Письма в ЖЭТФ, том 124, вып. 10, с. 883 – 893 © 2026 г. 25 ноября

Определение ошибок квантовых операций с помощью D-меры

А. Е. Толстобров[×+1)], *Г. П. Фёдоров*[+*], *Л. Е. Федичкин*[+], *Д. А. Тарпанов*[+], *Д. Ю. Шапошников*[+], *С. С. Самарин*[×+], *А. М. Еремеев*[+], *А. М. Муравьёв*[+], *М. Д. Пермяков*[*+], *Я. Т. Шнейдман*[×+], *С. А. Гунин*[+], *Ю. И. Зотова*[+*], *Ш. В. Кадырметов*[+], *Д. А. Калачёва*[+], *А. Н. Болгар*[+], *В. Б. Лубсанов*[+], *Е. С. Шлыкова*[+], *А. Ю. Дмитриев*[+*], *Ш. В. Сандуляну*[+*] *О. В. Астафьев*[×+*]

[+]*Московский физико-технический институт, 141701 Долгопрудный, Россия*

[*]*Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, 125009 Москва, Россия*

[×]*Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 15 июня 2026 г.
После переработки 9 октября 2026 г.
Принята к публикации 10 октября 2026 г.

Проведено экспериментальное сравнение методов оценки ошибок квантовых операций на сверхпроводниковом квантовом процессоре. Ошибки однокубитных операций исследованы с помощью чередующегося рандомизированного бенчмаркинга, кросс-энтропийного бенчмаркинга и D-меры, определяемой через операторную норму отклонения экспериментальной матрицы плотности от идеальной. Показано, что значения ошибок, полученные методами бенчмаркинга, на порядок ниже ошибок, определенных с помощью D-меры. Дополнительно исследовано накопление ошибки в композициях однокубитных гейтов и проверена применимость аддитивной оценки D-меры. Полученные результаты демонстрируют необходимость применения метрик, чувствительных к структуре ошибки, например, D-меры, для более полного понимания характеристик квантовых процессоров и оптимизации их работы при выполнении конкретных алгоритмов.

DOI: 10.7868/S3034576626110251

1. Введение. Ошибки квантовых операций являются одним из основных факторов, ограничивающих глубину практически реализуемых квантовых алгоритмов. Для характеризации ошибок применяются как томографические методы, восстанавливающие действие квантового канала [1–7], так и методы бенчмаркинга, извлекающие интегральные характеристики ошибок из результатов выполнения случайных последовательностей гейтов [8–13]. Рандомизированный бенчмаркинг (RB) и его модификация с чередующимся применением тестируемой операции (IRB) позволяют оценивать среднюю ошибку отдельных операций и слабо чувствительны к ошибкам подготовки и измерения состояний. Кросс-энтропийный бенчмаркинг (XEB) применяется для оценки точности выполнения случайных квантовых цепочек на многокубитных устройствах [14–16].

Получаемые методами бенчмаркинга скалярные характеристики удобны для калибровки процессоров и сравнения качества квантовых операций. Однако усреднение по случайным последовательностям может скрывать внутренний характер ошибки: в частности ее зависимость от начального состояния.

Это особенно существенно при наличии когерентных ошибок, таких как неточность угла или направления оси вращения. При одной и той же средней ошибке когерентный шум может приводить к существенно большей ошибке в наихудшем случае, чем стохастический шум [17]. Поэтому влияние ошибки на конкретный алгоритм может заметно отличаться от ее усредненной оценки [18–20].

В настоящей работе для такой характеризации используется D-мера, определяемая через операторную норму отклонения экспериментальной матрицы плотности от идеальной, вычисленной после применения тестируемой операции [21, 22]. В отличие от усредненных показателей бенчмаркинга, эта величина характеризует наибольшее отклонение на рассматриваемом наборе входных состояний. Томографическая реконструкция соответствующего квантового канала дополнительно позволяет восстановить зависимость ошибки от начального состояния и выявить направления на сфере Блоха, для которых отклонение от идеальной операции максимально.

В работе проведено экспериментальное сравнение D-меры с оценками, полученными методами чередующегося рандомизированного, кросс-энтропийного и purity бенчмаркинга, а также с другими характе-

[1)]e-mail: tolstobrov.ae@phystech.edu

ристиками ошибки восстановленного квантового канала, включая среднюю ошибку и норму Китаева. Исследование выполнено для набора однокубитных операций $R_X(\theta)$ и $R_Y(\theta)$ на сверхпроводниковом кубите типа трансмон. Исследована зависимость ошибки от входного состояния, а также сопоставлены непосредственная экспериментальная оценка D_{exp} и значение D_{fit}, полученное из восстановленного квантового канала. Наконец, экспериментально исследована степень аддитивности ошибок в композициях однокубитных операций.

2. Методы оценки ошибок квантовых операций. Для характеризации квантовых операций в работе используются два подхода. Томографический подход позволяет исследовать отклонение выходного состояния от идеального и его зависимость от начального состояния. Методы бенчмаркинга, напротив, извлекают усредненные характеристики ошибок из затухания наблюдаемых величин при увеличении глубины случайных квантовых цепочек.

Произвольное чистое состояние кубита определяется двумя вещественными параметрами и может быть представлено в виде

$$|\psi(\theta,\varphi)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{1}$$

Здесь θ и φ являются соответственно полярным и азимутальным углами на сфере Блоха. Соответствующая матрица плотности записывается как

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z\right), \tag{2}$$

где координаты вектора Блоха имеют вид

$$x = \sin\theta\cos\varphi, \qquad y = \sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \cos\theta, \tag{3}$$

и удовлетворяют условию $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. В случае смешанного состояния матрица плотности имеет тот же вид, но вектор Блоха лежит внутри единичной сферы, т.е. $x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

2.1. Томографическая оценка и D-мера. Идеальная квантовая операция задается унитарным оператором U, которому соответствует квантовый канал $\mathcal{U}$. Для входного состояния ρ_{in} его действие имеет вид:

$$\rho_{\text{id}} = \mathcal{U}(\rho_{\text{in}}) = U\rho_{\text{in}}U^{\dagger}. \tag{4}$$

Действие реальной квантовой операции на входное состояние ρ_{in} описывается квантовым каналом $\mathcal{E}$:

$$\rho_{\text{out}} = \mathcal{E}\left(\rho_{\text{in}}\right). \tag{5}$$

Различные способы оценки ошибок квантовых операций основаны на сравнении экспериментального выходного состояния ρ_{out} с идеальным ρ_{id}.

Одной из наиболее распространенных характеристик близости двух квантовых состояний является степень совпадения (fidelity) [23]. В настоящей работе используется определение

$$F(\rho_{\text{id}},\rho_{\text{out}}) = \left[\text{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho_{\text{id}}}\,\rho_{\text{out}}\sqrt{\rho_{\text{id}}}}\right]^2. \tag{6}$$

Если одно из состояний является чистым, $\rho_{\text{id}} = |\psi_{\text{id}}\rangle\langle\psi_{\text{id}}|$, выражение упрощается:

$$F(\rho_{\text{out}},\rho_{\text{id}}) = \langle\psi_{\text{id}}|\rho_{\text{out}}|\psi_{\text{id}}\rangle. \tag{7}$$

Степень совпадения (6) характеризует действие квантовой операции на заданное начальное состояние ρ_{in}. Для оценки квантовой операции в целом вводится средняя степень совпадения гейта:

$$F_{\text{avg}}(\mathcal{E},\mathcal{U}) = \int d\psi\, F\left(\mathcal{E}(\rho_\psi),\mathcal{U}(\rho_\psi)\right), \quad \rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|, \tag{8}$$

где интегрирование проводится по мере Хаара на множестве чистых состояний [24]. Соответствующая средняя ошибка квантовой операции определяется как

$$r_{\text{avg}} = 1 - F_{\text{avg}}. \tag{9}$$

Средняя ошибка r_{avg} удобна для интегральной характеристики качества операции, однако она ничего не говорит о распределении ошибок по пространству входных состояний.

Более строгой характеристикой ошибки квантовой операции является вполне ограниченная норма [25–28], также называемая нормой Китаева:

$$D_{\diamond}(\mathcal{E},\mathcal{U}) = \frac{1}{2}\sup_{\rho_{SA}}\left\|\left[(\mathcal{E}-\mathcal{U})\otimes\mathcal{I}_A\right](\rho_{SA})\right\|_1. \tag{10}$$

Здесь S – исследуемая система, A – вспомогательная система, $\mathcal{I}_A$ – тождественный канал на вспомогательной системе, ρ_{SA} – матрица плотности исследуемой системы и вспомогательной системы, а $\|X\|_1$ – следовая норма. Для эрмитовой матрицы X следовая норма равна сумме модулей ее собственных значений: $\|X\|_1 = \sum_j |\lambda_j(X)|$. Поиск супремума происходит по всем возможным состояниям ρ_{SA}, включающим запутанные состояния S со вспомогательной системой A, при этом достаточно рассмотреть вспомогательную систему размерности $\dim A = \dim S$. Таким образом, норма Китаева учитывает возможность того, что действие ошибки на кубит, запутан-

ный с другими кубитами квантового регистра, окажется сильнее, чем действие ошибки на изолированный кубит.

Несмотря на широкое распространение в научной литературе [27–29], экспериментальная оценка нормы Китаева представляется затруднительной. Прямое экспериментальное определение нормы Китаева требует управляемой вспомогательной системы и подготовки запутанных состояний. Вместе с тем $D_\diamond$ можно вычислить косвенно, восстановив квантовый канал $\mathcal{E}$.

Более удобной для экспериментального определения является альтернативная норма ошибки – D-мера. Ошибка квантовой операции по D-мере определяется как максимальное отклонение по всем допустимым входным состояниям [21, 22]:

$$D(\mathcal{E},\mathcal{U}) = \sup_{\rho_{\text{in}}} \left\| \mathcal{E}(\rho_{\text{in}}) - U\rho_{\text{in}}U^\dagger \right\|_{\text{op}}, \qquad (11)$$

где

$$\|X\|_{\text{op}} = \max_j |\lambda_j(X)| \qquad (12)$$

операторная норма, а $\lambda_j(X)$ обозначают собственные значения матрицы X. Максимизация выбранной меры различимости выходных состояний по всем входным состояниям является общим способом построения характеристики ошибки квантовой операции в наихудшем случае [30]. Используемая в настоящей работе D-мера представляет собой конкретную реализацию этой конструкции, в которой отклонение реальной матрицы плотности от идеальной измеряется операторной нормой [21, 22]. Для однокубитных квантовых каналов D-мера не превосходит нормы Китаева:

$$D(\mathcal{E},\mathcal{U}) \le D_\diamond(\mathcal{E},\mathcal{U}). \qquad (13)$$

Равенство достигается, если запутывание со вспомогательной системой не увеличивает максимальную различимость реального и идеального квантовых каналов.

В эксперименте используется конечный набор входных состояний $\rho_{\text{in}}^{(k)}$. Поэтому экспериментальная оценка D-меры записывается в виде

$$D_{\text{exp}} = \max_k \|\rho_{\text{out}}^{(k)} - \rho_{\text{id}}^{(k)}\|_{\text{op}}. \qquad (14)$$

Для каждого входного состояния операторная норма отклонения оценивается по конечному набору измерительных направлений:

$$\widehat{\|\Delta\rho\|}_{\text{op}} = \max_j \left| \langle 0|U_{\text{rot}}^{(j)\dagger}\Delta\rho U_{\text{rot}}^{(j)}|0\rangle \right|. \qquad (15)$$

Здесь шапка обозначает выборочную оценку операторной нормы, а $U_{\text{rot}}^{(j)}$ задает направление измерения на сфере Блоха.

Поскольку максимизация в выражении (15) проводится по конечному набору направлений, величина D_{exp} является выборочной оценкой D-меры, получаемой непосредственно из результатов измерений исследуемой системы. Для сравнения с другими способами определения ошибок восстанавливается квантовый канал $\mathcal{E}$, по которому вычисляются D_{fit} и $D_\diamond$ – отклонения восстановленного канала от идеального по D-мере и норме Китаева соответственно. Действие квантового канала $\mathcal{E}$ на вектор Блоха описывается аффинным преобразованием:

$$\mathbf{r}_{\text{out}} = A\mathbf{r}_{\text{in}} + \mathbf{b}. \qquad (16)$$

Параметры A и $\mathbf{b}$ определяются методом наименьших квадратов по измеренным парам входных и выходных векторов Блоха:

$$(A_{\text{fit}}, \mathbf{b}_{\text{fit}}) = \arg\min_{A,\mathbf{b}} \sum_k \left\| \mathbf{r}_{\text{out}}^{(k)} - A\mathbf{r}_{\text{in}}^{(k)} - \mathbf{b} \right\|_2^2. \qquad (17)$$

Качество аппроксимации характеризуется коэффициентом детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_k \left\| \mathbf{r}_{\text{out}}^{(k)} - A_{\text{fit}}\mathbf{r}_{\text{in}}^{(k)} - \mathbf{b}_{\text{fit}} \right\|_2^2}{\sum_k \left\| \mathbf{r}_{\text{out}}^{(k)} - \overline{\mathbf{r}}_{\text{out}} \right\|_2^2}, \qquad (18)$$

где $\overline{\mathbf{r}}_{\text{out}}$ – средний по всем измерениям выходной вектор Блоха. Значение R^2, близкое к единице, соответствует хорошему согласованию восстановленного аффинного преобразования с экспериментальными данными. При оптимизации накладываются условия полной положительности и сохранения следа, обеспечивающие физичность восстановленного квантового канала.

Обозначим восстановленный квантовый канал через $\mathcal{E}_{\text{fit}}$. Величина D_{fit} характеризует отклонение этого канала от идеального канала $\mathcal{U}$. Если действие идеальной операции на сфере Блоха задается матрицей вращения R_U, то модельная оценка D-меры определяется как

$$D_{\text{fit}} = D(\mathcal{E}_{\text{fit}},\mathcal{U}) = \frac{1}{2}\max_{|\mathbf{r}|=1} \|(A_{\text{fit}} - R_U)\mathbf{r} + \mathbf{b}_{\text{fit}}\|_2. \qquad (19)$$

Максимум в выражении (19) находится численно путем оптимизации по сфере Блоха. Для вычисления $D_\diamond$ применяется метод полуопределенного программирования [28]. Таким образом, D_{exp} и D_{fit} характеризуют отклонение от одной и той же идеальной операции. Первая величина является выборочной оценкой, полученной по конечному набору измеренных состояний и направлений, а вторая – вычисляется по

восстановленному каналу с максимизацией по всей сфере Блоха. Равенство этих оценок в общем случае не предполагается.

Для последовательного выполнения операций справедливо неравенство треугольника [31, 32]:

$$D(\mathcal{E}_2 \circ \mathcal{E}_1, \mathcal{U}_2 \circ \mathcal{U}_1) \leq D(\mathcal{E}_1, \mathcal{U}_1) + D(\mathcal{E}_2, \mathcal{U}_2)\,. \quad (20)$$

Неравенство (20) задает верхнюю оценку ошибки композиции. Ниже в работе экспериментально исследуется степень аддитивности ошибок в композициях однокубитных операций. Для слабых преимущественно некогерентных ошибок должна наблюдаться приближенная аддитивность D-меры [33]. Когерентные ошибки способны частично усиливаться или компенсироваться при композиции гейтов, вследствие чего неравенство может выполняться с существенным запасом.

2.2. Чередующийся рандомизированный бенчмаркинг. В рандомизированном бенчмаркинге (RB) исследуется вероятность возвращения кубита в начальное состояние после выполнения случайной последовательности поворотов Клиффорда и заключительной инвертирующей операции [8–10]. Зависимость вероятности возврата от длины последовательности d аппроксимируется выражением

$$F_{\mathrm{RB}}(d) = A p_{\mathrm{ref}}^d + B, \quad (21)$$

где A и B учитывают ошибки подготовки и измерения состояния, а p_{ref} характеризует затухание опорных последовательностей.

Для определения ошибки конкретной операции G используется чередующийся рандомизированный бенчмаркинг (IRB). Для одного и того же набора поворотов $V_k^{(s)}$ идеальные состояния в опорной и чередующейся последовательностях до заключительной инвертирующей операции задаются рекуррентно:

$$|\psi_k^{\mathrm{ref}}\rangle = V_k^{(s)}|\psi_{k-1}^{\mathrm{ref}}\rangle, \qquad |\psi_k^{\mathrm{int}}\rangle = G V_k^{(s)}|\psi_{k-1}^{\mathrm{int}}\rangle,$$

где $k = 1, \ldots, d$ – номер поворота, s — номер случайной реализации, а $|\psi_0\rangle = |0\rangle$. Таким образом, чередующаяся последовательность отличается от опорной вставкой операции G после каждого поворота. Соответствующая кривая затухания аппроксимируется как

$$F_{\mathrm{IRB}}(d) = A' p_{\mathrm{int}}^d + B'. \quad (22)$$

В предположении слабой зависимости шума от конкретного поворота Клиффорда экспериментальная оценка средней ошибки r_{avg} исследуемой однокубитной операции определяется отношением параметров затухания:

$$r_{\mathrm{IRB}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p_{\mathrm{int}}}{p_{\mathrm{ref}}}\right). \quad (23)$$

Здесь r_{IRB} обозначает оценку средней ошибки r_{avg}, получаемую методом IRB.

2.3. Кросс-энтропийный и purity бенчмаркинг. При кросс-энтропийном бенчмаркинге (XEB) сравниваются экспериментальное и идеальное распределения вероятностей на выходе случайной квантовой цепочки [14–16].

В данной работе случайная квантовая цепочка глубины d строилась из независимых случайных вращений

$$V_k^{(s)} = \exp\left[-\frac{i\theta_k^{(s)}}{2}\left(\cos\phi_k^{(s)}\,\sigma_x + \sin\phi_k^{(s)}\,\sigma_y\right)\right], \quad (24)$$

где $k = 1, \ldots, d$ обозначает номер слоя, а s – номер случайной реализации цепочки. Азимутальный угол выбирался равномерно на интервале $[0, 2\pi)$, а полярный угол – согласно распределению

$$\cos\theta_k^{(s)} \sim \mathcal{U}(-1, 1), \quad (25)$$

где $\mathcal{U}(-1, 1)$ – равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$. Такой выбор углов обеспечивает изотропное распределение идеальных выходных состояний по сфере Блоха. Использованный в XEB ансамбль являлся непрерывным и не был ограничен поворотами Клиффорда.

Опорные и чередующиеся последовательности строились аналогично описанным в IRB, но вместо поворотов Клиффорда использовались вращения $V_k^{(s)}$, заданные выражением (24). Для цепочки C, действующей на n кубитах, идеальная вероятность получения битовой строки x равна

$$p_C(x) = \left|\langle x|C|0^n\rangle\right|^2. \quad (26)$$

Линейная XEB-верность для набора из N экспериментальных результатов x_j определяется выражением

$$F_{\mathrm{XEB}} = 2^n \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} p_C(x_j) - 1. \quad (27)$$

В эксперименте зависимость F_{XEB} от глубины случайной цепочки аппроксимируется экспоненциальной функцией

$$F_{\mathrm{XEB}}(d) = A p_{\mathrm{XEB}}^d + B. \quad (28)$$

Параметры затухания определяются отдельно для опорных и чередующихся последовательностей. Оценка ошибки исследуемой операции определяется по их отношению:

$$r_{\mathrm{XEB}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p_{\mathrm{int}}^{\mathrm{XEB}}}{p_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{XEB}}}\right). \tag{29}$$

Для выделения некогерентной составляющей ошибки дополнительно используется purity бенчмаркинг. Чистота экспериментального состояния определяется как

$$\mathcal{P} = \mathrm{Tr}\left(\rho^2\right). \tag{30}$$

В данной работе чистота состояния не измерялась напрямую томографически, а оценивалась из данных XEB. Для каждой глубины d случайной последовательности рассматривалось распределение экспериментально полученных вероятностей $p_{\mathrm{exp}}^{(s)}(x)$ по ансамблю случайных цепочек s. При достаточно хаотическом ансамбле конечное состояние будет равномерно распределено по сфере Блоха, а идеальные выходные вероятности чистых состояний будут подчиняться распределению Портера–Томаса [14, 34]. Для одного кубита распределение Портера–Томаса – это равномерное распределение на отрезке [0,1], для которого дисперсия равна $\sigma_{\mathrm{PT}}^2 = 1/12$. Уменьшение дисперсии экспериментального распределения относительно идеального значения характеризует смешивание состояния.

В качестве оценки чистоты состояния использовалась нормированная дисперсия

$$\mathcal{P}_{\mathrm{Purity}}(d) = \frac{\mathrm{Var}_{s,x}\left[p_{\mathrm{exp}}^{(s)}(x)\right]}{\sigma_{\mathrm{PT}}^2}, \tag{31}$$

Таким образом, $\mathcal{P}_{\mathrm{Purity}} = 1$ соответствует идеальному чистому состоянию, а уменьшение этой величины отражает вклад некогерентных ошибок. Аналогично F_{XEB}, величина $\sqrt{\mathcal{P}_{\mathrm{Purity}}(d)}$ аппроксимировалась экспоненциальной зависимостью от глубины последовательности и использовалась для оценки r_{Purity}:

$$r_{\mathrm{Purity}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p_{\mathrm{int}}^{\mathrm{Purity}}}{p_{\mathrm{ref}}^{\mathrm{Purity}}}\right). \tag{32}$$

В настоящей работе оценки ошибок, полученные методами IRB, XEB и purity бенчмаркинга, сопоставляются с D-мерой.

3. Экспериментальные методы. Экспериментальная часть работы проводилась на базе квантового процессора со сверхпроводниковыми кубитами типа трансмон [35]. Каждый кубит имел индивидуальную линию управления, используемую для реализации однокубитных XYZ вращений. Состояние кубитов измерялось методом дисперсионного считывания [36] через индивидуальные резонаторы считывания, связанные с общей линией считывания.

Для учета ошибок подготовки и измерения состояний (SPAM), связанных, в частности, с термальной заселенностью возбужденного состояния и ошибками считывания, проводилась дополнительная калибровка с использованием тождественной операции. В ходе калибровки подготавливались 40 начальных состояний, равномерно распределенных по сфере Блоха, каждое из которых измерялось в 40 различных базисах с числом усреднений $N_{\mathrm{shots}} = 2000$. Полученные 1600 значений вероятности измерения кубита в возбужденном состоянии $p_{\mathrm{meas}}^{|1\rangle}$ аппроксимировались линейной зависимостью

$$p_{\mathrm{meas}}^{|1\rangle} = a + b\, p_{\mathrm{ideal}}^{|1\rangle}, \tag{33}$$

где параметр a характеризует систематическое смещение измеряемых вероятностей, b – изменение измерительного контраста. Полученные параметры использовались для коррекции вероятностей во всех последующих измерениях:

$$p_{\mathrm{corr}}^{|1\rangle} = \frac{p_{\mathrm{meas}}^{|1\rangle} - a}{b}. \tag{34}$$

Все исследованные однокубитные операции реализовывались резонансными микроволновыми импульсами длительностью 32 нс с косинусоидальной огибающей. Угол поворота состояния кубита на сфере Блоха определяется площадью управляющего импульса:

$$\theta(A) = \int_0^{T_{\mathrm{gate}}} \Omega(t; A)\, dt, \tag{35}$$

где $\Omega(t; A)$ – огибающая микроволнового импульса, соответствующая амплитуде A, а $T_{\mathrm{gate}} = 32$ нс. Для калибровки при фиксированных длительности и форме импульса варьировалась его амплитуда и измерялась заселенность первого возбужденного состояния кубита. Полученная зависимость аппроксимировалась выражением

$$P_1(A) = P_{\mathrm{off}} + C\sin^2\left(\frac{kA + \theta_0}{2}\right), \tag{36}$$

где P_{off} и C определяют смещение и контраст осцилляций Раби. Параметры k и θ_0 задают калибровочную зависимость угла поворота от амплитуды импульса, $\theta(A) = kA + \theta_0$ [37]. Калибровка амплитуды

выполнялась для поворотов вокруг оси Y. В базисе $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ соответствующая операция имеет вид

$$R_Y(\theta) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_Y\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Изменение фазы откалиброванного импульса на величину φ изменяет направление оси вращения в экваториальной плоскости сферы Блоха, не изменяя угол поворота θ. При отсчете фазы φ относительно оси Y введем оператор

$$\sigma_\varphi = -\sin\varphi\,\sigma_X + \cos\varphi\,\sigma_Y. \tag{38}$$

Тогда поворот вокруг соответствующей оси имеет вид

$$R(\theta,\varphi) = e^{-i\theta\sigma_\varphi/2} = \\ = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -e^{-i\varphi}\sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi}\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \tag{39}$$

При выбранном соглашении о фазе $R(\theta,0) = R_Y(\theta)$, а $R(\theta,-\pi/2) = R_X(\theta)$. Таким образом, после определения зависимости $\theta(A)$ повороты вокруг других осей экваториальной плоскости реализовывались изменением фазы того же управляющего импульса [38].

Основные параметры трансмона, используемого в работе, такие как частота рабочего перехода $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, времена когерентности T_1 и T_2, параметры считывающего резонатора приведены в табл. 1.

Таблица 1. Основные параметры трансмона, использованного в эксперименте

f_{01}, GHz	f_r, GHz	T_{gate}, ns	T_1, μs	T_2^R, μs	T_2^E, μs
4.3345	6.713	32	17.8	3.2	7.5

4. Экспериментальные результаты. Результаты калибровки ошибок подготовки и измерения состояний представлены на рис. 1. Аппроксимация измерений тождественной операции линейной моделью (33) дала

$$a = 0.129, \quad b = 0.790. \tag{40}$$

Среднеквадратичное отклонение экспериментальных точек от линейной модели составило 0.039. Полученные параметры использовались в преобразовании (34) для коррекции вероятностей во всех последующих измерениях.

Экспериментальная оценка D-меры проводилась для набора однокубитных операций $R_X(\theta)$ и $R_Y(\theta)$ при $\theta = \pi/4, \pi/2, \pi$. Для каждой операции подготавливались 30 начальных состояний, распределенных по сфере Блоха, после чего выходные состояния считывались в 30 измерительных базисах с числом усреднений $N_{shots} = 2000$. Использованное распределение начальных состояний и направлений измерения показано на рис. 2. Максимальное отклонение, найденное на конечном наборе состояний и измерительных направлений, использовалось в качестве экспериментальной оценки D_{exp}.

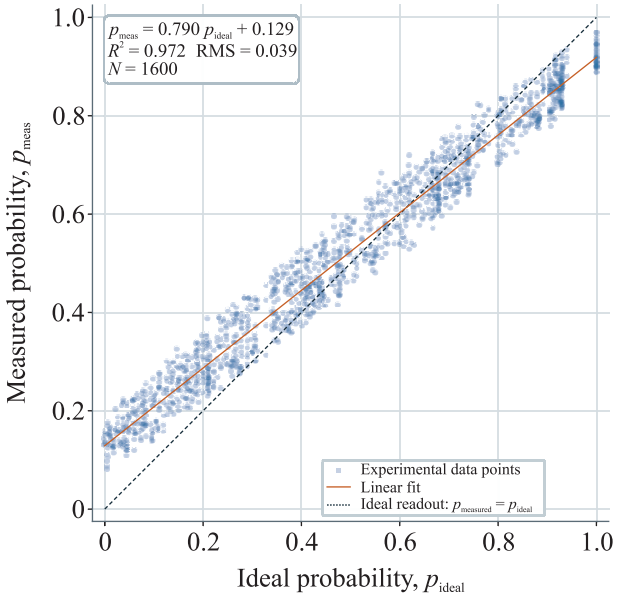


Рис. 1. (Цветной онлайн) Зависимость измеренной вероятности p_{meas} от идеальной вероятности p_{ideal} для тождественной операции. Точками показаны экспериментальные данные, сплошной линией – линейная аппроксимация $p_{meas} = a + b\,p_{ideal}$, пунктирной линией – зависимость $p_{meas} = p_{ideal}$, соответствующая идеальному приготовлению и считыванию состояний

На рисунке 3 приведены значения D_{exp}, а также значения D_{fit}, полученные из аппроксимации экспериментальных данных квантовым каналом в виде аффинного преобразования в соответствии с формулой (16) путем минимизации суммы квадратов отклонений (17). Для рассмотренных операций экспериментальная оценка лежит в диапазоне $D_{exp} = 0.12$–0.20, тогда как значения, полученные из восстановленного канала, составляют $D_{fit} = 0.04$–0.06. Полученные значения для вращений вокруг осей X и Y сопоставимы, выраженной зависимости ошибки от выбора одной из этих осей не наблюдается.

Для всех исследованных операций выполняется $D_{fit} < D_{exp}$. Это различие связано с тем, что восстановленный квантовый канал описывает общую зависимость выходного состояния от входного, сглаживая отдельные отклонения экспериментальных то-

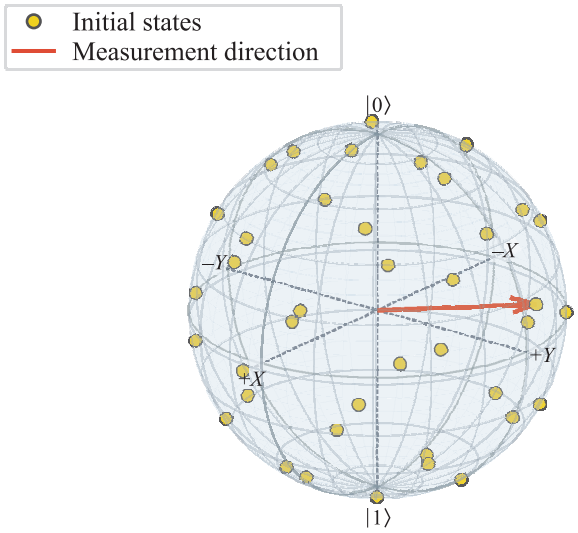


Рис. 2. (Цветной онлайн) Распределение начальных состояний и измерительных осей по сфере Блоха. Показаны все использованные начальные состояния (желтые точки) и одно из направлений измерения. Остальные направления измерения совпадают с точками начальных состояний

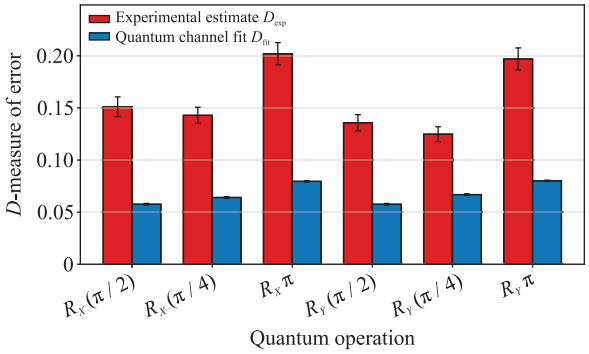


Рис. 3. (Цветной онлайн) Ошибка квантовых операций, оцененная через D-меру, для различных однокубитных гейтов

чек. Для всех рассмотренных гейтов коэффициент детерминации аппроксимации находится в диапазоне $R^2 = 0.98$–0.99, что свидетельствует о хорошем согласии восстановленного квантового канала с экспериментальными данными.

Зависимость ошибки операции $R_X(\pi/2)$ от начального состояния показана на рис. 4. Экспериментальные точки соответствуют подготовленным входным состояниям, а тепловая карта построена по восстановленному квантовому каналу. Ошибка заметно изменяется по сфере Блоха и достигает максимума в окрестности направления, отмеченного звездой.

Для сопоставления с усредненными характеристиками те же операции были исследованы методами IRB, XEB и purity бенчмаркинга. В экспериментах XEB для каждой глубины использовалось 100 случайных последовательностей, причем каждая последовательность запускалась на квантовом процессоре $N_{\text{shots}} = 500$ раз. В экспериментах IRB для каждой глубины использовалось 40 случайных последовательностей, а число запусков каждой из них было увеличено до 5000. Пример кривых затухания для операции $R_X(\pi/2)$ приведен на рис. 5. Полученные оценки для всех исследованных операций представлены в табл. 2. В этой таблице также приведены значения средней ошибки $1 - F_{\text{avg}}$ и нормы Китаева $D_\diamond$, вычисленные для восстановленных квантовых каналов в соответствии с формулами (8), (9), (10). Значения r_{IRB}, r_{XEB} и r_{Purity} не превышают 0.5 %, в то время как численные значения D_{exp} (после линейной коррекции ошибок приготовления и измерения) находятся в диапазоне 12.5–20.2 %.

Такое различие не следует интерпретировать как прямое расхождение методов, поскольку рассматриваемые величины имеют различный физический смысл. IRB и XEB характеризуют усредненное затухание случайных последовательностей, а D-мера описывает максимальное отклонение выходного состояния на рассматриваемом наборе входных состояний.

Дополнительно было исследовано накопление ошибки в композициях однокубитных операций. На рисунке 6 измеренная ошибка каждой композиции сравнивается с суммой D-мер ошибок составляющих ее гейтов. В пределах экспериментальной погрешности ошибки всех рассмотренных композиций не превышают аддитивной верхней оценки. Степень близости к этой оценке существенно зависит от последовательности, однако выраженной связи с тем, эквивалентно ли ее результирующее действие тождественной операции, не наблюдается. Таким образом, приближенная аддитивность D-меры выполняется не для всех исследованных композиций.

5. Заключение. В работе проведена экспериментальная характеризация ошибок однокубитных операций $R_X(\theta)$ и $R_Y(\theta)$ на сверхпроводниковом кубите типа трансмон с использованием D-меры, чередующегося рандомизированного, кросс-энтропийного и purity бенчмаркинга. Экспериментальная оценка D-меры выполнялась по конечному набору из 30 начальных состояний и 30 измерительных направлений, распределенных по сфере Блоха. Дополнительно по экспериментальным данным восстанавливался квантовый канал, на основе которого вычислялась величина D_{fit}.

Для исследованных операций получены значения $D_{\text{exp}} = 0.125$–0.202 и $D_{\text{fit}} = 0.045$– 0.063. В целом

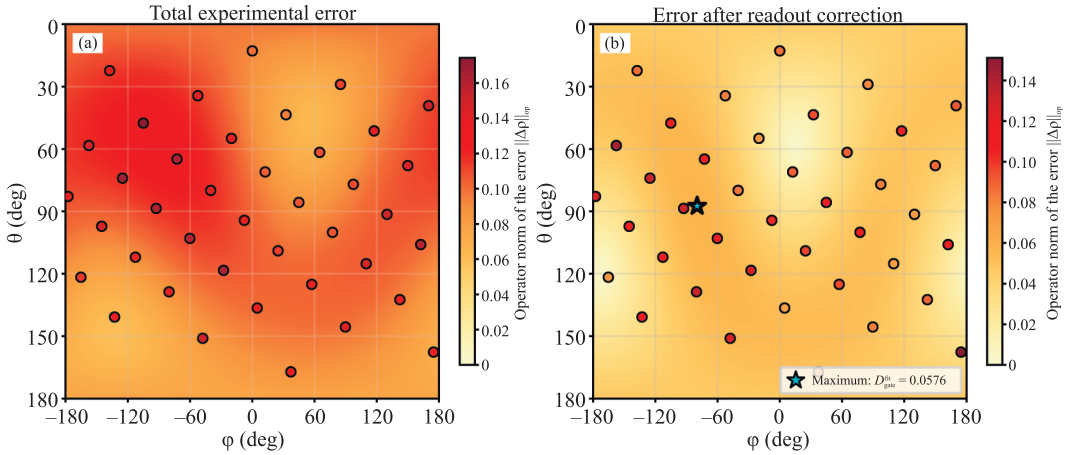


Рис. 4. (Цветной онлайн) Ошибка операции $R_X(\pi/2)$ при разных начальных состояниях. (a) – Полная экспериментальная ошибка. (b) – Ошибка после применения коррекции считывания. Точками отмечены экспериментальные данные. Голубой звездой отмечено состояние с максимальной ошибкой

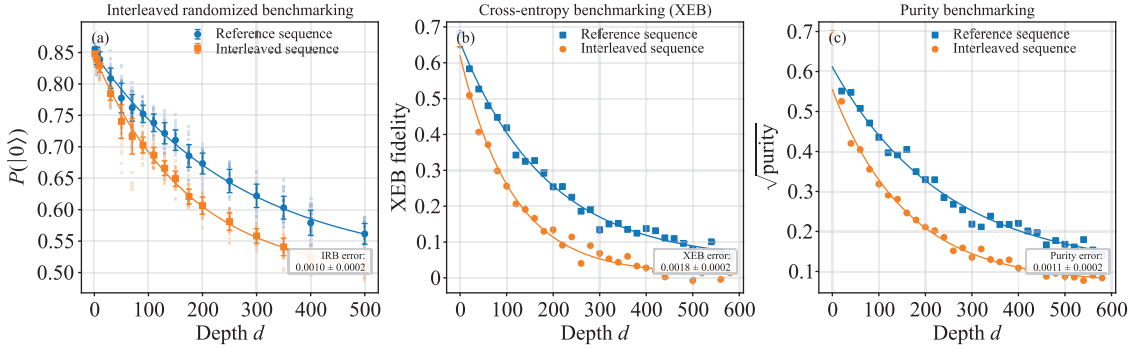


Рис. 5. (Цветной онлайн) Сравнение ошибок, полученных методами чередующегося, кросс-энтропийного и purity бенчмаркинга

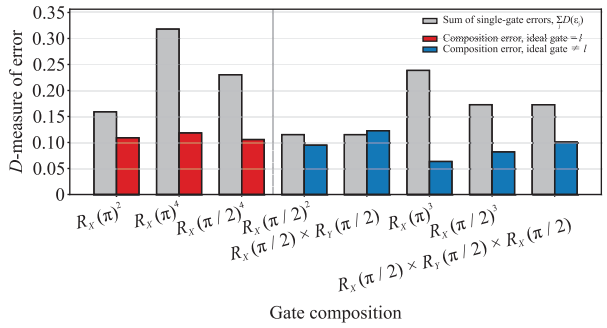


Рис. 6. (Цветной онлайн) Графическое сравнение ошибок композиций гейтов с суммой ошибок составляющих одиночных гейтов. Слева от пунктирной линии – композиции, действие которых эквивалентно тождественному оператору, справа – остальные

величина ошибки возрастает с увеличением угла поворота, при этом выраженного различия между вращениями вокруг осей X и Y не наблюдается. Восстановленный квантовый канал воспроизводит основную зависимость ошибки от входного состояния, хотя значения D_{fit} оказываются ниже непосредственных экспериментальных оценок. Полученные распределения ошибки по сфере Блоха показывают, что отклонение от идеальной операции существенно зависит от начального состояния.

Оценки ошибок, полученные методами IRB, XEB и purity бенчмаркинга, для всех рассмотренных операций не превышают 0.5%. Кроме того, исследовано накопление ошибок в композициях однокубитных операций. Установлено, что ошибка композиции существенно зависит от конкретной последовательности гейтов и в общем случае не определяется суммой ошибок отдельных операций. Различия между композициями с тождественным и нетождественным идеальным результирующим действием не позволяют сделать однозначный вывод о механизме накопления ошибок.

Авторы благодарят А. Стрельникова за разработку корпуса для квантового процессора и

Таблица 2. Сравнение экспериментальных оценок ошибок, полученных различными методами

Gate	IRB: r_{IRB}	XEB: r_{XEB}	Purity: r_{Purity}	$1-F_{\mathrm{avg}}$	$D_{\diamond}$	D_{exp}	D_{fit}	R^2, D_{fit}
$R_X(\pi/2)$	0.0010	0.0018	0.0011	0.005	0.058	0.151	0.045	0.986
$R_X(\pi/4)$	–	0.0018	0.0018	0.018	0.064	0.143	0.051	0.984
$R_X(\pi)$	0.0030	0.0032	0.0015	0.004	0.080	0.202	0.063	0.981
$R_Y(\pi/2)$	0.0010	0.0020	0.0013	0.005	0.058	0.136	0.045	0.985
$R_Y(\pi/4)$	–	0.0020	0.0016	0.021	0.067	0.125	0.053	0.984
$R_Y(\pi)$	–	0.0036	0.0020	0.004	0.080	0.197	0.063	0.982

Н. Абрамова – за разработку и изготовление джозефсоновского параметрического усилителя. Микросхема экспериментального образца была изготовлена в Центре коллективного пользования МФТИ.

Финансирование работы. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение 075-15-2024-538).

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

1. D. F. V. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, and A. G. White, "Measurement of qubits", Phys. Rev. A **64**, 052312 (2001); doi: 10.1103/PhysRevA.64.052312; url: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.64.052312.
2. Z. Hradil, "Quantum-state estimation", Phys. Rev. A **55**, R1561(R) (1997); doi: 10.1103/PhysRevA.55.R1561; url: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.55.R1561.
3. J. F. Poyatos, J. I. Cirac, and P. Zoller. "Complete Characterization of a Quantum Process: The Two-Bit Quantum Gate", Phys. Rev. Lett. **78**, 390 (1997); doi: 10.1103/PhysRevLett.78.390; url: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.390.
4. I. L. Chuang and M. A. Nielsen, "Prescription for experimental determination of the dynamics of a quantum black box", J. Mod. Opt. **44**(11–12), 2455 (1997); doi: 10.1080/09500349708231894; eprint: https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/09500349708231894.
5. S. Filipp, P. Maurer, P. J. Leek, M. Baur, R. Bianchetti, J M. Fink, M. Göppl, L. Steffen, J. M. Gambetta, A. Blais, and A. Wallraff, "Two-Qubit State Tomography Using a Joint Dispersive Readout", Phys. Rev. Lett. **102**, 200402 (2009); doi: 10.1103/PhysRevLett.102.200402; url: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.200402.
6. R. C. Bialczak, M. Ansmann, M. Hofheinz, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, H. Wang, J. Wenner, M. Steffen, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, "Quantum process tomography of a universal entangling gate implemented with Josephson phase qubits", Nat. Phys. **6**(6), 409 (2010); doi: 10.1038/nphys1639; url: https://doi.org/10.1038/nphys1639.
7. T. Yamamoto, M. Neeley, E. Lucero, R. C. Bialczak, J. Kelly, M. Lenander, M. Mariantoni, A. D. O'Connell, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, Y. Yin, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, "Quantum process tomography of two-qubit controlled-Z and controlled-NOT gates using superconducting phase qubits", Phys. Rev. B **82**, (2010), 184515; doi: 10.1103/PhysRevB.82.184515; url: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.82.184515.
8. E. Knill, D. Leibfried, R. Reichle, J. Britton, R. B. Blakestad, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, S. Seidelin, and D. J. Wineland, "Randomized Benchmarking of Quantum Gates", Phys. Rev. A **77**, 012307 (2008); doi: 10.1103/PhysRevA.77.012307; arXiv: 0707.0963 [quant-ph].
9. E. Magesan, J. M. Gambetta, and J. Emerson, "Scalable and Robust Randomized Benchmarking of Quantum Processes", Phys. Rev. Lett. **106**, 180504 (2011); doi: 10.1103/PhysRevLett.106.180504; arXiv: 1009.3639 [quant-ph].
10. E. Magesan, J. M. Gambetta, and J. Emerson, "Characterizing Quantum Gates via Randomized Benchmarking", Phys. Rev. A **85**, 042311 (2012); doi: 10.1103/PhysRevA.85.042311; arXiv: 1109.6887 [quant-ph].
11. E. Magesan, J. M. Gambetta, B. R. Johnson, C. A. Ryan, J. M. Chow, S. T. Merkel, M. P. da Silva, G. A. Keefe, M. B. Rothwell, T. A. Ohki, M. B. Ketchen, and M. Steffen, "Efficient Measurement of Quantum Gate Error by Interleaved Randomized Benchmarking", Phys.Rev. Lett. **109**, 080505; doi: 10.1103/PhysRevLett.109.080505; arXiv: 1203.4550 [quant-ph].
12. J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. Tornberg, J. Koch, L. S. Bishop, A. A. Houck, B. R. Johnson, L. Frunzio, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, "Randomized Benchmarking and Process Tomography for Gate Errors in a Solid-State Qubit", Phys. Rev. Lett. **102**, 090502 (2009); doi: 10.1103/PhysRevLett.102.090502; arXiv: 0811.4387 [cond-mat.mes-hall].

13. A. D. Córcoles, J. M. Gambetta, J. M. Chow, J. A. Smolin, M. Ware, J. D. Strand, B. L. T. Plourde, and M. Steffen, "Process Verification of Two-Qubit Quantum Gates by Randomized Benchmarking", Phys. Rev. A **87**, 030301 (2013); doi: 10.1103/PhysRevA.87.030301; arXiv: 1210.7011 [quant-ph].
14. S. Boixo, S. V. Isakov, V. N. Smelyanskiy, R. Babbush, N. Ding, Zh. Jiang, M. J. Bremner, J. M. Martinis, and H. Neven, "Characterizing Quantum Supremacy in Near-Term Devices", Nat. Phys. **14**, 595 (2018); doi: 10.1038/s41567-018-0124-x; arXiv: 1608.00263 [quant-ph].
15. C. Neill, P. Roushan, K. Kechedzhi et al. (Collaboration), "A blueprint for demonstrating quantum supremacy with superconducting qubits", Science **360**(6385), 195 (2018); doi: 10.1126/science.aao4309; eprint: https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.aao4309.
16. F. Arute, K. Arya, R. Babbush et al. (Collaboration), "Quantum supremacy using a programmable superconducting processor" Nature **574**(7779), 505 (2019); doi: 10.1038/s41586-019-1666-5; url: https://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5.
17. J. J. Wallman and J. Emerson, "Noise tailoring for scalable quantum computation via randomized compiling", Phys. Rev. A **94**, 052325 (2016); doi: 10.1103/PhysRevA.94.052325; url: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.052325.
18. J. M. Epstein, A. W. Cross, E. Magesan, and J. M. Gambetta, "Investigating the Limits of Randomized Benchmarking Protocols", Phys. Rev. A **89**, 062321 (2014); doi: 10.1103/PhysRevA.89.062321; arXiv: 1308.2928 [quant-ph].
19. T. Proctor, K. Rudinger, K. Young, M. Sarovar, and R. Blume-Kohout, "What Randomized Benchmarking Actually Measures", Phys. Rev. Lett. **119**, 130502 (2017); doi: 10.1103/PhysRevLett.119.130502; arXiv: 1702.01853 [quant-ph].
20. J. J. Wallman, "Randomized Benchmarking with Gate-Dependent Noise", Quantum **2**, 47 (2018); doi: 10.22331/q-2018-01-29-47; arXiv: 1703.09835 [quant-ph].
21. L. Fedichkin, A. Fedorov, and V. Privman, "Measures of decoherence", Quantum Information and Computation, ed. by E. Donkor, A. R. Pirich, and H. E. Brandt, International Society for Optics and Photonics (SPIE, 2003), p. 243, v. 5105; doi: 10.1117/12.486792; url: https://doi.org/10.1117/12.486792.
22. L. Fedichkin and V. Privman, "Quantitative Treatment of Decoherence", *Electron Spin Resonance and Related Phenomena in Low-Dimensional Structures*, ed. by M. Fanciulli (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009), p. 141; ISBN: 978-3-540-79365-6; doi: 10.1007/978-3-540-79365-6_8; url: https://doi.org/10.1007/978-3-540-79365-6_8.
23. R. Jozsa,"Fidelity for Mixed Quantum States", J. Mod. Opt. **41**(12), 2315 (1994); doi: 10.1080/09500349414552171; eprint: https://doi.org/10.1080/09500349414552171.
24. M. A. Nielsen, "A simple formula for the average gate fidelity of a quantum dynamical operation", Phys. Lett. A **303**(4), 249 (2002); doi: https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)01272-0.
25. А. Ю. Китаев, "Квантовые вычисления: алгоритмы и исправление ошибок", Успехи математических наук **52**(6(318)), 53 (1997) [A. Yu. Kitaev, Russian Mathematical Surveys **52**(6), 1191 (1997)]; DOI: 10.1070/RM1997v052n06ABEH002155.
26. D. Aharonov, A. Kitaev, and N. Nisan, "Quantum circuits with mixed states", in *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC '98 (Dallas, Texas, USA: Association for Computing Machinery, 1998), p. 20; ISBN: 0897919629; doi: 10.1145/276698.276708; url: https://doi. org/10.1145/276698.276708.
27. А. Ю. Китаев, А. Х. Шень, М. Н. Вялый, *Классические и квантовые вычисления* (МЦНМО, ЧеРо, М., 1999), с. 192 [A. Yu. Kitaev, A. H. Shen, and M. N. Vyalyi, *Classical and Quantum Computation, Graduate Studies in Mathematics* (American Mathematical Society, Providence, RI, 2002), v. 47]; ISBN: 5-900916-35-9; DOI: 10.1090/gsm/047.
28. J. Watrous, "Semidefinite Programs for Completely Bounded Norms", Theory of Computing **5**(11), 217 (2009); doi: 10.4086/toc.2009.v005a011; url: https://theoryofcomputing.org/articles/v005a011.
29. M. M. Wilde, *Quantum Information Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).
30. М. Нильсен, И. Чанг, *Квантовые вычисления и квантовая информация*, пер. с англ., под ред. М. Н. Вялого, П. М. Островского (Мир, М., 2006), с. 824 [M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000)]; ISBN: 5-03-003524-9.
31. Е. А. Паньковец, Л. Е. Федичкин, "Метрика на пространстве квантовых процессов", Труды Математического института имени В. А. Стеклова **324**, 179 (2024) [E. A. Pankovets and L. E. Fedichkin, "Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics" **324**, 169 (2024)]; DOI: 10.1134/S0081543824010164; doi: 10.4213/tm4380; url: https://doi.org/10.4213/tm4380.
32. L. Fedichkin and D. Tarpanov, "Evaluation of the Efficiency of Quantum Information Processors", Russian Microelectronics **54**(8), 1517 (2025); doi: 10.1134/S1063739725601481; url: https://doi.org/10.1134/S1063739725601481.

33. L. Fedichkin, A. Fedorov, and V. Privman, "Additivity of decoherence measures for multiqubit quantum systems", Phys. Lett. A **328**(2–3), 87 (2004); doi: 10.1016/j.physleta.2004.06.021.
34. C. E. Porter and R. G. Thomas, "Fluctuations of Nuclear Reaction Widths", Phys. Rev. **104**, 483 (1956); doi: 10.1103/PhysRev.104.483; url: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.104.483.
35. J. Koch, T. M. Yu, J. Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, "Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box", Phys. Rev. A **76**, 042319 (2007); doi: 10.1103/PhysRevA.76.042319; url: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.76.042319.
36. A. Blais, R.-Sh. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, "Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation", Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004); doi: 10.1103/PhysRevA.69.062320; url: https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062320.
37. Zh. Li, P. Liu, P. Zhao, Zh. Mi, H. Xu, X. Liang, T. Su, W. Sun, G. Xue, J.-N. Zhang, W. Liu, Y. Jin, and H. Yu, "Error per singlequbit gate below 10^{-4} in a superconducting qubit", npj Quantum Information **9**(1), 111 (2023); doi: 10.1038/s41534-023-00781-x; url: https://doi.org/x.10.1038/s41534-023-00781.
38. D. C. McKay, Ch. J. Wood, S. Sheldon, J. M. Chow, and J. M. Gambetta, "Efficient Z gates for quantum computing", Phys. Rev. A **96**, 022330 (2017); doi: 10.1103/PhysRevA.96.022330.