}{F_0} \frac{d^2 F}{d\Phi\, d\log M}, \tag{10}$$

где F – доля темной материи в миникластерах. В дальнейшем нормировочный множитель F_0 выбирается так, чтобы $\int P(\Phi, M) d\Phi\, d\log M = 1$.

Фактически F зависит от времени. Существует несколько причин для этого. Во-первых, в эпоху КХД, когда рождаются миникластеры, масса аксиона зависит от температуры и меняется с расширением Вселенной, а миникластеры с наиболее интересными большими значениями Φ фактически являются долгоживущими осциллонами, которые распадаются поздно. Итоговая Φ зависит не только от величины начального "возмущения", но и от момента, когда осциллон распадается и масса аксиона фиксируется.

Во-вторых, уже на линейной стадии относительно аксионного поля миникластеры гравитационно сливаются, образуя более крупные структуры [8, 25]. Здесь возможны два исхода. А) Два миникластера могут действительно слиться, теряя индивидуальность и образуя более массивный объект, подобно тому как две спиральные галактики сливаются в более крупную эллиптическую. В) Альтернативно, они могут слиться, образуя скопление миникластеров, подобно тому как галактики образуют скопления галактик. Для наших целей изучения формирования аксионных звезд такие встречи класса В, в которых индивидуальность не теряется, не следует учитывать как изменение распределения $P(\Phi, M)$ на меньших масштабах.

В-третьих, миникластеры разрушаются при столкновениях с обычными звездами в Галактике. Однако за время жизни Галактики разрушается лишь малая их доля [29–33]. Мы можем пренебречь этим эффектом. Разрушить уже сформированные аксионные звезды намного более сложно. С другой стороны, мы не можем брать $P(\Phi, M)$ в очень поздне время, поскольку нам нужно проследить процесс бозе-конденсации с момента, когда он становится эффективным.

Учитывая сказанное, разумно взять $P(\Phi, M)$ в момент равенства материи и излучения и отобразить его через ур. (3) в распределение аксионных звезд. Поступая так, мы потеряем эффект тесных встреч типа А, но их учет должен основываться на специализированных крупномасштабных численных моделированиях, и, как нам кажется, это должно быть предметом отдельного исследования.

В ранней работе [6] было вычислено редуцированное распределение $\tilde{P}(\Phi) = \int P(\Phi, M)\, d\log M$, причем недалеко от эпохи формирования миникластеров, т.е. при уменьшении температуры в четыре раза. Тем не менее согласие с недавними исследованиями в области $\tilde{P}(\Phi) \sim 1$ разумное. В работе [23] распределение миникластеров эволюционировало до уменьшения температуры в 5 раз, но опять представлено только $\tilde{P}(\Phi)$. Позднее распределение было найдено в [25], но, наоборот, дано только $\tilde{P}(M)$. Наиболее подходящими для наших нужд являются результаты [24], где $P(\Phi, M)$ была вычислена в момент равенства материи и излучения. Эта функция представлена в [24] в виде двумерного цветового графика, который мы оцифровали. В той же работе масса аксиона, дающая правильное обилие темной материи, была вычислена как $m_a = 25 \pm 11$ мкэВ, в согласии с [34].

Мы определяем современную функцию масс темной материи КХД в аксионных звездах аналогично ур. (10)

$$p(M_{bs}) \equiv \frac{d\, F_{bs}}{d\log M_{bs}}. \qquad (11)$$

Это вычисление является прямым. Мы эволюционируем каждую точку (Φ, M) до настоящего момента согласно уравнению (3) (как на рис. 3) и добавляем сконденсировавшуюся долю $(M_{bs}/M)\, P(\Phi, M)$ в бин, соответствующий найденному значению M_{bs}. Результат для четырех значений массы аксиона показан сплошными линиями на рис. 3. Пунктирная линия соответствует $P(\Phi, M)$ из работы [24], проинтегрированной по $d\Phi$. Она нормирована на единицу. Мы видим, что при $m_a = 10$ мкэВ миникластеры с $M \lesssim 10^{-13} M_\odot$ почти полностью сконденсировались к настоящему времени, а для $M \lesssim 10^{-15} M_\odot$ это происходит независимо от значения массы аксиона. Полные доли сконденсировавшейся массы всех миникластеров для набора масс аксионов, как на рис. 3, равны $(0.86, 0.74, 0.67, 0.51)$ соответственно.

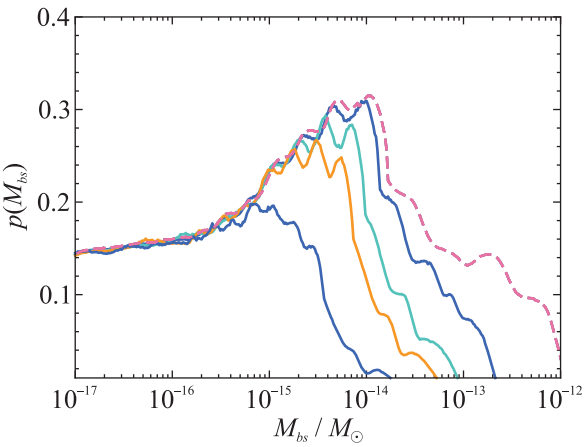

Рис. 3. (Цветной онлайн) Доля полной массы миникластеров, содержащаяся в аксионных звездах на современной стадии эволюции Вселенной, представлена как функция массы этих звезд. Сплошные линии сверху вниз соответствуют $m_a = 10, 25, 40, 100$ мкэВ. Пунктирная линия показывает использованную функцию масс миникластеров

5. Обсуждение. В этом Письме мы вычислили современные массы аксионных звезд КХД и их распределение, используя недавно найденное [21] аналитическое решение для роста массы бозе-звезды, ур. (3). Рисунок 2 показывает сконденсировавшуюся долю массы вириализованного миникластера в зависимости от его параметров: начальной массы и переизбытка плотности. Этот результат не зависит от неопределенных деталей распределения миникластеров и сам по себе может быть полезен для различных приложений.

Долю массы темной материи в аксионных звездах можно получить, умножив распределения, показанные на рис. 3, на F_0. Согласно работам [6, 23–25], F_0 находится в диапазоне 0.5–0.75. Однако, поскольку в нашем подходе $p(M_{bs})$ связана с $P(\Phi, M)$, вычисленной в эпоху равенства материи и излучения, она, следовательно, не учитывает слияния миникластеров типа A, объединение ранее сформированных аксионных звезд и разрушение миникластеров при столкновениях с обычными звездами. Однако доля разрушенных миникластеров в последнем процессе невелика. Лишь несколько процентов миникластеров с $\Phi \sim 1$, пересекающих солнечную орбиту, разрушаются за время существования Галактики; остальные остаются целыми независимо от массы миникластера [29].

Выживание миникластеров при слияниях с более крупными гало на ранней эпохе изучалось в работе [8]. Более массивные миникластеры теряют меньшую долю массы, но даже для миникластеров с малой массой ядро профиля плотности сохраняется, а хвост диссипирует, ср. [35]. Кроме того, их судьба прослежена в космологических N-частичных (N-body) симуляциях, тогда как для изучения выживания аксионных звезд, сформировавшихся на ранних стадиях в маломассивных миникластерах, требуются волновые уравнения (1).

Также наше ур. (3) не учитывает вторичное падение диффузных аксионов на исходный миникластер. Накопленные частицы будут менее связаны, в легко разрушаемом гало [36], и первыми диссипируют при встречах. Таким образом, оба неучтенных эф-

фекта – падение и разрушение – частично компенсируют друг друга.

Моделирование формирования и эволюции миникластеров очень сложно и должно включать очень разные пространственные и временные масштабы в различные космологические эпохи, чтобы разрешать аксионные струны, доменные стенки и осциллоны. Это отражается в неопределенностях $P(\Phi, M)$. В частности, ее значения в хвосте больших Φ и M неизвестны. Формирование сверхкритических и коллапсирующих аксионных звезд [37] в этом углу может приводить к впечатляющим явлениям [9, 14], даже если $P(\Phi, M)$ мала и не дает вклада в рис. 3. Также недавно неопределенности в полученной массе аксиона возросли, $m_a = \mathcal{O}(10-100)$ мкэВ, отражая трудности в оценке вклада аксионных струн, см. [27] и ссылки в ней.

Однако, несмотря на все обсужденные неопределенности, мы считаем, что наши результаты дают полезное первое представление о функции масс аксионных звезд КХД.

Мы благодарим К. Долгих за обсуждения.

Финансирование работы. Авторы благодарят за поддержку Российский научный фонд, проект 22-12-00215-П.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. A. Ringwald, L. J. Rosenberg, and G. Rybka, "'Axions and Other Similar Particles", PTEP **2022**, 083C01 (2022).
2. R. Ruffini and S. Bonazzola, "Systems of selfgravitating particles in general relativity and the concept of an equation of state", Phys. Rev. **187**, 1767 (1969).
3. I. I. Tkachev, "Coherent scalar field oscillations forming compact astrophysical objects", Sov. Astron. Lett. **12**, 305 (1986).
4. L. Visinelli, "Boson stars and oscillatons: A review", Int. J. Mod. Phys. D **30**(15), 2130006 (2021).
5. D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev, "Gravitational Bose-Einstein condensation in the kinetic Mass fraction of axion stars 5 regime", Phys. Rev. Lett. **121**(15), 151301 (2018).
6. E. W. Kolb and I. I. Tkachev, "Femtolensing and picolensing by axion miniclusters", Astrophys. J. **460**, L25 (1996).
7. M. Fairbairn, D. J. E. Marsh, J. Quevillon, and S. Rozier, "Structure formation and microlensing with axion miniclusters", Phys. Rev. D **97**(8), 083502 (2018).
8. D. Ellis, D. J. E. Marsh, B. Eggemeier, J. Niemeyer, J. Redondo, and K. Dolag, "Structure of axion miniclusters", Phys. Rev. D **106**(10), 103514 (2022).
9. D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev, "Radioemission of axion stars", Phys. Rev. D **102**(2), 023501 (2020).
10. S. J. Witte, S. Baum, M. Lawson, M. C. D. Marsh, A. J. Millar, and G. Salinas, "Transient radio lines from axion miniclusters and axion stars", Phys. Rev. D **107**(6), 063013 (2023).
11. C. Kouvaris, T. Liu, and K.-F. Lyu, "Radio signals from axion star-neutron star binaries", Phys. Rev. D **109**(2), 023008 (2024).
12. M. Escudero, C. K. Pooni, M. Fairbairn, D. Blas, X. Du, and D. J. E. Marsh, "Axion star explosions: A new source for axion indirect detection", Phys. Rev. D **109**(4), 043018 (2024).
13. A. Kyriazis, "Dilute axion stars converting to photons in the Milky Way's magnetic field", JHEP **12**, (2023).
14. I. I. Tkachev, "Fast radio bursts and axion miniclusters", Письма в ЖЭТФ **101**(1), 3 (2015) [I. I. Tkachev, "Fast Radio Bursts and Axion Miniclusters", JETP Lett. **101**(1), 1 (2015)].
15. A. Iwazaki, "Axion stars and fast radio bursts", Phys. Rev. D **91**(2), 023008 (2015).
16. S. Raby, "Axion star collisions with Neutron stars and Fast Radio Bursts", Phys. Rev. D **94**(10), 103004 (2016).
17. J. H. Buckley, P. S. B. Dev, F. Ferrer, and F. P. Huang, "Fast radio bursts from axion stars moving through pulsar magnetospheres", Phys. Rev. D **103**(4), 043015 (2021).
18. J. Eby, M. Leembruggen, J. Leeney, P. Suranyi, and L. C. R. Wijewardhana, "Collisions of Dark Matter Axion Stars with Astrophysical Sources", JHEP **04**, 099 (2017).
19. H.-Y. Schive, M.-H. Liao, T.-P. Woo, S.-K. Wong, T. Chiueh, T. Broadhurst, and W.-Y. P. Hwang, "Understanding the Core-Halo Relation of Quantum Wave Dark Matter from 3D Simulations", Phys. Rev. Lett. **113**(26), 261302 (2014).
20. X. Du, D. J. E. Marsh, M. Escudero, A. Benson, D. Blas, C. K. Pooni, and M. Fairbairn, "Soliton merger rates and enhanced axion dark matter decay", Phys. Rev. D **109**(4), 043019 (2024).
21. A. S. Dmitriev, D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev, "Self-Similar Growth of Bose Stars", Phys. Rev. Lett. **132**(9), 091001 (2024).
22. E. W. Kolb and I. I. Tkachev, "Nonlinear axion dynamics and formation of cosmological pseudosolitons", Phys. Rev. D **49**, 5040 (1994).
23. A. Vaquero, J. Redondo, and J. Stadler, "Early seeds of axion miniclusters", JCAP **04**, 012 (2019).
24. M. Buschmann, J. W. Foster, and B. R. Safdi, "Early-Universe Simulations of the Cosmological Axion", Phys. Rev. Lett. **124**(16), 161103 (2020).
25. B. Eggemeier, J. Redondo, K. Dolag, J. C. Niemeyer, and A. Vaquero, "First Simulations of Axion Minicluster Halos", Phys. Rev. Lett. **125**(4), 041301 (2020).

26. D. Ellis, D. J. E. Marsh, and C. Behrens, "Axion Miniclusters Made Easy", Phys. Rev. D **103**(8), 083525 (2021).
27. G. Pierobon, J. Redondo, K. Saikawa, A. Vaquero, and G. D. Moore, "Miniclusters from axion string simulations", JCAP **05**, 060 (2026).
28. A. S. Dmitriev, D. G. Levkov, A. G. Panin, E. K. Pushnaya, and I. I. Tkachev, "Instability of rotating Bose stars", Phys. Rev. D **104**(2), 023504 (2021).
29. P. Tinyakov, I. Tkachev, and K. Zioutas, "Tidal streams from axion miniclusters and direct axion searches", JCAP **01**, 035 (2016).
30. В. И. Докучаев, Ю. Н. Ерошенко, И. И.Ткачев, "Разрушение аксионных миникластеров в Галактике", ЖЭТФ **152**(3), 511 (2017) [V. I. Dokuchaev, Y. N. Eroshenko, and I. I. Tkachev, "Destruction of axion miniclusters in the Galaxy", JETP **125**, 434 (2017)].
31. B. J. Kavanagh, T. D. P. Edwards, L. Visinelli, and C. Weniger, "Stellar disruption of axion miniclusters in the MilkyWay", Phys. Rev. D **104**(6), 063038 (2021).
32. V. Dandoy, T. Schwetz, and E. Todarello, "A selfconsistent wave description of axion miniclusters and their survival in the galaxy", JCAP **09**, 081 (2022).
33. X. Shen, H. Xiao, P. F. Hopkins, and K. M. Zurek, "Disruption of Dark Matter Minihalos in the Milky Way Environment: Implications for Axion Miniclusters and Early Matter Domination", Astrophys. J. **962**(1), 9 (2024).
34. V. B. Klaer and G. D. Moore, "The dark-matter axion mass", JCAP **1711**(11), 049 (2017).
35. V. Berezinsky, V. Dokuchaev, and Y. Eroshenko, "Remnants of dark matter clumps", Phys. Rev. D **77**, 083519 (2008).
36. P. Sikivie, I. I. Tkachev, and Y. Wang, "The Secondary infall model of galactic halo formation and the spectrum of cold dark matter particles on earth", Phys. Rev. D **56**, 1863 (1997).
37. D. G. Levkov, A. G. Panin, and I. I. Tkachev, "Relativistic axions from collapsing Bose stars", Phys. Rev. Lett. **118**(1), 011301 (2017).