Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 10, с. 826 – 832 © 2026 г. 25 ноября

Случайные блуждания светового пучка при распространении в турбулентной среде

И. В. Колоколов[+*], *В. В. Лебедев*[+*], *Н. Г. Маснев*[+1)]

[+] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[*] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 101000 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 2 октября 2026 г.
После переработки 16 октября 2026 г.
Принята к публикации 19 октября 2026 г.

Световой пучок, распространяющийся в турбулентной среде (атмосфере), испытывает возмущения вследствие дифракции на случайных флуктуациях показателя преломления. Мы исследуем случайные смещения ?центра масс? пучка в режиме сильных сцинтилляций. Получено явное выражение для среднего квадрата $\langle \mathbf{s}^2 \rangle$, где $\mathbf{s}$ задает положение "центра масс" в плоскости, поперечной направлению распространения. Оказывается, значение $\langle \mathbf{s}^2 \rangle$ определяется поправками к нормальному (гауссову) распределению вероятностей для огибающей пучка Ψ. Примечательно, что при этом сама величина $\mathbf{s}$, имеет нормальное (гауссово) распределение.

DOI: 10.7868/S3034576626110186

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию распространения света в турбулентной среде, например в атмосфере. Дифракция света на вызванных турбулентностью флуктуациях показателя преломления приводит к искажениям светового пучка. Наблюдения, в частности, астрономические, показывают, что характер этих искажений зависит от трассы распространения света. На сравнительно коротких трассах искажения малы; такой случай называют режимом слабых сцинтилляций. На более длинных трассах световой пучок распадается на множество спеклов: возникает режим сильных сцинтилляций.

Исследование статистических характеристик флуктуаций показателя преломления восходит к основополагающим работам Колмогорова и Обухова [1–3], в которых были получены степенные спектры флуктуаций скорости в инерционном интервале. Позднее Обухов [4] и Коррсин [5] распространили этот подход на флуктуации поля пассивного скаляра, например, температуры среды или концентрации примесей. В своей пионерской работе [6] Обухов применил эти результаты к флуктуациям показателя преломления, который можно рассматривать как пассивный скаляр.

Вопросы распространения света в турбулентной среде активно изучались во второй половине XX в. Итоги этих исследований изложены в ряде монографий и обзоров, см. [7–12]. В последние годы интерес к этой теме вновь возрос, прежде всего благодаря развитию вычислительных возможностей; см. [13–16], а также [17–22]. О некоторых аналитических результатах сообщалось в работах [23–27].

В режиме сильных сцинтилляций волновое поле приобретает нормальное (гауссово) распределение вероятностей. Насколько нам известно, впервые о гауссовости волнового поля в этом режиме было упомянуто в работе [7] со ссылкой на центральную предельную теорему. Более количественно задача исследовалась в работах [28, 29] методом континуальных интегралов. Там были найдены первая негауссова поправка ко второму моменту интенсивности I и параметр, определяющий величину этой поправки. Однако негауссовы поправки к распределению корреляционных функций огибающей пучка в разных точках возрастают с увеличением расстояния между точками; см., например, [26, 21, 22]. Поэтому область пространства, в которой применимо нормальное (гауссово) распределение светового волнового поля, ограничена.

В этой работе мы аналитически исследуем флуктуации "центра масс" светового пучка в режиме сильных сцинтилляций. Этот вопрос важен для оптической связи через атмосферу, поскольку значительные смещения "центра масс" могут нарушить связь. Мы определяем характерную величину смещения и изучаем его статистические свойства. Оказывается, распределение смещения является гауссовым. Под-

[1)] e-mail: nmasnev@itp.ac.ru

черкнем, что полученные результаты выходят за пределы применимости гауссова распределения самого светового волнового поля.

Рассмотрим монохроматическую световую волну, распространяющуюся в турбулентной среде (атмосфере). Волну описывает ее огибающая Ψ, которая подчиняется следующему параболическому уравнению:

$$i\partial_z\Psi + \frac{1}{2k_0}\nabla^2\Psi + k_0\nu\Psi = 0. \qquad (1)$$

Здесь k_0 – волновое число несущей световой волны, ν – отклонение показателя преломления от его среднего значения, z – координата вдоль направления распространения волны, а ∇ – двумерный ($2d$) градиент в направлениях, поперечных распространению светового пучка. Таким образом, ∇^2 – $2d$-лапласиан.

Описание световой волны (волнового пакета) с помощью огибающей Ψ применимо, пока все характерные масштабы задачи значительно превышают длину волны $2\pi/k_0$. Уравнение (1) учитывает дифракцию, связанную с флуктуациями показателя преломления, но не учитывает диссипацию. Оно применимо при условии, что нелинейными эффектами, возникающими из-за зависимости показателя преломления от интенсивности света (эффект Керра), можно пренебречь.

Поле ν зависит от времени t, двумерного ($2d$) радиус-вектора $\mathbf{r}$, поперечного направлению распространения волны, и координаты z вдоль этого направления. Производная по времени не входит в основное уравнение (1): вследствие высокой скорости света огибающая Ψ практически мгновенно приспосабливается к текущему состоянию среды. Поэтому изменения показателя преломления во времени вызывают временные изменения электромагнитного поля, представленного огибающей Ψ.

Турбулентные пульсации вызывают случайные флуктуации показателя преломления ν. Во все наблюдаемые величины (например, интенсивность пучка) поле ν входит через интегралы по координате z вдоль трассы пучка. Эти интегралы можно рассматривать как суммы большого числа независимых случайных величин. Поэтому можно считать, что поле ν обладает гауссовой (нормальной) статистикой; см., например, [30]. Парная корреляционная функция поля ν в поперечном направлении имеет степенной вид: она зависит от разности поперечных координат по степенному закону.

При этих предположениях можно получить замкнутое уравнение для парной корреляционной функции

$$F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, z) = \langle \Psi(\mathbf{r}_1, z)\Psi^\star(\mathbf{r}_2, z)\rangle, \qquad (2)$$

огибающей Ψ. Угловые скобки обозначают усреднение по времени или, иными словами, по статистике флуктуаций поля ν. Уравнение для парной корреляционной функции (2) имеет вид

$$\partial_z F - \frac{i}{2k_0}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{r}_1^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{r}_2^2}\right] + U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)F = 0. \qquad (3)$$

Оно было получено достаточно давно; см. [31–36]. Величина U в уравнении (3) определяется корреляционной функцией поля ν и представляет собой степенную функцию расстояния r: $U(r) \propto r^c$ с некоторым показателем c. Для спектра Обухова–Коррсина $c = 5/3$.

Далее будем считать трассу распространения света однородной; в этом случае $U(r)$ не зависит от z. Тогда можно записать следующую безразмерную комбинацию:

$$zU(r) = Cr^c/r_0^c, \qquad (4)$$

где r_0 – параметр Фрида [37], а C – константа порядка единицы. При исследовании атмосферной турбулентности традиционно принимают $C = 3.44$. По существу, фиксацию C можно считать определением параметра Фрида r_0. Согласно уравнению (4), с ростом z параметр Фрида r_0 уменьшается.

В задаче имеются два характерных пространственных масштаба, зависящих от z. Первый – сам параметр Фрида. Для однородной трассы $r_0 \propto z^{-1/c}$; см. уравнение (4). Второй масштаб – "длина расплывания" $R_{\rm spr} = z/(k_0 r_0)$. Для спектра Обухова–Коррсина при $c = 5/3$ имеем $r_0 \propto z^{-3/5}$ и $R_{\rm spr} \propto z^{2/5}$. Мы рассматриваем режим сильных сцинтилляций, в котором $R_{\rm spr} \gg r_0$. Можно сказать, что r_0 определяет размер спеклов, а $R_{\rm spr}$ – размер облака спеклов (если он превышает начальную ширину пучка l).

Решение уравнения (3) можно выразить через начальный профиль огибающей Ψ_0 с помощью функции Грина $\mathcal{G}$, зависящей от конечных координат $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, начальных координат $\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2'$ и z. Выражение для парной корреляционной функции имеет вид

$$F(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2, \mathbf{R} - \mathbf{r}/2, z) = \int d^2r'\, d^2R'\, \mathcal{G}(z)$$
$$\Psi_0\left(\mathbf{R}' + \mathbf{r}'/2\right)\Psi_0^\star\left(\mathbf{R}' - \mathbf{r}'/2\right), \qquad (5)$$

где мы ввели разности исходных координат $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2'$ и их полусуммы $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$. Функция Грина записывается как

$$\mathcal{G}(z) = \frac{k_0^2}{(2\pi)^2 z^2}\exp\left[\frac{ik_0}{z}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')(\mathbf{R} - \mathbf{R}')\right]$$
$$\exp\left[-\frac{C}{r_0^c}\int_0^1 d\chi\, |(1-\chi)\mathbf{r} + \chi\mathbf{r}'|^c,\right], \qquad (6)$$

через те же переменные. Естественно измерять разности r, r' в единицах r_0, а полусуммы R, R' – в единицах $R_{\rm spr}$.

Предположим, что $R_{\rm spr} \gg l \gg r_0$, где l – начальная ширина пучка. Тогда в аргументах $\Psi_0, \Psi_0^\star$ в уравнении (5) можно положить $\mathbf{r}' \to 0$. Характерное значение $\mathbf{R}'$ в уравнении (5) оценивается как l; следовательно, в функции $\mathcal{G}$ им можно пренебречь, см. уравнение (6). В результате получаем универсальное выражение

$$F = \frac{k_0^2 P}{(2\pi)^2 z^2} \int d^2x \, \exp\left(\frac{ik_0}{z}\mathbf{xR}\right) \exp\left[-\frac{C}{r_0^c}\int_0^1 d\chi \, |\mathbf{r} - \chi\mathbf{x}|^c,\right]. \quad (7)$$

Единственная характеристика пучка, входящая в уравнение (7), – переносимая им мощность P.

Для описания смещений "центра масс" профиля пучка относительно начала координат в поперечной плоскости введем вектор

$$\mathbf{s} = \frac{1}{P}\int d^2r \, \mathbf{r} \, |\Psi(z, \mathbf{r})|^2. \quad (8)$$

Очевидно, что $\langle \mathbf{s} \rangle = 0$, поскольку в рассматриваемом универсальном режиме все корреляционные функции изотропны. В гауссовом приближении для распределения вероятностей Ψ, используя парную корреляционную функцию (7), получаем $\langle \mathbf{s}^2 \rangle \sim r_0^2$. Однако вклад в $\langle \mathbf{s}^2 \rangle$, обусловленный негауссовыми поправками к корреляционной функции, оказывается значительно больше.

Для исследования статистических свойств вектора $\mathbf{s}$ используем диаграммную технику Уайлда; см. [38–41]. Мы применяем ее вариант для задачи о распространении света в турбулентной среде, разработанный в работе [23]. Этот метод позволяет вычислять корреляционные функции огибающей $\Psi, \Psi^\star$ и функции Грина. Диаграммы представляют члены ряда теории возмущений, получаемые разложением решения уравнения (1) по ν и последующим усреднением интересующих величин по статистическому распределению ν.

Например, "двухчастичную" функцию Грина $\mathcal{G}$ (6) можно представить суммой лестничной последовательности диаграмм, показанных на рис. 1. Горизонтальная ось там направлена вдоль оси Z, а вертикальная – в поперечном направлении. Линии, направленные вправо, изображают "голые одночастичные" функции Грина G,

$$G(\mathbf{r}, z) = \frac{k_0\theta(z)}{2\pi z}\exp\left(i\frac{k_0 r^2}{2z}\right), \quad (9)$$

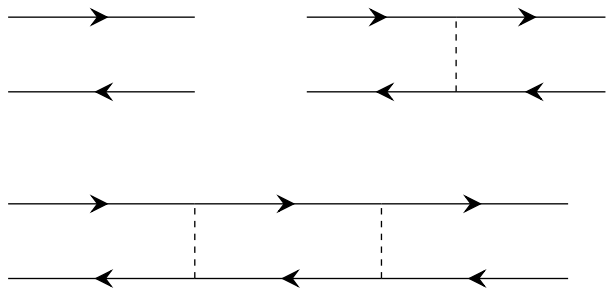


Рис. 1. Лестничная последовательность диаграмм для функции Грина $\mathcal{G}$ уравнения (3)

а линии, направленные влево, – $G^\star$. Пунктирные линии соответствуют множителю U, входящему в уравнение (3). Суммирование лестничной последовательности приводит к уравнению (6); см. [23].

Согласно теореме Вика (см. [42]), в гауссовом приближении корреляционные функции высших порядков

$$\langle \Psi(\mathbf{r}_1, z) \ldots \Psi(\mathbf{r}_n, z)\Psi^\star(\mathbf{r}_{n+1}, z) \ldots \Psi^\star(\mathbf{r}_{2n}, z)\rangle, \quad (10)$$

являются суммами произведений парных корреляционных функций (5). На языке диаграмм эти вклады, удовлетворяющие теореме Вика, определяются n независимыми лестницами, которые свертываются с произведением начальных профилей, аналогичным произведению в уравнении (10).

Поправки к гауссовым вкладам определяются перемычками между лестницами. Пример такой перемычки показан на рис. 2, где представлен вклад

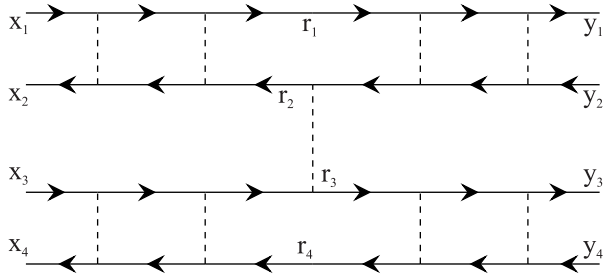


Рис. 2. Перемычка, соединяющая две лестницы

в корреляционную функцию четвертого порядка $\langle \Psi(\mathbf{y}_1, z)\Psi(\mathbf{y}_3, z)\Psi^\star(\mathbf{y}_2, z)\Psi^\star(\mathbf{y}_4, z)\rangle$. Аналогичные перемычки могут соединять точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3$; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_4$; $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4$. Аналитически сумма поправок записывается в виде интеграла

$$\delta\langle \Psi(\mathbf{y}_1, z)\Psi(\mathbf{y}_3, z)\Psi^\star(\mathbf{y}_2, z)\Psi^\star(\mathbf{y}_4, z)\rangle = \int_0^z d\zeta \int d^2r_1 d^2r_2 d^2r_3 d^2r_4 F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \zeta)F(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \zeta)$$

$$[U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_4)+U(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)-U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)-U(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_4)]$$
$$\mathcal{G}(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,z-\zeta)\mathcal{G}(\mathbf{y}_3,\mathbf{y}_4,\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_4,z-\zeta), \qquad (11)$$

где U – величина, входящая в уравнение (3).

Вклад поправки (11) в средний квадрат $\langle \mathbf{s}^2\rangle$ записывается следующим интегралом:

$$\langle \mathbf{s}^2\rangle = \frac{1}{P^2}\int d^2y_1\, d^2y_3\, \mathbf{y}_1\, \mathbf{y}_3$$
$$\delta\langle \Psi(\mathbf{y}_1,z)\Psi(\mathbf{y}_3,z)\Psi^\star(\mathbf{y}_1,z)\Psi^\star(\mathbf{y}_3,z)\rangle. \qquad (12)$$

С учетом выражения (12) сосредоточимся на анализе поправки (11) при попарном совпадении точек, входящих в уравнение (12).

Подставляя выражения (6), (7) в уравнение (11), находим

$$\delta\langle \Psi(\mathbf{y}_1,z)\Psi(\mathbf{y}_3,z)\Psi^\star(\mathbf{y}_1,z)\Psi^\star(\mathbf{y}_3,z)\rangle$$
$$= \frac{CP^2}{zr_0^c}\int d\zeta\int d^2r_{12}d^2r_{34}d^2R_{12}d^2R_{34}d^2x_1d^2x_2$$
$$\left[\frac{k_0^4}{(2\pi)^4\zeta^2(z-\zeta)^2}\right]^2\exp\left[\frac{ik_0}{\zeta}(\mathbf{x}_1\mathbf{R}_{12}+\mathbf{x}_2\mathbf{R}_{34})\right]$$
$$\exp\left\{-\frac{C\zeta}{zr_0^c}\left[\mathcal{T}(\mathbf{r}_{12},\mathbf{r}_{12}-\mathbf{x}_1)+\mathcal{T}(\mathbf{r}_{34},\mathbf{r}_{34}-\mathbf{x}_2)\right]\right\}$$
$$\exp\left\{\frac{ik_0}{z-\zeta}\left[\mathbf{r}_{12}(\mathbf{R}_{12}-\mathbf{y}_1)+\mathbf{r}_{34}(\mathbf{R}_{34}-\mathbf{y}_3)\right]\right\}$$
$$\exp\left[-\frac{C}{r_0^c}\frac{z-\zeta}{z}\mathcal{T}(\mathbf{r}_{12},0)-\frac{C}{r_0^c}\frac{z-\zeta}{z}\mathcal{T}(\mathbf{r}_{34},0)\right]$$
$$\left[\left|\mathbf{S}+\frac{\mathbf{r}_{12}+\mathbf{r}_{34}}{2}\right|^c+\left|\mathbf{S}-\frac{\mathbf{r}_{12}+\mathbf{r}_{34}}{2}\right|^c\right.$$
$$\left.-\left|\mathbf{S}+\frac{\mathbf{r}_{12}-\mathbf{r}_{34}}{2}\right|^c-\left|\mathbf{S}-\frac{\mathbf{r}_{12}-\mathbf{r}_{34}}{2}\right|^c\right], \qquad (13)$$

где $\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_{34}=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_4$, $\mathbf{R}_{12}=(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{R}_{34}=(\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4)/2$, $\mathbf{S}=\mathbf{R}_{12}-\mathbf{R}_{34}$, а r_0 берется при значении координаты z. Интегрирование по $\mathbf{S}$ можно выполнить явно, а интегрирование по $\mathbf{R}=(\mathbf{R}_{12}+\mathbf{R}_{34})/2$ дает дельта-функцию, с помощью которой затем выполняется интегрирование по $\mathbf{x}_2$. Получаем

$$\delta\langle \Psi(\mathbf{y}_1,z)\Psi(\mathbf{y}_3,z)\Psi^\star(\mathbf{y}_1,z)\Psi^\star(\mathbf{y}_3,z)\rangle$$
$$= 2^{c+3}\pi\frac{\Gamma(1+c/2)}{\Gamma(-c/2)}P^2\int d\zeta\int d^2r_{12}d^2r_{34}d^2x_1$$
$$\frac{k_0^6}{(2\pi)^6\zeta^2(z-\zeta)^4}\left|k_0\Big(\frac{\mathbf{x}_1}{\zeta}+\frac{\mathbf{r}_{12}}{z-\zeta}\Big)\right|^{-c-2}$$
$$\exp\left[-\frac{ik_0}{z-\zeta}(\mathbf{r}_{12}\mathbf{y}_1+\mathbf{r}_{34}\mathbf{y}_3)-\frac{C}{r_0^c}\frac{\zeta}{z}\mathcal{T}(\mathbf{r}_{12},\mathbf{r}_{12}-\mathbf{x}_1)\right]$$
$$\exp\left\{-\frac{C}{r_0^c}\frac{\zeta}{z}\mathcal{T}\left[\mathbf{r}_{34},\mathbf{x}_1+\mathbf{r}_{34}+\frac{\zeta}{z-\zeta}(\mathbf{r}_{12}+\mathbf{r}_{34})\right]\right\}$$
$$\exp\left[-\frac{C}{r_0^c}\frac{z-\zeta}{z}\mathcal{T}(\mathbf{r}_{12},0)-\frac{C}{r_0^c}\frac{z-\zeta}{z}\mathcal{T}(\mathbf{r}_{34},0)\right]$$
$$\frac{C}{zr_0^c}\left\{\cos\left[\frac{k_0(\mathbf{r}_{12}+\mathbf{r}_{34})}{2}\left(\frac{\mathbf{x}_1}{\zeta}+\frac{\mathbf{r}_{12}}{z-\zeta}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\cos\left[\frac{k_0(\mathbf{r}_{12}-\mathbf{r}_{34})}{2}\left(\frac{\mathbf{x}_1}{\zeta}+\frac{\mathbf{r}_{12}}{z-\zeta}\right)\right]\right\}, \qquad (14)$$

с меньшим числом переменных.

Теперь подставим выражение (14) в уравнение (12). После этого интегрирование по $\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_3$ сводится к производным дельта-функций, которые, в свою очередь, определяют интегралы по $\mathbf{r}_{12},\mathbf{r}_{34}$. В результате находим

$$\langle \mathbf{s}^2\rangle = -\frac{2^c\Gamma(1+c/2)}{\pi\Gamma(-c/2)}\frac{C}{zr_0^ck_0^c}\int_0^z d\zeta\int d^2x_1\frac{(z-\zeta)^2}{\zeta^{2-c}}$$
$$x_1^{-c}\exp\Big(-\frac{2C}{r_0^c}\frac{\zeta}{z}\frac{x_1^c}{c+1}\Big), \qquad (15)$$

Оставшиеся интегралы можно вычислить явно. Получаем

$$R_{\rm jitt}^2\equiv\langle \mathbf{s}^2\rangle = BR_{\rm spr}^cr_0^{2-c}, \qquad (16)$$

$$B=-\frac{2^{c+2-\frac{2}{c}}(c+1)^{\frac{2}{c}-1}C^{2-\frac{2}{c}}\Gamma(c/2)\Gamma(2/c-1)}{(c-2/c)(c+1-2/c)(c+2-2/c)\Gamma(-c/2)}. \qquad (17)$$

Для спектра Обухова–Коррсина при $c=5/3$ и $C=3.44$ получаем $B\simeq 8.2$.

Согласно уравнению (16), характерная величина смещения "центра масс" $R_{\rm jitt}$ растет с увеличением z. Для спектра Обухова–Коррсина при $c=5/3$ приведено $R_{\rm jitt}^{13/30}$. Величина $R_{\rm jitt}$ лежит между r_0 и $R_{\rm spr}$: $r_0\ll R_{\rm jitt}\ll R_{\rm spr}$ вследствие неравенства $r_0\ll R_{\rm spr}$. Отметим, что выражение (16) было получено ранее в работе [43] прямым замыканием цепочки соотношений между корреляционными функциями.

Далее исследуем высшие моменты величины $\mathbf{s}$: $\langle \mathbf{s}^{2n}\rangle$. Диаграммы, описывающие вклады в момент $\langle \mathbf{s}^{2n}\rangle$, содержат $2n$ лестниц и дополнительные перемычки. Существуют определенные правила отбора диаграмм, дающих главные вклады в момент $\langle \mathbf{s}^{2n}\rangle$. Сформулируем эти правила.

Во-первых, конечные точки каждой лестницы должны совпадать. Это соответствует множителю $\Psi^\star\Psi$ в выражении для $\mathbf{s}$ на конце лестницы. Если же конечные точки некоторой лестницы на диаграмме не совпадают, соответствующее аналитическое выражение содержит дополнительную степень отношения $r_0/R_{\rm spr}$ по сравнению с диаграммами, в которых конечные точки всех лестниц совпадают. Поэтому диа-

граммы без такого совпадения малы и должны быть отброшены.

Во-вторых, главная диаграмма должна содержать минимальное число перемычек, поскольку каждая перемычка дает дополнительную малость порядка $(r_0/R_{\rm spr})^{2-c}$ [23] по сравнению с диаграммами без перемычек. Минимальное число перемычек для момента $\langle s^{2n}\rangle$ равно n. Это объясняется следующим образом. Каждая лестница должна быть соединена с перемычкой; иначе возникает несвязанная лестница, дающая $\langle \mathbf{s}\rangle = 0$. Минимальное число перемычек равно n, поскольку тогда каждая лестница может быть соединена ровно с одной перемычкой. Пример такой диаграммы для $\langle s^4\rangle$ приведен на рис. 3.

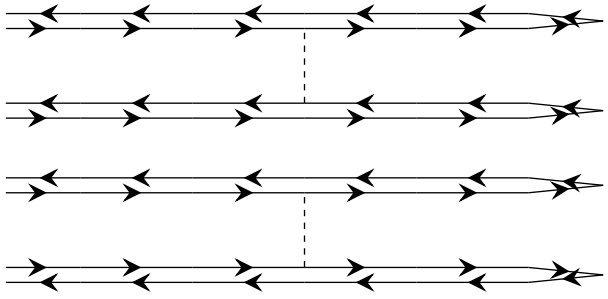


Рис. 3. Диаграмма с двумя перемычками, дающая вклад в $\langle s^4\rangle$

Таким образом, диаграммы, дающие главный вклад в $\langle \mathbf{s}^{2n}\rangle$, соответствуют произведениям n множителей, каждый из которых описывает две лестницы, соединенные перемычкой; пример приведен на рис. 3. Каждый такой множитель соответствует $\langle \mathbf{s}^2\rangle$. Комбинаторный коэффициент, определяющий число способов соединить $2n$ лестниц посредством n перемычек (не соединяя одну лестницу с двумя перемычками), равен $(2n-1)!!$, как и в теореме Вика; см. [42]. Следовательно, в главном приближении вектор $\mathbf{s}$ имеет нормальную (гауссову) плотность вероятности. Поправки к ней малы по параметру $r_0/R_{\rm spr}$.

В заключение мы исследовали статистические свойства смещений светового пучка, распространяющегося в турбулентной среде в режиме сильных сцинтилляций. Смещения характеризуются положением "центра масс" пучка $\mathbf{s}$ в поперечной плоскости, среднее значение $\langle \mathbf{s}\rangle$ равно нулю. При этом, средний квадрат $R^2_{\rm jitt} = \langle \mathbf{s}^2\rangle$ определяется поправками к нормальному (гауссову) распределению вероятностей для огибающей Ψ. Мы получили явное выражение для $R_{\rm jitt}$, причем выполняются неравенства $r_0 < R_{\rm jitt} < R_{\rm spr}$, где параметр Фрида r_0 задает характерный радиус спеклов, а $R_{\rm spr}$ – характерный размер облака спеклов. При этом сама величина $\mathbf{s}$, как ни удивительно, имеет нормальное (гауссово) распределение вероятностей.

Финансирование работы. Данная работа финансировалась за счет средств Министерства образования и науки РФ.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. А. Н. Колмогоров, "Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса", Доклады Академии наук СССР **30**, 299 (1941) [A. N. Kolmogorov, "The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers", Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences **434**, 9 (1991)].
2. А. Н. Колмогоров, "Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности", Доклады Академии наук СССР **32**, 19 (1941) [A. N. Kolmogorov, "Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence", Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences **434**, 15 (1991)].
3. А. М. Обухов, "О распределении энергии в спектре турбулентного потока", Доклады Академии наук СССР **32**, 22 (1941) [A. M. Obukhov, "On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow", Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des sciences de l'URSS **32**, 19 (1941)].
4. А. М. Обухов, "Структура температурного поля в турбулентном потоке", Известия Академии наук СССР. Серия географическая и геофизическая **13**, 58 (1949) [A. M. Obukhov, "Structure of the temperature field in turbulent flow", English translation, Technical Report AD0683016 (Department of the Army, Fort Detrick, Frederick, MD, 1968); https://www.ams.jhu.edu/~eyink/Turbulence/Obukhov49.pdf].
5. S. Corrsin, "On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence", J. Appl. Phys. **22**, 469 (1951).
6. А. М. Обухов, "О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света", Известия Академии наук СССР. Серия геофизическая **2**, 155 (1953) [A. M. Obukhov, "The influence of weak atmospheric inhomogeneities upon the propagation of sound and light", translated by W. C. Hoffman, Report T-47 (U.S. Air Force Project RAND, Santa Monica, CA, 1955)].
7. В. И. Татарский, *Распространение волн в турбулентной атмосфере* (Наука, М., 1967) [V. I. Tatarskii, *The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation* (Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971)].

8. J. W. Goodman, "Statistical properties of laser speckle patterns", in *Laser Speckle and Related Phenomena, Topics in Applied Physics*, ed. by J. C. Dainty (Springer-Verlag, Berlin, 1975), v. 9, p. 9.
9. С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский, *Введение в статистическую радиофизику. Случайные поля*, 2-е изд., перераб. и доп. (Наука, М., 1978), ч. 2 [S. M. Rytov, Yu. A. Kravtsov, and V. I. Tatarskii, *Principles of Statistical Radiophysics. Wave Propagation Through Random Media* (Springer-Verlag, Berlin, 1989), v. 4].
10. Ю. А. Кравцов, С. М. Рытов, В. И. Татарский, "Статистические проблемы в теории дифракции", Успехи физических наук **115**, 239 (1975) [Yu. A. Kravtsov, S. M. Rytov, and V. I. Tatarskii, "Statistical problems in diffraction theory", Soviet Phys.-Uspekhi **18**, 118 (1975)].
11. J. W. Strohbehn (editor), *Laser Beam Propagation in the Atmosphere*, Topics in Applied Physics (Springer-Verlag, Berlin, 1978), v. 25.
12. L. C. Andrews and R. L. Phillips, *Laser Beam Propagation through Random Media*, 1st ed., SPIE Press Monograph Series (SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, WA, 1998), v. PM53.
13. M. A. Vorontsov, G. W. Carhart, V. S. R. Gudimetla, T. Weyrauch, E. Stevenson, S. L. Lachinova, L. A. Beresnev, J. Liu, K. Rehder, and J. F. Riker, "Characterization of atmospheric turbulence effects over 149 km propagation path using multi-wavelength laser beacons", in *Proceedings of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference* (Maui Economic Development Board, Maui, HI, 2010), paper E18; https://ecommons.udayton.edu/ece_fac_pub/96/.
14. M. A. Vorontsov, V. S. R. Gudimetla, G. W. Carhart, T. Weyrauch, S. L. Lachinova, E. Polnau, J. Reierson, L. A. Beresnev, J. Liu, and J. F. Riker, "Comparison of turbulence-induced scintillations for multi-wavelength laser beacons over tactical (7 km) and long (149 km) atmospheric propagation paths", in *Proceedings of the Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference* (Maui Economic Development Board, Maui, HI, 2011), paper E37; https://ecommons.udayton.edu/ece_fac_pub/97/.
15. S. L. Lachinova and M. A. Vorontsov, "Giant irradiance spikes in laser beam propagation in volume turbulence: analysis and impact", Journal of Optics **18**, 025608 (2016).
16. V. P. Aksenov, V. V. Dudorov, V. V. Kolosov, and V. Yu. Venediktov, "Probability distribution of intensity fluctuations of arbitrary-type laser beams in the turbulent atmosphere", Opt. Express **27**, 24705 (2019).
17. В. А. Богачев, И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, Ф. А. Стариков, "Матрица корреляций градиентов фазы световой волны как способ измерения основных параметров турбулентности", Письма в ЖЭТФ **120**, 598 (2024) [V. A. Bogachev, I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, "Matrix of correlations between the gradients of the phase of the light wave as a way to measure the principal parameters of turbulence", JETP Lett. **120**, 573 (2024)].
18. В. А. Богачев, А. В. Немцева, Ф. А. Стариков, "Формирование изображения звезды при влиянии углового анизопланатизма в турбулентной атмосфере", Журнал технической физики **94**, 827 (2024) [V. A. Bogachev, A. V. Nemtseva, and F. A. Starikov, "Star imaging under the influence of angular anisoplanatism in turbulent atmosphere", Technical Physics **69**, 769 (2024)].
19. I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and F. A. Starikov, "Correlations of the phase fluctuations in the presence of weak scintillations", Journal of the Optical Society of America A **42**, 1654 (2025).
20. В. А. Богачев, И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, А. В. Немцева, Ф. А. Стариков, "Корреляции градиентов фазы световой волны, распространяющейся в турбулентной среде в режиме слабых сцинтилляций", Письма в ЖЭТФ **123**, 526 (2026) [V. A. Bogachev, I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, A. V. Nemtseva, and F. A. Starikov, "Correlations of the phase gradients of the light wave propagating in a turbulent medium in the regime of weak scintillations", JETP Letters **123**, 521 (2026)].
21. V. A. Bogachev, I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, A. V. Nemtseva, and F. A. Starikov, "Phase correlations of a strongly scintillating light wave propagating through a turbulent medium", Phys. Rev. E **114**, 034133 (2026); DOI: https://doi.org/10.1103/c3q7-t5tm.
22. А. В. Немцева, Ф. А. Стариков, "Корреляции градиентов фазы оптической волны в стратифицированной турбулентной атмосфере", Письма в ЖЭТФ **123**, 857 (2026) [A. V. Nemtseva and F. A. Starikov, "Correlations of optical wave phase gradients in a stratified turbulent atmosphere", JETP Lett. **123**, 824 (2026)].
23. I. V. Kolokolov, V. V. Lebedev, and P. M. Lushnikov, "Statistical properties of a laser beam propagating in a turbulent medium", Phys. Rev. E **101**, 042137 (2020).
24. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, "Universal tail of the probability density function of the intensity of light propagating in a turbulent medium", Phys. Rev. E **111**, 064104 (2025).
25. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, "Статистика высоких интенсивностей света, распространяющегося в турбулентной среде", Успехи физических наук **195**, 1179 (2025) [I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, "High intensity statistics of light propagating in turbulent fluid", Phys.-Uspekhi **68**, 1112 (2025)].
26. Н. Г. Маснев, "Корреляции интенсивности светового пучка, распространяющегося в турбулентной среде", Письма в ЖЭТФ **123**, 170 (2026) [N. G. Masnev,

"Intensity correlations of a light beam propagating in a turbulent medium", JETP Lett. **123**, 152 (2026)].

27. I. V. Kolokolov and V. V. Lebedev, "Perturbation theory for phase correlations of a light wave propagating in a turbulent medium", Phys. Rev. E **113**, 054117 (2026).
28. В. У. Заворотный, В. И. Кляцкин, В. И. Татарский, "Сильные флуктуации интенсивности электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах", ЖЭТФ **73**, 481 (1977) [V. U. Zavorotnyi, V. I. Klyatskin, and V. I. Tatarskii, "Strong fluctuations of the intensity of electromagnetic waves in randomly inhomogeneous media", Soviet Physics JETP **46**, 252 (1977)].
29. M. I. Charnotskii, "Asymptotic analysis of finite-beam scintillations in a turbulent medium", Waves in Random Media **4**, 243 (1994).
30. В. И. Кляцкин, "Распространение электромагнитных волн в случайно-неоднородной среде как задача статистической математической физики", Успехи физических наук **174**, 177 (2004) [V. I. Klyatskin, "Electromagnetic wave propagation in a randomly inhomogeneous medium as a problem in mathematical statistical physics", Phys.-Uspekhi **47**, 169 (2004)].
31. В. И. Шишов, "К теории распространения волн в случайных средах", Известия высших учебных заведений. Радиофизика **11**, 866 (1968) [V. I. Shishov, "Theory of wave propagation in random media", Radiophys. Quantum Electron. **11**, 500 (1968)].
32. В. И. Татарский, "Распространение света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления в приближении марковского случайного процесса", ЖЭТФ **56**, 2106 (1969) [V. I. Tatarskii, "Light propagation in a medium with random refractive index inhomogeneities in the Markov random process approximation", Soviet Physics JETP **29**, 1133 (1969)].
33. Л. А. Чернов, "Уравнения для статистических моментов поля в случайно неоднородной среде", Акустический журнал **15**, 594 (1969) [L. A. Chernov, "Equations for the statistical moments of the field in a randomly inhomogeneous medium", Soviet Physics Acoustics **15**, 511 (1970)].
34. В. И. Кляцкин, "О пределах применимости приближения марковского случайного процесса в задачах, связанных с распространением света в среде со случайными неоднородностями показателя преломления", ЖЭТФ **57**, 952 (1969) [V. I. Klyatskin, "Applicability of the approximation of a Markov random process in problems relating to the propagation of light in a medium with random inhomogeneities", Soviet Physics JETP **30**, 520 (1970)].
35. M. J. Beran and T. L. Ho, "Propagation of the fourth-order coherence function in a random medium (a nonperturbative formulation)", Journal of the Optical Society of America **59**, 1134 (1969).
36. J. E. Molyneux, "Propagation of the Nth-order coherence function in a random medium. The governing equations", Journal of the Optical Society of America **61**, 248 (1971).
37. D. L. Fried, "Differential angle of arrival: theory, evaluation, and measurement feasibility", Radio Sci. **10**, 71 (1975).
38. H. W. Wyld, Jr., "Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid", Annals of Physics **14**, 143 (1961).
39. P. C. Martin, E. D. Siggia, and H. A. Rose, "Statistical dynamics of classical systems", Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
40. R. Penco and D. Mauro, "Perturbation theory via Feynman diagrams in classical mechanics", Eur. J. Phys. **27**, 1241 (2006).
41. J. A. Hertz, Y. Roudi, and P. Sollich, "Path integral methods for the dynamics of stochastic and disordered systems", Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **50**, 033001 (2017).
42. G. C. Wick, "The evaluation of the collision matrix", Phys. Rev. **80**, 268 (1950).
43. А. С. Гурвич, А. И. Кон, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцов, *Лазерное излучение в турбулентной атмосфере* (Наука, М., 1976) [A. S. Gurvich, A. I. Kon, V. L. Mironov, and S. S. Khmelevtsov, *Lazernoe izluchenie v turbulentnoi atmosfere* (Nauka, Moscow, 1976)] [in Russian].